УДК 514.74

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА РАДИУСА НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ[1]

© 2009 В.Н. Кокарев[2]

Получена точная априорная оценка на радиусы нормальной кривизны замкнутой выпуклой поверхности с заданной элементарной симметрической функцией условных радиусов кривизны.

Ключевые слова: априорные оценки, условный радиус кривизны.

1. Основные понятия и уравнения

Пусть $f^k = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k x_i x_j, (k = 1, \ldots, m)$ — положительно определенные квадратичные формы. Составим форму $f = \sum_{k=1}^m \lambda_k f^k$ и рассмотрим определитель матрицы квадратичной формы f: $\det f = \det(\lambda_1 a_{ij}^1 + \ldots + \lambda_m a_{ij}^m)$.

Это однородный многочлен степени n по $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, то есть

$$\det f = \sum_{k_n=1}^{m} \ldots \sum_{k_1=1}^{m} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \ldots \lambda_{k_n} D(f^{k_1}, \ldots, f^{k_n}).$$

Коэффициент при $\lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \ldots \lambda_{k_n}$, взятый симметричным по всем индексам, называется смешанным дискриминантом форм $f^{k_1}, f^{k_2}, \ldots, f^{k_n}$ или матриц $(a_{ij}^{k_1}), (a_{ij}^{k_2}), \ldots, (a_{ij}^{k_n})$.

Пусть S замкнутая выпуклая поверхность в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}, в котором введены декартовы координаты $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Если S регулярна, по крайней мере дважды дифференцируема, и гауссова кривизна ее в любой точке положительна, то ее опорная функция H обладает той же степенью регулярности [1]. Обозначим $\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = H_{ij}$. Главные радиусы нормальной кривизны удовлетворяют уравнению

$$\det(H_{ij} - R\delta_{ij}) = 0 \ \ (i, j = 1, \ldots, n+1), \tag{1.1}$$

[1]Статья поддержана грантами РФФИ № 08-01-00151 и АВЦП № 3341.

[2]Кокарев Виктор Николаевич (ko1949@yandex.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

где производные фукции H надо вычислять на единичной сфере [1]. Уравнение (1.1) имеет один посторонний корень $R = 0$. Отбрасывая этот корень, по теореме Виета получаем, что произведение всех главных радиусов кривизны равняется сумме всех главных миноров n-го порядка матрицы H_{ij}. Этот факт удобно записывать в следующем виде:

$$\frac{1}{K_S} = nD(\underbrace{H_{ij}, \ldots, H_{ij}}_{n}, \delta_{ij}) \ \ (i, j = 1, \ldots, n+1), \tag{1.2}$$

где K_S — гауссова кривизна поверхности S, D — символ смешанного дискриминанта.

Пусть S и E регулярные замкнутые выпуклые поверхности в $(n+$ $+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1} с положительной гауссовой кривизной. Тогда S и E имеют биективные сферические отображения на единичную сферу

$$\nu_S \colon S \to S^n, \nu_E \colon E \to S^n.$$

Тем самым определено отображение

$$\nu_E^{-1} \circ \nu_S \colon S \to E,$$

которое сопоставляет всякой точке x поверхности S с внешней нормалью ν точку y поверхности E с той же внешней нормалью.

Дифференциалы указанных отображений устанавливают изоморфизмы между $\mathbf{T}_x(S), \mathbf{T}_y(E)$ и $\mathbf{T}_\nu(S^n)$ — касательными пространствами к S, E и S^n в точках x, y и ν. Пусть вектору $d\nu \in \mathbf{T}_\nu(S^n)$ соответствуют векторы $dx \in \mathbf{T}_x(S)$ и $dy \in \mathbf{T}_y(E)$.

Экстремумы отношения $\frac{dxd\nu}{dyd\nu}$ по всему $\mathbf{T}_\nu(S^n)$ называются главными условными радиусами кривизны поверхности S относительно поверхности E в точке x. Далее будем их называть условными радиусами кривизны S относительно E и обозначать $\tilde{R}_i$. Для условных радиусов кривизны получаем уравнение

$$\det(L_{ij}^S - \tilde{R} L_{ij}^E) = 0 \ \ (i, j = 1, \ldots, n), \tag{1.3}$$

где L_{ij}^S, L_{ij}^E — коэффициенты вторых квадратичных форм поверхностей S и E, соответственно.

Для условных радиусов кривизны справедлива обобщенная теорема Родрига, а именно для тех направлений $d\nu$, в которых отношение $\frac{dxd\nu}{dyd\nu}$ достигает экстремума, соответствующие этому $d\nu$ векторы dx и dy пропорциональны, то есть

$$dx - \tilde{R}_i dy = 0,$$

где $\tilde{R}_i$ — соответствующий условный радиус кривизны. Отсюда получается, что у условно параллельной поверхности $S + \lambda E$ условные радиусы кривизны равны $\tilde{R}_i + \lambda$.

Обозначим через K_S, K_E гауссовы кривизны, а через $D_1^S, D_1^E, D_1^{S^n}, D_2^S,$ D_2^E — дискриминанты первых и вторых квадратичных форм поверхностей

S, E и единичной сферы S^n. Тогда

$$K_S = \frac{D_2^S}{D_1^S},\ \ K_E = \frac{D_2^E}{D_1^E}.$$

По теореме Гаусса

$$\frac{D_1^{S^n}}{D_1^S} = K_S^2,\ \ \frac{D_1^{S^n}}{D_1^E} = K_E^2.$$

Тогда получаем

$$\frac{K_S}{K_E} = \frac{D_2^S D_1^E D_1^{S^n}}{D_2^E D_1^{S^n} D_1^S} = \frac{D_2^S K_S^2}{D_2^E K_E^2}.$$

Отсюда и из (1.3)

$$\frac{K_E}{K_S} = \frac{D_2^S}{D_2^E} = \tilde{R}_1 \cdots \tilde{R}_n.$$

Обозначим опорные функции поверхностей S и E через H и H^0, соответственно. Заменяя гауссовы кривизны их выражениями (1.2) через опорные функции, получаем

$$D(\underbrace{H_{ij}, \ldots, H_{ij}}_{n}, \delta_{ij}) = (\underbrace{H_{ij}^0, \ldots, H_{ij}^0}_{n}, \delta_{ij})\tilde{R}_1 \cdots \tilde{R}_n\ (i,j = 1, \ldots, n+1).$$

Условно параллельная поверхность $S + \lambda E$ имеет опорную функцию $H + \lambda H^0$. Поэтому

$$D(\underbrace{H_{ij} + \lambda H_{ij}^0, \ldots, H_{ij} + \lambda H_{ij}^0}_{n}, \delta_{ij}) =$$
$$= D(\underbrace{H_{ij}^0, \ldots, H_{ij}^0}_{n}, \delta_{ij})(\tilde{R}_1 + \lambda) \cdots (\tilde{R}_n + \lambda)\ (i,j = 1, \ldots, n+1).$$

Разлагая обе части по степеням λ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$C_n^k D(\underbrace{H_{ij}, \ldots, H_{ij}}_{k}, H_{ij}^0, \ldots, H_{ij}^0, \delta_{ij}) = D(\underbrace{H_{ij}^0, \ldots, H_{ij}^0}_{n}, \delta_{ij})\sigma_k\ (i,j = 1, \ldots, n+1). \tag{1.4}$$

Смешанный дискриминант слева — это коэффициент при $t^k \tilde{R}^{n-k} s$ в определителе

$$\det(tH_{ij} + \tilde{R}H_{ij}^0 + s\delta_{ij}). \tag{1.5}$$

В области, где $x_{n+1} \neq 0$, имеют место соотношения (см. [1]):

$$H_{n+1,j} = -\sum_{i=1}^n H_{ij}\frac{x_i}{x_{n+1}}, H_{n+1,j}^0 = -\sum_{i=1}^n H_{ij}^0 \frac{x_i}{x_{n+1}}.$$

Поэтому, если i-ю строку определителя (1.5) умножить на $-\frac{x_i}{x_{n+1}}$ и прибавить к $n+1$-й строке для всех $i = 1, \ldots, n$, а i-й столбец тоже умножить на $-\frac{x_i}{x_{n+1}}$ и прибавить к $n+1$-му столбцу для всех $i = 1, \dots, n$, то определитель (1.5) примет вид

$$\det \begin{pmatrix} tH_{11} + \tilde{R}H_{11}^0 + s & tH_{12} + \tilde{R}H_{12}^0 & \dots & -s\frac{x_1}{x_{n+1}} \\ tH_{21} + \tilde{R}H_{21}^0 & tH_{22} + \tilde{R}H_{22}^0 + s & \dots & -s\frac{x_2}{x_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s\frac{x_1}{x_{n+1}} & -s\frac{x_2}{x_{n+1}} & \dots & s\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{x_{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем коэффициент при $t^k\tilde{R}^{n-k}s$:

$$\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{x_{n+1}} D(\underbrace{H_{ij}, \dots, H_{ij}}_{k}, H_{ij}^0, \dots, H_{ij}^0), (i, j = 1, \dots, n).$$

Он равен смешанному дискриминанту в левой части (1.4), а при $H = H^0$ получим смешанный дискриминант в правой части (1.4). Делая замену, получаем из (1.4)

$$C_n^k D(\underbrace{H_{ij}, \dots, H_{ij}}_{k}, H_{ij}^0, \dots, H_{ij}^0) = D(\underbrace{H_{ij}^0, \dots, H_{ij}^0}_{n})\sigma_k, \ \ (i, j = 1, \dots, n). \qquad (1.6)$$

Это сотношение справедливо в области $x_{n+1} \neq 0$.

Используя положительную однородность первой степени опорной функции H, получим

$$H(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1} H(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1).$$

Обозначим $\frac{x_i}{x_{n+1}} = v_i, \frac{1}{x_{n+1}} = \lambda$, тогда если функция H рассматривается на единичной сфере, то $x_1^2 + \ldots + x_{n+1} = 1$ и $\lambda = \sqrt{1 + v_1^2 + \ldots + v_n^2}$. Обозначим

$$H(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1) = h(v_1, \dots, v_n).$$

Функция h является ограничением функции H на плоскость $x_{n+1} = 1$. Условимся дифференцирование по v_i функций, зависящих от $v_1, \dots, v_n$, обозначать соответствующим индексом внизу, например

$$\frac{\partial h}{\partial v_i} = h_i, \frac{\partial^2 h}{\partial v_i \partial v_j} = h_{ij}.$$

Тогда получим $H_{ij} = \lambda h_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, n)$, где H_{ij} вычисляются на единичной сфере, h_{ij} на плоскости $x_{n+1} = 1$ в точках, лежащих на одном луче, проведенном из начала координат.

Относительно функции H^0 мы повторим те же рассуждения, обозначив

$$H^0(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1) = h^0(v_1, \dots, v_n).$$

Тогда $H_{ij}^0 = \lambda h_{ij}^0$. Следовательно, уравнение (1.6) принимает вид

$$C_n^k D(\underbrace{h_{ij}, \dots, h_{ij}}_{k}, h_{ij}^0, \dots, h_{ij}^0) = D(\underbrace{h_{ij}^0, \dots, h_{ij}^0}_{n})\sigma_k, \ \ (i, j = 1, \dots, n). \qquad (1.7)$$

Для единичной сферы $h^{S^n} = \sqrt{1+v_1^2+\ldots+v_n^2} = \lambda$. Поэтому

$$\det(h_{ij}^{S^n}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2-v_1^2}{\lambda^3} & \frac{-v_1v_2}{\lambda^3} & \cdots & \frac{-v_1v_n}{\lambda^3} \\ \frac{-v_2v_1}{\lambda^3} & \frac{\lambda^2-v_2^2}{\lambda^3} & \cdots & \frac{-v_2v_n}{\lambda^3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-v_nv_1}{\lambda^3} & \frac{-v_nv_2}{\lambda^3} & \cdots & \frac{\lambda^2-v_n^2}{\lambda^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^{n+2}}.$$

Если положить в соотношении (1.7) $h = h^0, h^0 = h^{S^n}, k = n$, то получим

$$D(\underbrace{h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0}_{n}) = \frac{1}{\lambda^{n+2}K_E}.$$

Отсюда и из (1.7) получаем

$$C_n^k D(\underbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}_{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0) = \frac{\sigma_k}{\lambda^{n+2}K_E}. \tag{1.8}$$

2. Априорная оценка радиуса нормальной кривизны замкнутой выпуклой поверхности

Пусть $\varphi(\nu) = \sigma_k\left(\tilde{R}_1(\nu), \ldots, \tilde{R}_n(\nu)\right)$ — k-я элементарная симметрическая функция условных радиусов кривизны поверхности S относительно E. Оценим сверху главные радиусы нормальной кривизны поверхности S через заданную функцию $\varphi(\nu)$.

Пусть радиус нормальной кривизны поверхности S достигает максимума в точке X с внешней нормалью ν . Пусть $R_1 \geqslant \ldots \geqslant R_n$ — главные радиусы нормальной кривизны поверхности S в точке X; через K_E, r_E, R_E обозначим, соответственно, гауссову кривизну, минимальный и максимальный радиусы нормальной кривизны поверхности E в точке X. Направим ось x_i декартовой системы координат параллельно i-му главному направлению поверхности S в точке X . Направление оси x_{n+1} возьмем совпадающим с направлением нормали ν.

Тогда в окрестности точки X мы можем пользоваться уравнением (1.8). При этом функция

$$w = h_{11}(v_1, \ldots, v_n)\frac{(1+v_1^2+\cdots+v_n^2)^{3/2}}{(1+v_2^2+\cdots+v_n^2)}$$

будет в точке $v_1 = 0, \ldots, v_n = 0$ достигать абсолютного максимума $h_{11}(0, \ldots, 0) = R_1$ см.[1]. Следовательно, в этой точке $dw = 0, d^2w \leqslant 0$. Вычисляя w_i и w_{ij} в точке $(0, \ldots, 0)$, получим

$$w_i = h_{11i} = 0, w_{11} = h_{1111} + 3h_{11}, w_{ii} = h_{ii11} + h_{11} (i \neq 1), w_{ij} = h_{ij11} (i \neq j). \tag{2.1}$$

Кроме того, $h_{ij}(0, \ldots, 0) = 0 (i \neq j), h_{ii}(0, \ldots, 0) = R_i$. Введем в рассмотрение функцию

$$\rho_k = \frac{\sigma_k}{\lambda^{n+2}K_E}.$$

Дифференцируя уравнение (1.8) по v_1 в точке $(0,\ldots,0)$ и обозначив $\frac{\partial\rho_k}{\partial v_1}=\rho'_k$, получим

$$\rho'_k=C_n^k\left(\sum_{i,j}\frac{\partial D(\overbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}^{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})}{\partial h_{ij}}h_{ij1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j}\frac{\partial D(\overbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}^{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})}{\partial h_{ij}}h^0_{ij1}\right).$$

Смешанный дискриминант $D(\underbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}_{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})$ будем считать функцией переменных h_{ij},h^0_{ij}. Обозначим через d частный дифференциал на пространстве переменных h_{ij}, через δ обозначим частный дифференциал на переменных h^0_{ij}. Полагая $dh_{ij}=h_{ij1},\delta h^0_{ij}=h^0_{ij1}$, получим

$$\rho'_k=C_n^k\left(dD(\underbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}_{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})+\delta D(\underbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}_{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij}\right). \quad (2.2)$$

Дифференцируя (1.8) в точке $(0,\ldots,0)$ дважды по v_1, обозначив $\frac{\partial^2\rho_k}{\partial v_1^2}=\rho''_k$, получаем

$$\rho''_k=C_n^k\left(d^2D(\underbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}_{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})+2d\delta D(\underbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}_{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})+\right.$$

$$+\delta^2D(\underbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}_{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})+\sum_{i,j}\frac{\partial D(\overbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}^{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})}{\partial h_{ij}}h_{ij11}+$$

$$\left.+\sum_{i,j}\frac{\partial D(\overbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}^{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})}{\partial h^0_{ij}}h^0_{ij11}\right). \quad (2.3)$$

При этом

$$\sum_{i,j}\frac{\partial D(\overbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}^{k},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})}{\partial h_{ij}}h_{ij11}=mD(h_{11ij},\overbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}^{k-1},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij}).$$

Так как $d^2w\leqslant 0$, то

$$D(w_{ij},\underbrace{h_{ij},\ldots,h_{ij}}_{k-1},h^0_{ij},\ldots,h^0_{ij})\leqslant 0.$$

Подставляя сюда выражения для w_{ij} из (2.1) , получаем

$$C_n^k \sum_{i,j} \frac{\partial D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)}{\partial h_{ij}} h_{ij11} \leqslant -2C_n^k \frac{\partial D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)}{\partial h_{11}} h_{11} -$$

$$-C_{n-1}^{k-1} \sum_i h_{11} D(\underbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}_{k-1}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)_{ii}. \quad (2.4)$$

Здесь $D(\underbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}_{k-1}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)_{ii}$ — смешанный дискриминант матриц (h_{ij}) и (h_{ij}^0) с вычеркнутыми i-ми строками и столбцами.

Далее определим величины $\varkappa_{ij}$ соотношениями

$$h_{1111}^0 = -3h_{11}^0 + \varkappa_{11}, h_{i111}^0 = -2h_{i1}^0 + \varkappa_{i1} (i \neq 1), h_{ij11}^0 = -h_{ij}^0 + \varkappa_{ij} (i, j \neq 1) \quad (2.5)$$

и обозначим $\varkappa = \max\limits_{i,j} |\varkappa_{ij}|$. Тогда получим

$$\sum_{i,j} \frac{\partial D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)}{\partial h_{ij}^0} h_{ij11}^0 = \sum_{i,j} \frac{\partial D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)}{\partial h_{ij}^0} \varkappa_{ij} -$$

$$- \sum_{i,j} \frac{\partial D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)}{\partial h_{ij}^0} h_{ij}^0 - 2 \sum_{i \geqslant 1} \frac{\partial D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)}{\partial h_{i1}^0} h_{i1}^0. \quad (2.6)$$

Для второго и первого слагаемых в правой части этого равенства имеем

$$\sum_{i,j} \frac{\partial D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)}{\partial h_{ij}^0} h_{ij}^0 = (n-k) D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0). \quad (2.7)$$

$$\sum_{i,j} \frac{\partial D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)}{\partial h_{ij}^0} \varkappa_{ij} \leqslant \frac{(n-k)^2 \sigma_k \varkappa R_E^{n-k-1}}{K_E r_E^{n-k}}. \quad (2.8)$$

Для любого i каждое слагаемое в $D(\underbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}_{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)$ содержит либо сомножитель h_{i1}, либо h_{i1}^0 . Поэтому

$$\sum_{i \geqslant 1} \frac{\partial D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)}{\partial h_{i1}^0} h_{i1}^0 + \sum_{i \geqslant 1} \frac{\partial D(\overbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}^{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0)}{\partial h_{i1}} h_{i1} =$$

$$= D(\underbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}_{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0).$$

Так как по (2.1) у нас $h_{i1}=0 (i>1)$, то

$$-2C_n^k\left(\sum_{i\geqslant 1}\frac{\partial D(\overbrace{h_{ij},\dots,h_{ij}}^{k},h^0_{ij},\dots,h^0_{ij})}{\partial h^0_{i1}}h^0_{i1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial D(\overbrace{h_{ij},\dots,h_{ij}}^{k},h^0_{ij},\dots,h^0_{ij})}{\partial h_{11}}h_{11}\right)=-2\rho_k. \qquad (2.9)$$

Очевидно, что

$$C_{n-1}^{k-1}\sum_i D(\underbrace{h_{ij},\dots,h_{ij}}_{k-1},h^0_{ij},\dots,h^0_{ij})_{ii}\geqslant\frac{(n-k+1)\sigma_{k-1}r_E^{n-k}}{K_ER_E^{n-k+1}}. \qquad (2.10)$$

Учитывая, что $h_{11}\geqslant r_E\tilde R_1$, из (2.4), (2.6) — (2.10) получаем

$$C_n^k\left(\sum_{i,j}\frac{\partial D(\overbrace{h_{ij},\dots,h_{ij}}^{k},h^0_{ij},\dots,h^0_{ij})}{\partial h_{ij}}h_{ij11}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i,j}\frac{\partial D(\overbrace{h_{ij},\dots,h_{ij}}^{k},h^0_{ij},\dots,h^0_{ij})}{\partial h^0_{ij}}h^0_{ij11}\right)\leqslant$$
$$\leqslant(k-n-2)\rho_k+\frac{(n-k)^2\sigma_k\varkappa R_E^{n-k-1}}{K_Er_E^{n-k}}-\frac{(n-k+1)\sigma_{k-1}r_E^{n-k+1}\tilde R_1}{K_ER_E^{n-k+1}}. \qquad (2.11)$$

Приступим теперь к оценке

$$(d^2+2d\delta+\delta^2)D(\underbrace{h_{ij},\dots,h_{ij}}_{k},h^0_{ij},\dots,h^0_{ij}).$$

Обозначим

$$\max_{i,j}|h^0_{ij1}|=\theta. \qquad (2.12)$$

Тогда

$$C_n^2\delta^2D(\underbrace{h_{ij},\dots,h_{ij}}_{k},h^0_{ij},\dots,h^0_{ij})\leqslant 2(n-k)(n-k-1)\frac{\theta^2}{r_E^2}\sigma_k. \qquad (2.13)$$

Будем считать $D(\underbrace{h_{ij},\dots,h_{ij}}_{k},h^0_{ij},\dots,h^0_{ij})$ функцией от $\frac{n(n+1)}{2}$ переменных h_{ij} при фиксированных h^0_{ij}, которую обозначим через $D_k(h)$. Переменные h_{ij} расположим, например, в следующем порядке:

$$h_{11},h_{22},\dots,h_{nn};h_{12},\dots,h_{1n},h_{23},\dots,h_{2n},\dots,h_{n-1,n}.$$

Из неравенства А.Д. Александрова для смешанных дискриминантов положительно определенных форм [2]

$$\left[D(f^1,\dots,f^n)\right]^m \geqslant \prod_{k=1}^{m} D(\underbrace{f^k,\dots,f^k}_{m}, f^{m+1},\dots,f^n),$$

где знак равенства может стоять лишь в случае пропорциональности форм $f^1,\dots,f^m$, получаем, что для точек

$$h^1=(h^1_{11},h^1_{22},\dots,h^1_{ij},\dots), h^2=(h^2_{11},h^2_{22},\dots,h^2_{ij},\dots)$$

$$\left[D_k(th^1+(1-t)h^2)\right]^{1/k} \geqslant t\left[D_k(h^1)\right]^{1/k}+(1-t)\left[D_k(h^2)\right]^{1/k}, t\in[0,1],$$

где знак равенства стоит тогда и только тогда, когда координаты точек h^1 и h^2 пропорциональны. Это означает, что в точке h , где h_{ij} являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы, функция $D_k^{1/k}$ строго вогнута по всем направлениям за исключением направления Oh, в котором она линейна.

У нас $h_{11}\geqslant\ldots\geqslant h_{nn}>0$ и $h_{11i}=0$. Поэтому вектор Oh не лежит в плоскости $h_{11i}=0$. Значит, у нас форма $d^2D_k^{1/k}\,|_{h_{11i}=0}<0$. Обозначим через λ_1 максимальное собственное значение этой формы. Тогда

$$d^2D_k^{1/k}=\frac{1}{k}\left((\frac{1}{k}-1)D_k^{1/k-2}dD_k^2+D_k^{1/k-1}d^2D_k\right)\leqslant\lambda_1\sum_{i,j>1}h^2_{ij1}.$$

Отсюда

$$d^2D_k\leqslant kD_k^{1-1/k}\lambda_1\sum_{i,j>1}h^2_{ij1}+(1-\frac{1}{k})\frac{dD_k^2}{D_k}. \tag{2.14}$$

Из (2.2) $C_n^kdD_k=\rho_k'-C_n^k\delta D_k$. Так как $|C_n^k\delta D_k|\leqslant\frac{(n-k)^2\theta\sigma_k}{r_E}$, следовательно,

$$(C_n^kdD_k)^2\leqslant{\rho_k'}^2+\frac{(n-k)^2\theta\sigma_k}{r_E}\left(2|\rho_k'|+\frac{(n-k)^2\theta\sigma_k}{r_E}\right). \tag{2.15}$$

Оценим теперь λ_1. Речь идет о максимальном собственном значении матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2D_k^{1/k}}{\partial h_{ii}\partial h_{jj}} & \vdots & \frac{\partial^2D_k^{1/k}}{\partial h_{ii}\partial h_{kl}} \\ \cdots\cdots & & \\ \frac{\partial^2D_k^{1/k}}{\partial h_{kl}\partial h_{jj}} & \vdots & \frac{\partial^2D_k^{1/k}}{\partial h_{kl}\partial h_{pq}} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$(i,j,k,l,p,q=2,\dots,n;\;\; k\neq l, p\neq q)$. Другими словами, мы дожны рассмотреть ограничение функции $D_k^{1/k}$ на плоскость

$$\alpha_{\rm const}:\begin{cases} h_{11}=\text{const},\\ h_{12}=\text{const},\\ \vdots\\ h_{1n}=\text{const}. \end{cases}$$

На плоскости α_{const} максимальное собственное значение квадратичной формы $d^2 D_k^{1/k}$ достигается на векторе, являющемся проекцией вектора Oh на эту плоскость, то есть на векторе $(h_{22}, h_{33}, \ldots, h_{nn}, h_{23}, \ldots)$.

Так как у нас $h_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то в направлении этого вектора имеем

$$\sum_{i,j,p,q>1} \frac{\partial^2 D_k^{1/k}}{\partial h_{ij} \partial h_{pq}} h_{ij} h_{pq} = \lambda_1 \sum_{i,j>1} h_{ij}^2 = \lambda_1 \sum_{i>1} h_{ii}^2.$$

Учитывая, что любой главный минор $(n-k)$-го порядка матрицы (h_{ij}^0) ограничен снизу и сверху величинами r_E^{n-k} и R_E^{n-k} , соответственно, получаем

$$0 = \sum_{i,j,p,q} \frac{\partial^2 D_k^{1/k}}{\partial h_{ij} \partial h_{pq}} h_{ij} h_{pq} = \sum_{i,j,p,q>1} \frac{\partial^2 D_k^{1/k}}{\partial h_{ij} \partial h_{pq}} h_{ij} h_{pq} + \frac{\partial^2 D_k^{1/k}}{\partial h_{11}^2} h_{11}^2 +$$

$$+2 \sum_{i>1} \frac{\partial^2 D_k^{1/k}}{\partial h_{11} \partial h_{ii}} h_{11} h_{ii} = \lambda_1 \sum_{i>1} h_{ii}^2 + \frac{1}{k} D_k^{1/k-2} \times$$

$$\times \left[(\frac{1}{k} - 1) \left(\frac{\partial D_k}{\partial h_{11}} \right)^2 h_{11}^2 + 2 \sum_{i>1} \left(D_k \frac{\partial^2 D_k}{\partial h_{11} \partial h_{ii}} + (\frac{1}{k} - 1) \frac{\partial D_k}{\partial h_{11}} \frac{\partial D_k}{\partial h_{ii}} \right) h_{11} h_{ii} \right] \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_1 \sum_{i>1} h_{ii}^2 + \frac{\sigma_k^{1/k-2}}{k (C_n^k)^{1/k} K_E^{1/k-2}} \left[(\frac{1}{k} - 1)(S_{k-1}^1 R_E^{n-k} h_{11})^2 + \right.$$

$$\left. +2 \sum_{i>1} \left(S_k S_{k-2}^{1i} r_E^{2(n-k)} + (\frac{1}{k} - 1) S_{k-1}^1 S_{k-1}^i R_E^{2(n-k)} \right) h_{11} h_{ii} \right].$$

Здесь S_k — k-я элементарная симметрическая функция от $h_{11}, \ldots, h_{nn}$, S_{k-1}^i — $(k-1)$-я элементарная симметрическая функция от $h_{11}, \ldots, h_{nn}$, кроме h_{ii}, S_{k-2}^{ij} — $(k-2)$-я элементарная симметрическая функция от $h_{11}, \ldots, h_{nn}$, кроме h_{ii}, h_{jj}, $\sigma_k = C_n^k D_k K_E$.

Учитывая, что

$$\sum_i S_{k-1}^i h_{ii} = k S_k,$$

$$\sum_{i>1} S_{k-2}^{1i} h_{ii} = (k-1) S_{k-1}^1,$$

$$S_{k-1}^1 h_{11} \geqslant \frac{k}{n} S_k,$$

получаем оценку для λ_1:

$$\lambda_1 \leqslant \frac{2(k-1) S_k S_{k-1}^1 h_{11} \left(R_E^{2(n-k)} - r_E^{2(n-k)} - \frac{1}{2n} R_E^{2(n-k)} \right) \sigma_k^{1/k-2}}{k (C_n^k)^{1/k} K_E^{1/k-2} \sum\limits_{i>1} h_{ii}^2}. \qquad (2.17)$$

Нам требуется отрицательная оценка для λ_1, поэтому наложим условие

$$R_E^{2(n-k)} - r_E^{2(n-k)} - \frac{1}{2n} R_E^{2(n-k)} < 0.$$

Для выполнения этого условия нужно, чтобы для отношения $\frac{R_E}{r_E} = \delta_0$ выполнялось неравенство

$$\delta_0^{2(n-k)} < \frac{2n}{2n-1}. \tag{2.18}$$

Пусть, кроме того, выполнено условие

$$\frac{h_{11}}{h_{nn}} = \delta_1 \leqslant \frac{2n+1}{2n-1}. \tag{2.19}$$

Тогда

$$h_{nn} \leqslant \ldots \leqslant h_{11} = \delta_1 h_{nn} \leqslant \delta_1 \left(\frac{S_k}{C_n^k}\right)^{1/k} \leqslant \delta_1 R_E \left(\frac{\sigma_k}{C_n^k}\right)^{1/k}, \tag{2.20}$$

так как

$$\frac{S_k}{R_E^k} \leqslant \sigma_k \leqslant \frac{S_k}{r_E^k}.$$

Тогда $\sum\limits_{i>1} h_{ii}^2 \leqslant (n-1)\delta_1^2 R_E^2 \left(\frac{\sigma_k}{C_n^k}\right)^{2/k}$, и из (2.17) получаем

$$\lambda_1 \leqslant \frac{2(k-1)(C_n^k)^{1/k} r_E^{2k} \left(R_E^{2(n-k)} - r_E^{2(n-k)} - \frac{1}{2n} R_E^{2(n-k)}\right)}{n(n-1)\delta_1^2 K_E^{1/k-2} \sigma_k^{1/k} R_E^2}. \tag{2.21}$$

Теперь, используя (2.14) и (2.15), можно оценить

$$(d^2 + 2d\delta) D(\underbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}_{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0).$$

Имеем $2d\delta D(\underbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}_{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0) = \sum\limits_{i,j>1} h_{ij1} A_{ij}$, где модуль коэффициента A_{ij} не превосходит $C_{n-1}^{k-1} h_{11}^{k-1} \theta R_E^{n-k-1}$. Из (2.20) получаем

$$|A_{ij}| \leqslant C_{n-2}^{k-1} \delta_1^{k-1} R_E^{k-1} \left(\frac{\sigma_k}{C_n^k}\right)^{1-1/k} \theta R_E^{n-k-1}. \tag{2.22}$$

Тогда, оценив квадратные по h_{ij1} двучлены, получим, заменив с учетом (2.19) $\frac{k(n-k)^2(n-1)\delta_1^{2k}}{8n(k-1)}$ на $2n^2$

$$\begin{gathered} C_n^k (d^2 + 2d\delta) D(\underbrace{h_{ij}, \ldots, h_{ij}}_{k}, h_{ij}^0, \ldots, h_{ij}^0) \leqslant \\ \leqslant (1 - \frac{1}{k}) \left(\frac{{\rho_k'}^2}{\rho_k} + \frac{(n-k)^2 \theta \sigma_k}{\rho_k r_E} \left(2|\rho_k'| + \frac{(n-k)^2 \theta \sigma_k}{r_E}\right)\right) + \\ + \frac{2n^2 R_E^{2n-2} \sigma_k \theta^2}{K_E r_E^{2k} \left(r_E^{2(n-k)} + \frac{1}{2n} R_E^{2(n-k)} - R_E^{2(n-k)}\right)}. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Из (2.3), (2.11), (2.13) и (2.23) получаем

$$\frac{(n-k+1)\sigma_{k-1} r_E^{n-k+1} \tilde{R}_1}{K_E R_E^{n-k+1}} \leqslant (k-n-2)\rho_k + (1 - \frac{1}{k}) \frac{{\rho_k'}^2}{\rho_k} - \rho_k'' +$$

$$+\frac{(n-k)^2\sigma_k\varkappa R_E^{n-k-1}}{K_E r_E^{n-k}}+\frac{(k-1)(n-k)^2\theta\sigma_k}{kr_E}\left(2|\rho_k'|+\frac{(n-k)^2\theta\sigma_k}{r_E}\right)+$$
$$+2(n-k)(n-k-1)\frac{\theta^2}{r_E^2}\sigma_k+\frac{2n^2R_E^{2n-2}\sigma_k\theta^2}{K_E r_E^{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\delta_0^{2(n-k)}-\delta_0^{2(n-k)}\right)}. \qquad (2.24)$$

Введем функцию $\varphi_k=\left(\frac{\sigma_k}{C_n^kK_E}\right)^{1/k}$. Тогда

$$\rho_k=\varphi_k^kC_n^k(1+v_1^2+\ldots+v_n^2)^{-\frac{n+2}{2}}.$$

В рассматриваемой точке получаем

$$(k-n-2)\rho_k+(1-\frac{1}{k})\frac{\rho_k'^{\,2}}{\rho_k}-\rho_k''=kC_n^k\varphi_k^{k-1}(\varphi_k-\varphi_k'').$$

А так как $\left(\frac{\sigma_{k-1}}{C_n^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\geqslant\left(\frac{\sigma_k}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{k}}$, то $\sigma_{k-1}\geqslant C_n^{k-1}K_E^{\frac{k-1}{k}}\varphi_k^{k-1}$.

Обозначив

$$A=\frac{R_E^{n-k+2}K_E^{1/k}}{r_E^{n-k+1}},$$

$$B=\frac{1}{k}\left(\frac{2n^2R_E^{2n-2}\theta^2}{K_E r_E^{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\delta_0^{2(n-k)}-\delta_0^{2(n-k)}\right)}+2(n-k)(n-k-1)\frac{\theta^2K_E}{r_E^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-k)^2\varkappa R_E^{n-k-1}}{r_E^{n-k}}+\frac{(k-1)(n-k)^2\theta K_E}{kr_E}\left(2|\varphi_k'|+\frac{(n-k)^2\theta\varphi_kK_E}{kr_E}\right)\right),$$

из (2.24) получаем оценку на максимальный условный радиус кривизны в рассматриваемой точке:

$$\tilde R_1\leqslant\frac{A}{R_E}\left(\varphi_k(1+B)-\varphi_k''\right). \qquad (2.25)$$

Отсюда получаем оценку на максимальный главный радиус кривизны

$$R_1\leqslant A\left(\varphi_k(1+B)-\varphi_k''\right). \qquad (2.26)$$

Дифференцирование по v_1 можно заменить дифференцированием по длине дуги на единичной сфере [1].

Теперь нам осталось выяснить геометрический смысл величин θ и $\varkappa$.

Пусть $\gamma(s)$ — геодезическая на поверхности E, такая, что $\gamma(0)=$ $=X$, $\dot\gamma(0)=\left(\frac{dv_1}{ds},\ldots,\frac{dv_n}{ds}\right)$. Пусть $k_n(s)$ — нормальная кривизна этой геодезической. Вычислим $\frac{dk_n}{ds}(0)$. Имеем

$$k_n=L_{ij}^E\frac{dv_i}{ds}\frac{dv_j}{ds},$$

$$\frac{dk_n}{ds}=\frac{\partial L_{ij}^E}{\partial v_k}\frac{dv_i}{ds}\frac{dv_j}{ds}\frac{dv_k}{ds}+2L_{ij}^E\frac{d^2v_i}{ds^2}\frac{dv_j}{ds},$$

по повторяющимся индексам происходит суммирование.

Обозначим символом $(;)$ ковариантное дифференцирование и

$$\pi_{ijk} = L^E_{ij;k} = \frac{\partial L^E_{ij}}{\partial v_k} - \Gamma^a_{ik} L^E_{aj} - \Gamma^a_{jk} L^E_{ai}.$$

Числа π_{ijk} являются координатами тензора Кодацци, симметричного по всем индексам (см. [3]). Тогда получаем

$$\frac{dk_n}{ds} = \pi_{ijk}\frac{dv_i}{ds}\frac{dv_j}{ds}\frac{dv_k}{ds} + 2(\frac{d^2 v_i}{ds^2} + \Gamma^i_{ab}\frac{dv_a}{ds}\frac{dv_b}{ds})(L^E_{ij}\frac{dv_j}{ds}) = \pi_{ijk}\frac{dv_i}{ds}\frac{dv_j}{ds}\frac{dv_k}{ds}.$$

Для координат тензора Кодацци в [4] получено выражение

$$\pi_{ijk} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial v_i \partial v_j}, \frac{\partial \nu}{\partial v_k}\right) - \left(\frac{\partial r}{\partial v_k}, \frac{\partial^2 \nu}{\partial v_i \partial v_j}\right). \tag{2.27}$$

Здесь r — вектор-функция, задающая поверхность E, ν — единичная нормаль поверхности E. В окрестности точки X для них имеют место выражения

$$r = (h^0_1, \ldots, h^0_n, h^0 - h^0_i v_i), \quad \nu = \frac{(v_1, \ldots, v_n, 1)}{(1 + v_1^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2}}. \tag{2.28}$$

Вычисляя, получаем

$$\pi_{ijk}(0, \ldots, 0) = h^0_{ijk}(0, \ldots, 0).$$

Для коэффициентов первой квадратичной формы поверхности E из (2.28) получаем

$$g^E_{ij} = h^0_{1i} h^0_{1j} + \cdots + h^0_{ni} h^0_{nj} + q, \tag{2.29}$$

где q — квадратичная форма от $v_1, \ldots, v_n$. Следовательно, в точке X с координатами $(0, \ldots, 0)$ матрицы (g^E_{ij}) и (h^0_{ij}) связаны соотношением $(g^E_{ij}) = (h^0_{ij})^2$, поэтому собственные значения матрицы (g^E_{ij}) заключены между r_E^2 и R_E^2, а тогда $r_E^2 \leqslant g^E_{ii} \leqslant R_E^2$.

Обозначим $\max\limits_{\bar\eta} \frac{dk_n}{ds}(0) = \tilde\theta$. Здесь максимум берется по всем направлениям $\bar\eta$ на E в точке X. Значит, для любого единичного вектора $\bar\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ модуль кубической формы

$$|\pi(\eta)| = |\pi_{ijk}\eta^i \eta^j \eta^k| \leqslant \tilde\theta.$$

Взяв $\bar\eta_1 = (0, \ldots, 0, \eta^i, 0, \ldots, 0)$, получим

$$|\pi_{|iii|}{\eta^i}^3| \leqslant \tilde\theta \quad \text{при} \quad g^E_{|ii|}{\eta^i}^2 = 1.$$

(Здесь и далее по индексам, заключенным в знак $|\ |$, суммирование не производится.) Следовательно, $|\pi_{iii}| \leqslant \tilde\theta R_E^3$.

Возьмем единичные векторы $\bar\eta_2, \bar\eta_3$ с ненулевыми только i-ми и j-ми координатами

$$\bar\eta_2 = (0, \ldots, \alpha\eta^i, \ldots, \alpha\eta^j, \ldots, 0), \quad \bar\eta_3 = (0, \ldots, -\beta\eta^i, \ldots, \beta\eta^j, \ldots, 0).$$

Положим $|\eta^i| = \frac{\sqrt{3}}{2R_E}$, $\eta^j = \frac{1}{2R_E}, \alpha > 0, \beta > 0$.

Так как собственные значения матрицы (g^E_{ij}) не превосходят R^2_E, то $1 = g^E_{|ii|}{\eta^i}^2\alpha^2 + 2g^E_{|ij|}\eta^i\eta^j\alpha^2 + g^E_{|jj|}{\eta^j}^2\alpha^2 \leqslant R^2_E\frac{\alpha^2}{R^2_E} = \alpha^2$, поэтому $\alpha \geqslant 1$. Аналогично $\beta \geqslant 1$.
Получаем

$$-\tilde\theta \leqslant \frac{\pi(\bar\eta_2)+\pi(\bar\eta_3)}{2} = \pi_{|jjj|}{\eta^j}^3\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} + 3\pi_{|iij|}{\eta^i}^2\eta^j\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} + \\ +3\pi_{|ijj|}\eta^i{\eta^j}^2\frac{\alpha^3-\beta^3}{2} + \pi_{|iii|}{\eta^i}^3\frac{\alpha^3-\beta^3}{2} \leqslant \tilde\theta. \tag{2.30}$$

Взяв знак η^i таким, чтобы $3\pi_{|ijj|}\eta^i{\eta^j}^2\frac{\alpha^3-\beta^3}{2} + \pi_{|iii|}{\eta^i}^3\frac{\alpha^3-\beta^3}{2} \geqslant 0$, из второго неравенства в (2.30) с учетом $\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} \geqslant 1$ получаем $\pi_{iij} \leqslant \tilde\theta R^3_E$ $(i \neq j)$. Взяв η^i с противоположным знаком, из первого неравенства в (2.30) получим $\pi_{iij} \geqslant -\tilde\theta R^3_E \quad (i \neq j)$.

Возьмем единичные векторы $\bar\eta_4$, $\bar\eta_5$ с ненулевыми только i, j, k-ми координатами

$$\bar\eta_4 = (0, \ldots, \alpha\eta^i, \ldots, \alpha\eta^j, \ldots, \alpha\eta^k, \ldots, 0), \\ \bar\eta_5 = (0, \ldots, \beta\eta^i, \ldots, -\beta\eta^j, \ldots, -\beta\eta^k, \ldots, 0).$$

Положим $|\eta^i| = |\eta^j| = |\eta^k| = \frac{\sqrt3}{3R_E}$, $\quad\alpha > 0$, $\quad\beta > 0$. Тогда, как и выше, $\alpha \geqslant 1$, $\quad\beta \geqslant 1$. А так как собственные значения матрицы (g^E_{ij}) не меньше r^2_E, то $\alpha \leqslant \frac{R_E}{r_E}$, $\beta \leqslant \frac{R_E}{r_E}$.

Получаем

$$-\tilde\theta \leqslant \frac{\pi(\bar\eta_4)+\pi(\bar\eta_5)}{2} = \pi_{|iii|}{\eta^i}^3\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} + \pi_{|jjj|}{\eta^j}^3\frac{\alpha^3-\beta^3}{2} + \\ +\pi_{|kkk|}{\eta^k}^3\frac{\alpha^3-\beta^3}{2} + 3\pi_{|ijj|}\eta^i{\eta^j}^2\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} + 3\pi_{|ikk|}\eta^i{\eta^k}^2\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} + \\ +3\pi_{|jii|}\eta^j{\eta^i}^2\frac{\alpha^3-\beta^3}{2} + 3\pi_{|jkk|}\eta^j{\eta^k}^2\frac{\alpha^3-\beta^3}{2} + 3\pi_{|kii|}\eta^k{\eta^i}^2\frac{\alpha^3-\beta^3}{2} + \\ +3\pi_{|kjj|}\eta^k{\eta^j}^2\frac{\alpha^3-\beta^3}{2} + 6\pi_{|ijk|}\eta^i\eta^j\eta^k \leqslant \tilde\theta. \tag{2.31}$$

Выберем знак η^i так, чтобы в последнем выражении кубической формы сумма первого, четвертого и пятого слагаемых была неотрицательна. Знак η^j выберем так, чтобы сумма второго, шестого и седьмого слагаемых была тоже неотрицательна. Знак η^k выберем так, чтобы $\eta^i\eta^j\eta^k > 0$. Учитывая, что $\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} \geqslant 1$,$\frac{|\alpha^3-\beta^3|}{2} \leqslant \frac12\left(\frac{R_E}{r_E}-1\right) < 1/20$, из второго неравенства в (2.31) получаем $\pi_{ijk} \leqslant \tilde\theta R^3_E\,(i \neq j \neq k)$. Поменяв знаки η^i, η^j, из первого неравенства в (2.31) получаем $\pi_{ijk} \geqslant -\tilde\theta R^3_E\,(i \neq j \neq k)$.

Итак, в точке X

$$\theta = \max_{i,j,k}|h^0_{ijk}| \leqslant \tilde\theta R^3_E. \tag{2.32}$$

Вычислим теперь $\frac{d^2k_n}{ds^2}(0)$. Учитывая, что $\gamma(s)$ — геодезическая, получим

$$\frac{d^2k_n}{ds^2} = \pi_{ijk;l}\frac{dv_i}{ds}\frac{dv_j}{ds}\frac{dv_k}{ds}\frac{dv_l}{ds}.$$

Но $\pi_{ijk;l}$, вообще говоря, не симметричны по всем индексам. Симметрируя $\pi_{(ijk;l)} = \pi_{ijkl}$, получаем

$$\frac{d^2k_n}{ds^2} = \pi_{ijkl}\frac{dv_i}{ds}\frac{dv_j}{ds}\frac{dv_k}{ds}\frac{dv_l}{ds}.$$

Обозначим $\max\limits_{\bar{\eta}}|\frac{d^2k_n}{ds^2}(0)| = \tau$, где максимум берется по всем направлениям на E в точке X.

Из соотношения $|\pi_{ijkl}\eta^i\eta^j\eta^k\eta^l| \leqslant \tau$ для введенного выше единичного вектора $\bar{\eta}_1$ получаем для всех i

$$|\pi_{iiii}| \leqslant \tau R_E^4. \tag{2.33}$$

Рассматривая соотношение $|\pi_{ijkl}\eta^i\eta^j\eta^k\eta^l| \leqslant \tau$ для введенного выше единичного вектора $\bar{\eta}_2$, получаем систему неравенств для всех $i \neq j$

$$-\frac{13}{4} < \pi_{ijjj} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi_{iijj} + 3\pi_{jiii} < \frac{13}{4},$$

$$-\frac{13}{4} < 3\pi_{ijjj} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi_{iijj} + \pi_{jiii} < \frac{13}{4}.$$

Отсюда

$$|\pi_{ijjj}| \leqslant \frac{13}{8}\tau R_E^4, \;\; |\pi_{iijj}| \leqslant \frac{3}{2}\tau R_E^4 \;\; (i \neq j). \tag{2.34}$$

Возьмем для вектора $\bar{\eta}_4$ $|\eta^i| = \frac{\sqrt{2}}{2R_E}, |\eta^j| = |\eta^k| = \frac{1}{2R_E}$. Выбрав знак η^i, получим для всех $i \neq j \neq k$

$$|\pi_{iijk}| \leqslant 4\tau R_E^4. \tag{2.35}$$

Символом $(,i)$ обозначим частную производную по v_i. Из формул (2.27) и (2.28) получаем в точке X

$$\pi_{111,1} = h_{1111}^0 + 3h_{11}^0, \quad \pi_{(11i,j)} = h_{11ij}^0 + \frac{1}{2}h_{ij}^0 \; (i \neq j \neq 1),$$

$$\pi_{(111,i)} = h_{111i}^0 + \frac{3}{2}h_{1i}^0, \quad \pi_{(11i,i)} = h_{11ii}^0 + \frac{h_{11}^0 + h_{ii}^0}{2} \; (i \neq 1). \tag{2.36}$$

Из (2.29) и (2.32) с учетом $|h_{ij}^0| \leqslant R_E$ получаем в точке X

$$|g_{ij,l}| \leqslant 2nR_E^4\tilde{\theta}.$$

Собственные значения матрицы контравариантного метрического тензора $\left(g^{kl}\right)$ заключены между $\frac{1}{R_E^2}$ и $\frac{1}{r_E^2}$, значит $|g^{kl}| \leqslant \frac{1}{r_E^2}$. Следовательно, для коэффициентов Кристоффеля поверхности E в точке X имеет место оценка

$$|\Gamma_{ij}^k| \leqslant \frac{3n^2R_E^4\tilde{\theta}}{r_E^2}.$$

Тогда

$$|\pi_{ijk;l} - \pi_{ijk,l}| \leqslant \frac{9n^3R_E^7\tilde{\theta}^2}{r_E^2},$$

$$|\pi_{(ijk;l)} - \pi_{(ijk,l)}| \leqslant \frac{9n^3 R_E^7 \tilde{\theta}^2}{r_E^2}.$$

Из (2.5), (2.33) и (2.36) получаем

$$|\varkappa_{11}| = |h^0_{1111} + 3h^0_{11}| = |\pi_{111,1}| \leqslant |\pi_{111;1}| + \frac{9n^3 R_E^7 \tilde{\theta}^2}{r_E^2} \leqslant \tau R_E^4 + \frac{9n^3 R_E^7 \tilde{\theta}^2}{r_E^2}.$$

Так как $|h^0_{1i}| \leqslant \sqrt{R_E^2 - r_E^2}$ $(i \neq 1)$, то из (2.5), (2.34) и (2.36) получим

$$|\varkappa_{i1}| = |\pi_{(111,i)} + \frac{1}{2}h^0_{1i}| \leqslant |\pi_{(111;i)}| + \frac{9n^3 R_E^7 \tilde{\theta}^2}{r_E^2} + \frac{1}{2}\sqrt{R_E^2 - r_E^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{13}{8}\tau R_E^4 + \frac{9n^3 R_E^7 \tilde{\theta}^2}{r_E^2} + \frac{1}{2}\sqrt{R_E^2 - r_E^2} \qquad (i \neq 1).$$

Аналогично из (2.5), (2.35) и (2.36) получаем

$$|\varkappa_{ij}| = |\pi_{(11i,j)} + \frac{1}{2}h^0_{ij}| \leqslant 4\tau R_E^4 + \frac{9n^3 R_E^7 \tilde{\theta}^2}{r_E^2} + \frac{1}{2}\sqrt{R_E^2 - r_E^2} \qquad (i \neq j \neq 1).$$

Далее из (2.5), (2.34) и(2.36) получаем

$$|\varkappa_{ii}| = |\pi_{(11i,i)} + \frac{1}{2}h^0_{ii} - \frac{1}{2}h^0_{11}| \leqslant \frac{3}{2}\tau R_E^4 + \frac{9n^3 R_E^7 \tilde{\theta}^2}{r_E^2} + \frac{1}{2}(R_E - r_E) \qquad (i \neq 1).$$

Таким образом, для $\varkappa = \max\limits_{i,j} |\varkappa_{ij}|$ получаем оценку

$$\varkappa \leqslant 4\tau R_E^4 + \frac{9n^3 R_E^7 \tilde{\theta}^2}{r_E^2} + \frac{1}{2}\sqrt{R_E^2 - r_E^2}.$$

Сформулируем теперь доказанную теорему.

Пусть $\gamma(s)$ — геодезическая на поверхности E, проходящая через точку $\gamma(0)$ с внешней нормалью ν в направлении η. Пусть $k_n(s)$ — нормальная кривизна этой геодезической. Обозначим

$$\tilde{\theta}(\nu) = \max_{\eta} \frac{dk_n}{ds}(0), \quad \tau(\nu) = \max_{\eta} |\frac{d^2 k_n}{ds^2}(0)|,$$

где максимумы берутся по всем направлениям в точке $\gamma(0)$. Введем функции

$$\theta(\nu) = \tilde{\theta}(\nu) R_E^3(\nu),$$

$$\varkappa(\nu) = 4\tau(\nu) R_E^4(\nu) + \frac{9n^3 R_E^7(\nu) \tilde{\theta}^2(\nu)}{r_E^2(\nu)} + \frac{1}{2}\sqrt{R_E^2(\nu) - r_E^2(\nu)},$$

где $R_E(\nu)$ — максимальный, а $r_E(\nu)$ — минимальный радиусы нормальной кривизны поверхности E в точке $\gamma(0)$. Обозначим

$$A(\nu) = \frac{R_E^{n-k+2} K_E^{1/k}}{r_E^{n-k+1}},$$

$$B(\nu)=\frac{1}{k}\left(\frac{2n^2R_E^{2n-2}\theta^2}{K_Er_E^{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\delta_0^{2(n-k)}-\delta_0^{2(n-k)}\right)}+2(n-k)(n-k-1)\frac{\theta^2K_E}{r_E^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(n-k)^2\varkappa R_E^{n-k-1}}{r_E^{n-k}}+\frac{(k-1)(n-k)^2\theta K_E}{kr_E}\left(2|\varphi_k'|+\frac{(n-k)^2\theta\varphi_kK_E}{kr_E}\right)\right),$$

где все величины в правых частях считаются в точке $\gamma(0)$ или ν. Доказана следующая

Теорема. Пусть S и E — регулярные замкнутые выпуклые, удовлетворяющие условиям (2.18) и (2.19) поверхности в евклидовом пространстве E^{n+1}. Пусть $\varphi(\nu)=\sigma_k\left(\tilde R_1(\nu),\dots,\tilde R_n(\nu)\right)$ —k-я элементарная симметрическая функция условных радиусов кривизны поверхности S относительно E. Тогда для радиусов нормальной кривизны поверхности S справедлива оценка

$$R\leqslant\max_{\nu,\eta}\frac{1}{A}\left[\varphi_k(1+B)-\varphi_k''\right],\quad \text{где}\quad \varphi_k=\left(\frac{\varphi}{K_EC_n^k}\right)^{1/k},$$

а дифференцирование выполняется по длине дуги большого круга на единичной сфере в точке ν в направлении η. Максимум берется по всем точкам сферы и всем направлениям в этих точках.

Полученная оценка является точной: если поверхности S и E являются единичными сферами, то $A(\nu)\equiv 1$, $B(\nu)\equiv 0$, и теорема дает $R\leqslant 1$.

Литература

[1] Погорелов, А.В. Многомерная проблема Минковского / А.В. Погорелов. — М.: Наука, 1975. — 96 с.

[2] Александров, А.Д. Смешанные дискриминанты и смешанные объемы / А.Д. Александров // Матем. сб. — 1938. — Т. 3. — № 2. — С. 227-251.

[3] Каган, В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении / В.Ф. Каган. — М.; Л.: ОГИЗ, 1948. — Ч. 2 — 407 с.

[4] Dubnow, J. Uber Tensoren mit nichtskalaren Komponenten / J. Dubnow // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. — 1933. — Т. 1. — С. 196-212.

Поступила в редакцию 23/*II*/2009;
в окончательном варианте — 23/*II*/2009.

PRECISE ESTIMATE OF RADIUS OF NORMAL CURVATURE OF CLOSED CONVEX SURFACE

 V.N. Kokarev[3]

A precise a priori estimate of radiuses of normal curvature of closed convex surface with given elementary symmetric function of relative radiuses curvature is obtained.

Key words and phrases: a priori estimates, relative curvature radius.

Paper received 23/II/2009.
Paper accepted 23/II/2009.

[3]Kokarev Victor Nikolaevich (ko1949@yandex.ru), chair of Algebra and geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.