УДК 517.95

ДВЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2011 Л.С. Пулькина, М.В. Стригун[1]

В работе исследуются смешанные задачи для гиперболического уравнения с нелинейными граничными условиями. Доказано существование единственного обобщенного решения поставленных задач.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелинейные граничные условия, обобщенное решение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x,t) : \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T\}$ гиперболическое уравнение

$$Lu = f(x,t), \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u,$$

и поставим для него следующие задачи.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Q_T, удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{3}$$

и граничным условиям

$$u_x(0,t) = 0, \tag{4}$$

$$a(l,t)u_x(l,t) + |u(l,t)|^p u(l,t) = 0. \tag{5}$$

Задача 2. Найти решение уравнения (1) в области Q_T, удовлетворяющее начальным данным (2), (3), граничному условию (4) и нелинейному условию

$$a(l,t)u_x(l,t) + |u_t(l,t)|^p u_t(l,t) = 0. \tag{6}$$

Заметим, что условия такого вида могут возникать, например, в задачах о продольных колебаниях пружины при упругом закреплении концов, не подчиняющемся закону Гука [1]. В книге [2] рассматривается задача с нелинейностью

[1]Пулькина Людмила Степановна (louise@samdiff.ru), Стригун Мария Владимировна (marii@samaracom.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

аналогичного вида, входящей в гиперболическое уравнение, но наличие нелинейности в граничном условии не позволяет применить разработанные там методы исследования.

2. Разрешимость задачи 1

Введем обозначения

$$\Gamma_l = \{(x,t): \ x = l, \quad t \in (0,T)\},$$

$$W(Q_T) = \{u(x,t): \ u(x,t) \in W_2^1(Q_T) \bigcap L_{p+2}(\Gamma_l)\},$$

$$\|u\|_{W(Q_T)} = \|u\|_{W_2^1(Q_T)} + \|u\|_{L_{p+2}(\Gamma_l)},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{\upsilon(x,t): \quad \upsilon(x,t) \in W(Q_T), \quad \upsilon(x,T) = 0\}.$$

Обобщенным решением задачи (1)–(5) будем называть функцию $u(x,t) \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию (2) и тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (-u_t\upsilon_t + au_x\upsilon_x + cu\upsilon)dxdt + \int\limits_0^T |u(l,t)|^p u(l,t)\upsilon(l,t)dt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} f(x,t)\upsilon(x,t)dxdt + \int\limits_0^l \psi(x)\upsilon(x,0)dx \tag{7}$$

для любой функции $\upsilon(x,t) \in \hat{W}(Q_T)$.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия: $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $c(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $a(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $a_t(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $\varphi(x) \in W_2^1(0,l) \bigcap L_{p+2}(0,l)$, $\psi(x) \in L_2(0,l)$, $\varphi'(0) = 0$ и $a(l,t)\varphi' + |\varphi(l)|^p\varphi(l) = 0$, тогда для любого $p > 0$ существует единственное решение задачи (1)–(5).

Доказательство единственности решения

Предположим, что задача (1)-(5) имеет два решения: $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$. Тогда их разность $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$-\int\limits_{Q_T} u_t\upsilon_t dxdt + \int\limits_{Q_T} au_x\upsilon_x dxdt + \int\limits_{Q_T} cu\upsilon dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T (|u_1(l,t)|^p u_1(l,t) - |u_2(l,t)|^p u_2(l,t))\upsilon(l,t)dt = 0. \tag{8}$$

Выберем $\upsilon(x,t)$ специальным образом:

$$\upsilon(x,t) = \begin{cases} -\int\limits_t^\tau u(x,\eta)d\eta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Проинтегрировав по частям первые два слагаемых (8), получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l u^2(x,\tau)dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^l a(x,0)\upsilon_x^2(x,0)dx -$$

$$-\int_0^\tau (|u_1(l,t)|^p u_1(l,t) - |u_2(l,t)|^p u_2(l,t))\upsilon(l,t)dt = \tag{9}$$

$$= \int_{Q_\tau} c\upsilon_t \upsilon dxdt - \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} a_t \upsilon_x^2 dxdt.$$

Рассмотрим третье слагаемое тождества (9). Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial u}|u|^p u = (1+p)|u|^p \geqslant 0.$$

Тогда

$$-\int_0^T (|u_1(l,t)|^p u_1(l,t) - |u_2(l,t)|^p u_2(l,t))\upsilon(l,t)dt =$$

$$= \int_0^\tau u(x,\eta)\int_0^\eta (|u_1|^p u_1 - |u_2|^p u_2)dtd\eta \geqslant 0.$$

Рассмотрим теперь правую часть (9). Из условий теоремы следует, что существуют числа $c_0 > 0$ и $a_1 > 0$ такие, что $\max\limits_{\overline{Q_T}}|c(x,t)| \leqslant c_0$, $\max\limits_{\overline{Q_T}}|a_t(x,t)| \leqslant a_1$. Так как уравнение (1) гиперболическое, существует $a_0 > 0$ такое, что $a(x,t) > a_0$ $\forall (x,t) \in Q_T$. Введем функцию

$$\zeta(x,t) = -\int_0^t u_x(x,\eta)d\eta.$$

Тогда

$$\upsilon_x(x,t) = \zeta(x,\tau) - \zeta(x,t),$$
$$\upsilon_x(x,0) = \zeta(x,\tau).$$

Равенство (9) примет вид:

$$\frac{1}{2}\int_0^l (u^2(x,\tau) + a(x,0)\zeta^2(x,\tau))dx + \int_0^\tau u(x,\eta)\int_0^\eta (|u_1|^p u_1 - |u_2|^p u_2)dtd\eta =$$

$$= \int_{Q_\tau} c\upsilon_t\upsilon dxdt - \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} a_t(\zeta(x,\tau) - \zeta(x,t))^2 dxdt.$$

Первое слагаемое правой части оценим с помощью неравенства Коши:

$$|\int_{Q_\tau} c\upsilon_t\upsilon dxdt| \leqslant \frac{c_0}{2}\int_{Q_\tau}(\upsilon^2 + \upsilon_t^2)dxdt$$

и заметим, что $\int\limits_0^\tau \upsilon^2(x,t)dt \leqslant \tau^2\int\limits_0^\tau u^2(x,t)dt$ почти всюду. Тогда, продолжая оценку, получим

$$\int_0^l (u^2(x,\tau) + a_0\zeta^2(x,\tau))dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_\tau} (c_0(1+\tau^2)u^2 + 2a_1\zeta^2(x,t))dxdt + 2a_1\tau \int\limits_0^l \zeta^2(x,\tau)dx.$$

Пусть $c = \max\{2a_1, c_0(1+T^2)\}$. Тогда

$$\int\limits_0^l (u^2(x,\tau) + a_0\zeta^2(x,\tau))dx \leqslant c \int\limits_{Q_\tau} (u^2 + \zeta^2(x,t))dxdt + 2a_1\tau \int\limits_0^l \zeta^2(x,\tau)dx.$$

Пользуясь произвольностью τ, выберем его так, чтобы $a_0 - 2a_1\tau \geqslant \frac{a_0}{2}$. Тогда для $\tau \in [0, \frac{a_0}{4a_1}]$ при $\widetilde{c} = \frac{c}{\min\{1, a_0 - 2a_1\tau\}}$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^l (u^2(x,\tau) + \zeta^2(x,\tau))dx \leqslant \widetilde{c} \int\limits_{Q_\tau} (u^2 + \zeta^2(x,t))dxdt,$$

применив к которому лемму Гронуолла, убедимся в том, что $u(x,t) = 0$ в Q_t, где $t \in [0, \frac{a_0}{4a_1}]$.

На следующем шаге покажем, что $u(x,t) = 0$ для $t \in [\frac{a_0}{4a_1}, \frac{a_0}{2a_1}]$, а затем продолжим этот процесс, что и приведет к доказательству утверждения единственности решения, если оно существует. Поэтому переходим к доказательству существования.

Доказательство существования решения

Рассмотрим последовательность функций $\{X_i(x)\}$, $X_i(x) \in C^2[0,l]$, $X_i'(0) = 0$, образующих линейно независимую полную ортонормированную систему в $W_2^1(0,l) \bigcap L_{p+2}(0,l)$.

Будем искать приближенное решение задачи (1)–(5) в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{i=1}^m d_i(t)X_i(x). \tag{10}$$

Найдем $d_i(t)$ из соотношений

$$\int\limits_0^l (u_{tt}^m X_i + a u_x^m X_i' + c u^m X_i)dx + |u^m(l,t)|^p u^m(l,t)X_i(l) =$$

$$= \int\limits_0^l f(x,t)X_i(x)dx. \tag{11}$$

Эти соотношения дополним начальными условиями

$$d_i(0) = \alpha_i, \quad d_i'(0) = \beta_i, \tag{12}$$

где α_i, β_i — коэффициенты конечных сумм

$$\varphi^m(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t)X_i(x), \quad \psi^m(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i(t)X_i(x),$$

аппроксимирующих при $m \longrightarrow \infty$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно в пространствах $W_2^1(0,l)$ и $L_2(0,l)$:

$$\varphi^m(x) \longrightarrow \varphi(x), \quad \psi^m(x) \longrightarrow \psi(x), \quad m \longrightarrow \infty. \tag{13}$$

Соотношения (11)–(12) представляют собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая разрешима на отрезке $[0, t_m]$. Для того чтобы убедиться в существование решения на $[0, T]$, получим априорную оценку.

Умножим (11) на $d_i'(t)$, просуммируем по i от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ. Временно не будем писать индекс m. Имеем:

$$\int\limits_{Q_\tau} (u_{tt}u_t + au_x u_{xt} + cuu_t)dxdt + \int\limits_0^\tau |u(l,t)|^p u(l,t)u_t(l,t)dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} fu_t dxdt. \tag{14}$$

Первые два слагаемых преобразуем стандартным образом, интегрируя по частям [3]. Рассмотрим четвертое слагаемое. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}(|u(l,t)|^{p+2}) = (p+2)|u(l,t)|^p u(l,t)u_t(l,t).$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\int\limits_0^\tau |u(l,t)|^p u(l,t)u_t(l,t)dt = \frac{1}{p+2}|u(l,\tau)|^{p+2} - \frac{1}{p+2}|u(l,0)|^{p+2}.$$

Учитывая это представление, имеем:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l (u_t^2(x,\tau) + a(x,\tau)u_x^2(x,\tau))dx + \frac{1}{p+2}|u(l,\tau)|^{p+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l ((u_t(x,0))^2 + a(x,0)(u_x(x,0))^2)dx + \frac{1}{p+2}|u(l,0)|^{p+2} + \tag{15}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} a_t u_x^2 dxdt - \int\limits_{Q_\tau} cuu_t dxdt + \int\limits_{Q_\tau} fu_t dxdt.$$

Рассмотрим правую часть равенства (14). Применяя неравенство Коши, получим оценку двух слагаемых:

$$|\int\limits_{Q_\tau} cu_t u dxdt| \leqslant \frac{c_0}{2}\int\limits_{Q_\tau} (u^2 + u_t^2)dxdt.$$

$$|\int\limits_{Q_\tau} cu_t f dxdt| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} (f^2 + u_t^2)dxdt.$$

Из представления

$$u(x,\tau) = \int\limits_0^\tau u_t(x,t)dt + u(x,0)$$

вытекает неравенство

$$\int\limits_0^l u^2(x,\tau)dx \leqslant 2\tau\int\limits_{Q_\tau} u_t^2 dxdt + 2\int\limits_0^l u^2(x,0)dx.$$

Таким образом, получаем оценку:

$$\int\limits_0^l (u^2(x,\tau) + u_t^2(x,\tau) + a(x,\tau)u_x^2(x,\tau))dx + \frac{2}{p+2}|u(l,\tau)|^{p+2} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^l (u_t^2(x,0) + a(x,0)u_x^2(x,0) + 2u^2(x,0))dx + \frac{2}{p+2}|u(l,0)|^{p+2} + \int\limits_{Q_\tau} a_t u_x^2 dxdt +$$

$$+c_0 \int\limits_{Q_\tau} u^2 dxdt + (c_0 + 1 + 2T) \int\limits_{Q_\tau} u_t^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt.$$

Заметим, что из (12), (13), условий теоремы и теорем вложения [4] следует, что

$$\int\limits_0^l (u_t^2(x,0) + a(x,0)u_x^2(x,0) + 2u^2(x,0))dx + \frac{2}{p+2}|u(l,0)|^{p+2} + \int\limits_{Q_\tau} f^2 dxdt \leqslant K.$$

Имеем:

$$\int\limits_0^l (u^2(x,\tau) + u_t^2(x,\tau) + u_x^2(x,\tau))dx + P|u(l,\tau)|^{p+2} \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_{Q_\tau} (u^2 + u_x^2 + u_t^2)dxdt + \widetilde{K}, \qquad (16)$$

где $P = \frac{2}{\min\{1,a_0\}(p+2)}$, $M = \frac{\max\{a_1, c_0+1+2T\}}{\min\{1,a_0\}}$, $\widetilde{K} = \frac{K}{\min\{1,a_0\}}$, причем M и $\widetilde{K}$ не зависят от m.

Из (16), в частности, следует неравенство

$$\int\limits_0^l (u^2(x,\tau) + u_t^2(x,\tau) + u_x^2(x,\tau))dx \leqslant M \int\limits_{Q_\tau} (u^2 + u_x^2 + u_t^2)dxdt + \widetilde{K},$$

применив к которому лемму Гронуолла и возвращая назад индекс m, получим

$$\|u^m\|_{W_2^1(Q_T)} \leqslant N_1. \qquad (17)$$

Возвращаясь к (16) и учитывая (17), получим еще одно неравенство:

$$|u(l,\tau)|^{p+2} \leqslant N_2, \qquad (18)$$

откуда следует, что $u(l,t) \in L_{p+2}(0,T)$. Полученные оценки (17) и (18), в которых N_i не зависит от m, означают, что

$$\|u^m(x,t)\|_{W(Q_T)} \leqslant N. \qquad (19)$$

Оценка (19) гарантирует существование решения задачи Коши (11), (12) на всем промежутке $[0,T]$, что, в свою очередь, означает, что последовательность приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ построена и обладает свойствами: u^m при $m \longrightarrow \infty$ ограничена в $W_2^1(Q_T) \bigcap L_{p+2}(\Gamma_l)$, и u_t^m при $m \longrightarrow \infty$ ограничена в $L_2(Q_T)$.

Эти свойства позволяют выделить из построенной последовательности $\{u^m(x,t)\}$ подпоследовательность $\{u^\mu(x,t)\}$ такую, что $u^\mu \longrightarrow u$ слабо в $W_2^1(Q_T) \bigcap L_{p+2}(\Gamma_l)$, и $u_t^\mu \longrightarrow u_t$ слабо в $L_2(Q_T)$.

Заметим, что в силу (17)последовательность u^m ограничена в $W_2^1(Q_T)$. В силу теоремы Реллиха — Кондрашова, вложение $W_2^1(Q_T)$ в $L_2(Q_T)$ компактно. Это означает, что последовательность u^μ можно выбрать так, что $u^\mu \longrightarrow u$ в норме L_2, а значит и сходящейся почти всюду [5, с. 363].

Из (18) следует, что $|u^\mu(l,t)|^p u^\mu(l,t) \in L_q(0,T)$, $q = \frac{p+2}{p+1} > 1$ и сходится почти всюду в $(0,T)$.

Теперь заметим, что из ограниченности последовательности $|u^m|^p u^m$ в $L_q(Q_T)$ вытекает слабая сходимость в этом пространстве подпоследовательности $|u^\mu|^p u^\mu$ к некоторой функции $\chi(t)$.

В силу леммы, доказанной в [2, с. 25], $\chi(t) = |u|^p u$.

Приведенные рассуждения позволяют перейти к пределу в (11). Но сначала умножим каждое из равенств (11) на $c_j(t) \in C[0,T]$, причем такие, что $c_j(T) = 0$, просуммируем по j от 1 до μ , затем проинтегрируем. После элементарных преобразований получим

$$\int\limits_{Q_T} (-u_t^\mu \eta_t + a u_x^\mu \eta_x + c u^\mu \eta) dxdt + \int\limits_0^T |u^\mu(l,t)|^p u^\mu(l,t)\eta(l,t)dt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} f\eta dxdt + \int\limits_0^l u_t^\mu(x,0)\eta(x,0)dx, \tag{20}$$

где $\eta(x,t) = \sum_{j=1}^{\mu} c_j(t) X_j(x)$.

Учитывая полученные включения и сходимости, перейдем в (20) к пределу при $\mu \longrightarrow \infty$ и получим (7) для $\upsilon = \eta$. Так как множество всех функций $\eta(x,t)$ плотно в $W_2^1(Q_T) \bigcap L_{p+2}(\Gamma_l)$, то предельное соотношение выполняется для всех $\upsilon \in \hat{W}(Q_T)$.

3. Разрешимость задачи 2

Обозначим $\Gamma_l = \{(x,t) : \quad x = l, \quad t \in (0,T)\}$,

$$U(Q_T) = \{u : \quad u \in W_2^1(Q_T), \quad u_t \in W_2^1(Q_T) \bigcap L_{p+2}(\Gamma_l)\},$$

$$\|u\|_{U(Q_T)} = \|u\|_{W_2^1(Q_T)} + \|u_{tt}\|_{L_2(Q_T)} + \|u\|_{L_{p+2}(\Gamma_l)},$$

$$V(0,l) = \{\upsilon(x) : \quad \upsilon \in W_2^1(0,l) \bigcap L_{p+2}(0,l)\},$$

$$\hat{C}^1(0,T) = \{z(t) : \quad z(t) \in C^1(0,T), \quad z(T) = 0\}.$$

Будем рассматривать задачу 2 с нулевыми начальными условиями. Это вызвано лишь желанием упростить некоторые выкладки и не нарушает общности.

Обобщенным решением задачи 2 будем называть функцию $u(x,t) \in U(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$\int\limits_0^T (\int\limits_0^l (u_{tt}\upsilon + a u_x \upsilon_x + c u \upsilon)dx + |u_t(l,t)|^p u_t(l,t)\upsilon(l,t))\vartheta(t)dt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} f(x,t)\upsilon(x)\vartheta(t)dxdt \tag{21}$$

для любой $\upsilon(x) \in V(0,l)$ и любой $\vartheta(t) \in \hat{C}^1(0,T)$.

Теорема 2. Если $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q_T)$, $c(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $c_t(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $a(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $a_t(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, то для любого $p > 0$ существует единственное решение задачи 2.

Доказательство единственности решения

Предположим, что задача 2 имеет два решения: $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$. Тогда их разность $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^T (\int_0^l (u_{tt}v + au_x v_x + cuv)dx +$$

$$+(|u_{1t}(l,t)|^p u_{1t}(l,t) - |u_{2t}(l,t)|^p u_{2t}(l,t))v(l,t))\vartheta(t)dt = 0. \quad (22)$$

Так как (22) выполняется для любой функции $\vartheta(t)$, то для произвольного фиксированного $\tau \in (0,T)$

$$\int_0^l (u_{tt}v + au_x v_x + cuv)dx +$$

$$+(|u_{1t}(l,t)|^p u_{1t}(l,t) - |u_{2t}(l,t)|^p u_{2t}(l,t))v(l,t) = 0. \quad (23)$$

Положим в (23) $v(x,t) = u_t(x,t)$ и заметим, что $u_{tt}u_t = \frac{1}{2}(u_t^2)_t$, $au_x u_{xt} = \frac{1}{2}(au_x^2)_t - - \frac{1}{2}a_t u_x^2$, и поэтому (23) можно записать так:

$$(\int_0^l ((u_t^2)_t + (au_x^2)_t)dx)_t + \int_0^l cuu_t dx + (|u_{1t}|^p u_{1t} - |u_{2t}|^p u_{2t}(l,t))u_t|_{x=l} = \frac{1}{2}\int_0^l a_t u_x^2 dx.$$

Проинтегрируем это равенство по t от 0 до τ:

$$\frac{1}{2}\int_0^l ((u_t^2)_t + (au_x^2)_t)dx + \int_0^\tau (|u_{1t}|^p u_{1t} - |u_{2t}|^p u_{2t}(l,t))\, u_t\Big|_{x=l} = -\int_{Q_\tau} cuu_t dx + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} a_t u_x^2 dx.$$

Принимая во внимание монотонность $|u_t|^p u_t$ и делая оценку правой части полученного равенства, как и при доказательстве теоремы 1, получим, что $u = 0$ в Q_T.

Доказательство существования решения

Будем искать приближенное решение задачи 2 в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{j=1}^m d_j(t)X_j(x), \quad (24)$$

где $X_j(x) \in C^2[0,l]$, $X_j'(0) = 0$ и образуют линейно независимую полную ортонормированную систему в $W_2^1(0,l) \bigcap L_{p+2}(0,l)$.

Из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m X_j + au_x^m X_j' + cu^m X_j)dx + |u_t^m(l,t)|^p u_t^m(l,t)X_j(l) = \int_0^l fX_j dx, \quad (25)$$

образующих вместе с начальными условиями $d_j(0) = d_j'(0) = 0$ задачу Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая разрешима на отрезке $[0, t_m]$, найдем $d_j(t)$. Покажем, что решение системы существует и на $[0,T]$. Для этого получим априорную оценку.

Умножим (25) на $d_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ:

$$\int\limits_{Q_\tau} (u^m_{tt}u^m_t + au^m_x u^m_{xt} + cu^m u^m_t)dxdt + \int\limits_0^\tau |u^m_t(l,t)|^p (u^m_t(l,t))^2 dt = \int\limits_{Q_\tau} f u^m_t dxdt.$$

Стандартные преобразования приводят к неравенствам

$$\|u^m\|_{W^1_2(Q_T)} \leqslant N_1, \tag{26}$$

$$\|u^m\|_{L_{p+2}(\Gamma_l)} \leqslant N_2. \tag{27}$$

В данном случае этих оценок недостаточно.

Продифференцируем (25) по t, затем умножим на $d_j''(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ. Получим:

$$\int\limits_{Q_\tau} (u^m_{ttt}u^m_{tt} + au^m_{xt}u^m_{xtt} + cu^m_t u^m_{tt} + a_t u^m_x u^m_{xtt} + c_t u^m u^m_{tt})dxdt +$$

$$+ \int\limits_0^\tau (1+p)|u^m_t(l,t)|^p (u^m_{tt}(l,t))^2 dt = \int\limits_{Q_\tau} f_t u^m_{tt} dxdt.$$

Преобразование первого интеграла слева приводит к равенству:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l ((u^m_{tt}(x,\tau))^2 + a(u^m_{xt}(x,\tau))^2 dx + \int\limits_0^\tau (1+p)|u^m_t(l,t)|^p (u^m_{tt}(l,t))^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} 3a_t(u^m_{xt})^2 + \int\limits_{Q_\tau} a_{tt}u^m_x u^m_{xt} - cu^m_t u^m_{tt} - c_t u^m u^m_{tt})dxdt - \int\limits_0^l a_t u^m_x u^m_{xt}\Big|_0^\tau dx + \tag{28}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^l ((u^m_{tt}(x,0))^2 + a(u^m_{xt}(x,0))^2 dx + \int\limits_{Q_\tau} f_t u^m_{tt} dxdt.$$

Приступим к оценке правой части (28). Прежде всего заметим, что $u^m_{tt}(x,0)$ не может быть непосредственно оценено через начальные условия. Поэтому докажем ограниченность $\int\limits_0^l ((u^m_{tt}(x,0))^2 dx$ следующим образом: умножим (25) на $d_j''(0)$, затем в полученном равенстве положим $t=0$. Тогда

$$\int\limits_0^l ((u^m_{tt}(x,0))^2 + a(x,0)u^m_x(x,0)u^m_{tt}(x,0) + c(x,0)u^m(x,0)u^m_{tt}(x,0))dx +$$

$$+|u^m_t(l,0)|^p u^m_t(l,0)u_{tt}(l,0) = \int\limits_0^l f(x,0)u_{tt}(x,0)dx,$$

откуда, в силу начальных условий,

$$\int\limits_0^l (u^m_{tt}(x,0))^2 dx = \int\limits_0^l f(x,0)u_{tt}(x,0)dx.$$

Из этого равенства следует, что

$$\|u_{tt}^m(x,0)\|_{L_2(0,l)} \leqslant \|f(x,0)\|_{L_2(0,l)}.$$

С учетом этой оценки, применяя неравенство Коши и лемму Гронуолла, получим:

$$\|u_{tt}^m\|_{L_2(Q_T)} \leqslant N_3. \tag{29}$$

Оценки (26), (27), (29) гарантируют существование решения задачи Коши на всем отрезке $[0, T]$, а значит, последовательность приближенных решений задачи 2 построена. Кроме того, эти оценки и рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 1, позволяют обосновать возможность выделения подпоследовательности $\{u^\mu(x,t)\}$ из построенной последовательности приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$, дающей возможность перехода к пределу в (25).

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

[2] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.

[3] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

[4] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 333 с.

[5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Поступила в редакцию $10/X/2010$;
в окончательном варианте — $10/X/2010$.

TWO INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH NONLINEAL BOUNDARY CONDITIONS FOR ONE-DIMENSION HYPERBOLIC EQUATION

 L.S. Pulkina, M.V. Strigun[2]

In this paper, the initial-boundary value problems for hyperbolic equation with nonlinear boundary conditions are considered. Existence and uniqueness of generalized solution are proved.

Key words: hyperbolic equation, nonlinear boundary conditions, generalized solution.

Paper received $10/X/2010$.
Paper accepted $10/X/2010$.

[2]Pulkina Ludmila Stepanovna (`louise@samdiff.ru`), Strigun Maria Vladimirovna (`marii@samaracom.ru`), the Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.