УДК 519.63

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФИНИТНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВЯЗКИХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

© 2011 Г.Ю. Северин[1]

Описан алгоритм построения системы ортогональных финитных функций для начальной задачи для нелинейного пространственного уравнения вязких трансзвуковых течений. Результат проектирования на соответствующее конечномерное подпространство — система обыкновенных дифференциальных уравнений с диагональной матрицей.

Ключевые слова: метод Галеркина, ортогональные финитные функции Леонтьева, условие Стренга — Фикса.

Введение

В этой работе предлагается непосредственное построение двух систем ортогональных финитных функций вида $\left\{f\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right\}_{i=-\infty}^{\infty}$, $\left\{\varphi\left(\frac{y-y_j}{h}\right)\right\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — сдвигов функций $f(x/h)$ и $\varphi(y/h)$, специально адаптированных для вязкого трансзвукового уравнения, так что после проектирования на соответствующее тестовое пространство матрица Грамма диагональная. На этом примере показано, как строить такие системы ортогональных финитных функций (ОФФ) для решения достаточно широкого класса начальных задач с частными производными. Описанная ниже конструкция ОФФ имеет два существенных отличия от ОФФ В.Л. Леонтьева [5]. Построенные в этой статье функции f и φ удовлетворяют не одному условию ортогональности сдвигов $\langle f(x), f(x-1)\rangle = 0$, а нескольким условиям ортогональности, благодаря чему при проектировании на тестовое пространство исходного нелинейного уравнения нейтрализуется нелинейность $u_x u_{xx}$. Платой за несколько дополнительных условий ортогональности выступает замена точного условия Стренга — Фикса на приближенное.

1. Постановка задачи

Многие нелинейные волновые процессы достаточно точно описывают вязкое трансзвуковое уравнение [2]:

[1]Северин Григорий Юрьевич (akg.77@mail.ru), кафедра математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета, 394006, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = b\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H(x, y, z, t), \tag{1}$$

где $a > 0$, $(x, y, z, t) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$; H —кусочно непрерывна по t, дважды непрерывно дифференцируема по x и один раз по y и z. Пусть неизвестная функция $u(x, y, z, t)$ удовлетворяет начальному условию:

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \tag{2}$$

где u_0 — непрерывно дифференцируема.

2. Системы ортогональных финитных функций для уравнения вязких трансзвуковых течений

Пусть h фиксированное достаточно малое число — шаг равномерной сетки с узлами $\{x_m\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{y_n\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{z_p\}_{-\infty}^{\infty}$. Определим функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ с носителями $[-1, 1]$, порождающие системы функций $\left\{f\left(\frac{x-x_m}{h}\right)\right\}_m$, $\left\{\varphi\left(\frac{y-y_n}{h}\right)\right\}_n$, на основе которых методом Галеркина будет строиться приближенное решение задачи (1), (2). Пусть

$$f(x) = (a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + ... + a_1 x + 1)up(x). \tag{3}$$

Здесь $up(x)$ — атомарная функция В.Л. Рвачева. Отметим, что $up(x)$ четная, неотрицательная, бесконечно дифференцируемая функция с носителем $[-1, 1]$. Ее график имеет характерный колоколообразный вид. Справедлива формула $up'(x) = 2up(2x-1) - 2up(2x+1)$. В [7] приведены явные формулы значений атомарной функции в двоично-рациональных точках отрезка $[0, 1]$. Неизвестные коэффициенты $a_1, ..., a_l$ определим далее из условий ортогональности и Стренга — Фикса. Пусть функция f удовлетворяет следующим условиям ортогональности в смысле $L_2(\mathbb{R})$:

$$\langle f(x), f(x-1)\rangle = 0, \tag{4}$$

$$\langle f'''(x-1), f'(x)\rangle = 0, \tag{5}$$

$$\langle f'(x), f(x-1)\rangle = 0, \tag{6}$$

$$\langle f'(x-1)f''(x-1), f'(x)\rangle = 0, \tag{7}$$

$$\langle f'(x)f''(x-1), f'(x)\rangle = 0. \tag{8}$$

Необходимо, чтобы система сдвигов $\left\{f\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right\}_{i=-\infty}^{\infty}$ обеспечивала достаточную точность аппроксимации. Известно [6; 8], что если функция $f(x)$ с носителем $[-1, 1]$ принадлежит W_2^{p+1}, то эквивалентны следующие условия:

1) $\hat{f}(0) \neq 0$, но $\hat{f}$ имеет нули порядка p в других точках, кратных 2π, т. е.

$$D^\alpha \hat{f}(2\pi j) = 0, \quad 0 \neq \ \in \mathbb{Z}, \quad |\alpha| \leqslant p;$$

2) если $|\alpha| \leqslant p$, то

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^\alpha f(t-j)$$

является полиномом от $t_1, ..., t_k$ с главным членом ct^α, $\quad c \neq 0$;

3) для каждой функции $u(x) \in W_2^{p+1}(\mathbb{R})$ существуют такие коэффициенты w_j, что при $h \longrightarrow 0+$ выполнены неравенства

$$\|u - \sum_j w_j f_j\|_{W_2^S} \leqslant c_s h^{p+1-s}\|u\|_{W_2^{P+1}}, \qquad \sum_j |w_j|^2 \leqslant c\|u\|^2_{L_2}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant p,$$

где постоянные c_s и c не зависят от $u(x)$ и от h. Показатель $p+1-s$ является наилучшим для рассматриваемых классов W_2^s и W_2^{p+1}.

Для точности порядка h в $L_2(\mathbb{R})$ необходимо и достаточно условие разбиения единицы:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x-j) \equiv 1.$$

В конструкции (3) условие $\forall x \in [0,1]: \quad f(x)+f(x-1) \equiv 1$, вообще говоря, невыполнимо.

Потребуем, чтобы финитная функция $f(x)$ удовлетворяла неточному условию типа Стренга — Фикса на отрезке $[0,1]$:

$$f(x)+f(x-1) \approx 1 \qquad \forall x \in [0,1].$$

Пусть

$$f(x^i)+f(x^i-1) = 1, \quad i = 1,...,q, \tag{9}$$

где $x^1,...,x^q$ — сетка (необязательно равномерная) на отрезке $[0,1]$.

Итак, объединяя условия ортогональности (4)–(8) и приближенное условие Стренга — Фикса (9), получим алгебраическую систему уравнений для чисел $a_1,...,a_l$. Степень l нужно положить равной $5+q$. Численно решая полученную систему, в которой только 5 уравнений нелинейные (три квадратичных и два кубических), находим неизвестные коэффициенты $a_1,...,a_l$. После чего нормируем производную:

$$\|f'(x)\|_{L_2} = 1 \tag{10}$$

и введем обозначения:

$$\|f''(x)\|_{L_2}^2 = \alpha, \qquad \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \delta, \qquad \int\limits_{-1}^{1} xf'(x)dx = \gamma. \tag{11}$$

Функция $f(x)$ построена (с точностью до знака).

Пусть

$$\varphi(y) = (b_l y^s + b_{s-1}y^{s-1} + ... + b_1 y + 1)up(y).$$

Неизвестные коэффициенты $b_1,...,b_s$ определим аналогично из одного условия ортогональности сдвигов и неточных условий Стренга — Фикса:

$$\int\limits_0^1 \varphi(y)\varphi(y-1)dy = 0, \tag{12}$$

$$\varphi(y^i)+\varphi(y^i-1) = 1, \quad i = 1,...,q, \tag{13}$$

где $y^1,...,y^q$ — сетка (необязательно равномерная) на отрезке $[0,1]$.

Объединяя условия (12), (13), получим алгебраическую систему уравнений для чисел $b_1,...,b_s$. То есть степень s нужно положить равной $1+q$. Численно решая полученную алгебраическую систему, в которой только 1 уравнение нелинейное, находим неизвестные коэффициенты $b_1,...,b_s$. После этого нормируем найденную функцию:

$$\|\varphi(y)\|_{L_2} = 1 \tag{14}$$

и введем обозначение:

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(y)dy = \lambda. \tag{15}$$

Функция $\varphi(y)$ построена (с точностью до знака).

3. Метод Галеркина на построенных системах ортогональных финитных функций

Приближенное решение начальной задачи (1), (2) будем искать в виде:

$$\sum_{mnp} A_{mnp}(t) f\Big(\frac{x-x_m}{h}\Big)\varphi\Big(\frac{y-y_n}{h}\Big)\varphi\Big(\frac{z-z_p}{h}\Big) = \sum_{mnp} A_{mnp} f_m \varphi_n \varphi_p. \qquad (16)$$

Подставим (16) в (2) и умножим скалярно в смысле L_2 обе части полученного равенства на $f\Big(\frac{x-x_i}{h}\Big)$. Затем полученное равенство умножим скалярно на $\varphi\Big(\frac{y-y_j}{h}\Big)$. Результат умножим скалярно на $\varphi\Big(\frac{z-z_k}{h}\Big)$ $(i,j,k=-\infty,...,\infty)$. Используя (4), (10)–(12), (14), (15), получим:

$$A_{ijk}(0) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u_0(x_i+hx, y_j+hy, z_k+hz) f(x)\varphi(y)\varphi(z)dxdydz =$$

$$= u_0(x_i,y_j,z_k)\delta\lambda^2 + O(h). \qquad (17)$$

Подставим (16) в (1) и умножим скалярно в смысле L_2 обе части полученного равенства на $f'_x\Big(\frac{x-x_i}{h}\Big)$. Из (5)–(8) и (10), (11) следует:

$$\frac{1}{h}\sum_{np}\frac{d}{dt}A_{inp}\varphi_n\varphi_p + a\frac{\alpha}{h^3}\sum_{np}A_{inp}\varphi_n\varphi_p - h\gamma H'_x(x_i,y,z,t) + O(h^2) = 0.$$

Из-за условий (7), (8) на этом шаге обнулилось нелинейное слагаемое $u_x u_{xx}$ исходного уравнения (1), а благодаря (6) — слагаемое $u_{yy}+u_{zz}$.

Теперь умножим скалярно обе части полученного равенства на $\varphi\Big(\frac{y-y_j}{h}\Big)$:

$$\sum_p \frac{d}{dt}A_{ijp}\varphi_p + a\frac{\alpha}{h^2}\sum_p A_{ijp}\varphi_p - h^2\gamma\lambda H'_x(x_i,y_j,z,t) + O(h^3) = 0.$$

Умножим скалярно обе части полученного равенства на $\frac{1}{h}\varphi\Big(\frac{z-z_k}{h}\Big)$:

$$\frac{d}{dt}A_{ijk} + a\frac{\alpha}{h^2}A_{ijk} - h^2\gamma\lambda^2 H'_x(x_i,y_j,z_k,t) = 0. \qquad (18)$$

Из (17), (18) получим:

$$A_{ijk}(t) = \delta\lambda^2 u_0(x_i,y_j,z_k)e^{-\frac{a\alpha t}{h^2}} - h^2\gamma\lambda^2\int_0^t e^{-\frac{a\alpha}{h^2}(t-s)}H'_x(x_i,y_j,z_k,s)ds.$$

В зависимости от конкретной физической задачи сетки x_m, y_n, z_p могут иметь разные шаги h_1,h_2,h_3. Построенные ОФФ f и φ будут теми же.

Литература

[1] Блатов И.А., Стрыгин В.В. Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997.

[2] Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд [и др.]. М.: Мир, 1988.

[3] Лаевский Ю.М. Метод конечных элементов. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1999.

[4] Ильин В.П. Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск, 2007.
[5] Леонтьев В.Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. Ульяновск: УлГУ, 2003.
[6] Агошков В.И., Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
[7] Рвачев В.А. Теория приближений и атомарные функции. М.: Знание, 1978.
[8] Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М: Мир, 1977.

Поступила в редакцию $4/I/2011$;
в окончательном варианте — $4/I/2011$.

ORTOGONAL COMPACT FUNCTIONS FOR NONLINEAR SPATIAL EQUATION OF VISCOUS TRANSONIC FLOW

© 2011 G.Yu. Sewerin[2]

In the article the unique algorithm of construction of the system of orthogonal compact V.L. Leontev's type functions for the nonlinear spatial equation of viscous transonic flow is described by the method of Galerkin. The result of designing on corresponding subspaces is system of ordinary differential equations with a diagonal matrix.

Key words: method of Galerkin, orthogonal Leontiev compact functions, Streng-Fix condition.

Paper received $4/I/2011$.
Paper accepted $4/I/2011$.

[2]Severin Grigoriy Yurievich (akg.77@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Applied Analysis, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russian Federation.