УДК 539.3

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН РАЗРЫВА ДЕФОРМАЦИЙ[1]

© 2011 Ю.Е. Иванова, В.Е. Рагозина[2]

Решается задача об образовании и последующем движении одномерной сдвиговой ударной волны в нелинейно-упругом несжимаемом изотропном полупространстве. Применение метода сращиваемых асимптотических разложений в прифронтовой области ударной волны приводит к эволюционному квазилинейному волновому уравнению, отличному от уравнения Хопфа, характерного для объемных ударных волн. Предлагаются несколько методов построения решений для эволюционного уравнения сдвиговых волн, позволяющие рассматривать разнообразные функции времени в качестве краевого условия для поля перемещений.

Ключевые слова: нелинейная упругость, несжимаемость, ударная волна, метод возмущений, эволюционное уравнение.

Введение

Одномерный процесс объемного ударного деформирования в твердом теле в прифронтовой области переднего фронта волны описывается решениями уравнения Хопфа [1], известного также как нелинейное уравнение квазипростых волн [2]. Этот факт подтверждает схожесть механизма объемного деформирования в твердых телах, жидкостях и газах. В отличие от газовой динамики, в твердом теле деформирование приводит и к появлению сдвиговых ударных волн, закономерности движения которых изучены намного меньше. В общем случае процессы объемного и сдвигового деформирования в упругих средах оказываются взаимосвязанными [3–6]. С целью изучения чисто сдвиговых волн в настоящей статье рассматриваются одномерные задачи, возникающие при ударном нагружении границы нелинейно-упругого изотропного полупространства. Показано, что применение метода сращиваемых асимптотических разложений в прифронтовой области ударной волны сводит задачу к решению нелинейного волнового уравнения первого порядка, в котором угол наклона характеристик зависит от квадрата интенсивности волны, а не первой степени, как в уравнении Хопфа. Это простое математическое обстоятельство приводит к существенным различиям в процессах образования и последующего движения объемных и сдвиговых ударных волн. В статье

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ — 11-01-00369-а, 11-01-98514-р_восток_а; ДВО РАН — 11-III-В-03-006.

[2]Иванова Юлия Евгеньевна (ivanova@iacp.dvo.ru), Рагозина Виктория Евгеньевна (ragozina@vlc.ru), лаборатория нелинейной динамики деформирования Учреждения Российской академии наук Института автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, 690041, Российская Федерация, г. Владивосток, ул. Радио, 5.

предлагается несколько методов определения поля перемещений задачи с помощью решений эволюционного уравнения. Они проиллюстрированы конкретными примерами различных краевых условий на границе полупространства. Если в рассматриваемых одномерных процессах учитываются ненулевая кривизна волнового фронта либо диссипация или дисперсия в процессе распространения граничного возмущения, то это приводит к соответствующим волновым эволюционным уравнениям, уточняющим сдвиговое уравнение, изучаемое здесь. Можно показать, что применение метода малого параметра в неодномерных задачах ударного деформирования в прифронтовой области ударной волны приводит для нулевого шага к сходному эволюционному уравнению. В этом уравнении основная пространственная координата выбрана вдоль луча, координата эйконала является параметром уравнения. Сравнительная простота строящихся решений позволяет их применять для разработки схем численного счета [7–8] в задачах, связанных с интенсивными воздействиями. Отметим, что такие схемы позволяют точно указать положение переднего фронта ударной волны.

1. Общие модельные соотношения и постановка задачи

Рассматривается нелинейно-упругая несжимаемая изотропная среда, поведение которой в декартовой пространственной системе координат Эйлера x_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ задается общей системой уравнений

$$\begin{gathered}
v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \quad \sigma_{ij,j} = \rho\left(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j\right), \\
\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}\left(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}\right), \quad W\left(I_1, I_2\right) = \left(a - \mu\right) I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \\
-\kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \cdots, \quad I_1 = \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \\
u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t},
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где u_i и v_i — компоненты векторов перемещений и скорости соответственно, α_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, $\rho = const$ — плотность среды, W — функция упругого потенциала, p — добавочное гидростатическое давление, a, μ, b, κ, θ, c, d, k — упругие модули среды, δ_{ij} — символ Кронекера, латинские индексы принимают значения 1, 2, 3. В зависимости W от инвариантов I_1, I_2 учтены знаки инвариантов, поэтому перед некоторыми слагаемыми принят знак "минус". Многоточием здесь и далее обозначены невыписанные слагаемые с более высокой малостью.

С момента времени $t = 0$ на граничной плоскости $x_1 = 0$ предварительно недеформированного полупространства $x_1 \geqslant 0$ производится нагружение, результатом которого будет поле перемещений $u = u_2(x_1,\, t)$, $u_1 = u_3 = 0$. Для такого поля из системы (1.1) получаем уравнения движения

$$\begin{gathered}
\left(1 + 3\alpha u_{,1}^2\right) u_{,11} + \ldots = \ddot{u}C^{-2} + \ldots, \\
p_{,1} = 2\left(\mu - a\right) u_{,1}u_{,11} + \ldots, \quad C^2 = \mu\rho^{-1}, \quad \alpha = \left(a + b + \kappa + d\right)\mu^{-1}.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Перемещения на границе $x_1 = 0$ считаем известными:

$$u|_{x_1=0} = \begin{cases} g(t), \ \ t \geqslant 0, \ \ g'(0) > 0, \\ 0, \ \ t \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Такое условие приводит к возникновению ударной волны с момента $t = 0$. Требование $g'(0) > 0$ не является обязательным, однако дальше рассматриваем такие функции $g(t)$, которые приводят к мгновенному образованию ударной волны. На поверхности ударной волны $\Sigma(t)$ должны быть выполнены геометрические, кинематические и динамические условия совместности [9–11]. Для поставленной краевой задачи на их основе определяется скорость ударной волны $\Sigma(t)$:

$$G(t) = C\sqrt{1 + \alpha\left(\gamma^2 - 3u^+_{,1}\gamma + 3\left(u^+_{,1}\right)^2\right) + \ldots}, \quad \gamma = [u_{,1}] = u^+_{,1} - u^-_{,1},$$

где γ — интенсивность сдвиговой волны, G — скорость движения $\Sigma(t)$ в направлении единичной внешней нормали, индексами "+" и "—" обозначены величины, вычисляемые непосредственно перед и за ударной волной, квадратными скобками обозначен разрыв величины, заключенной в них. Для нашей задачи $u^+_{,1} = 0$. На поверхности ударной волны должны выполняться следующие краевые условия:

$$u|_{\mathrm{X(t)}} = 0, \quad \gamma|_{\mathrm{X(t)}} = -u^-_{,1}\big|_{\mathrm{X(t)}}, \quad [\sigma_{11}]|_{\mathrm{X(t)}} = 0, \quad \mathrm{X(t)} = \int\limits_0^{\mathrm{t}} \mathrm{G}\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{1.4}$$

причем $p = p_0 = const$ в недеформированной области.

Отметим, что задачи о переходных волновых процессах, в которых ударная волна образуется впоследствии, а также учет поля предварительных деформаций также могут решаться на основе излагаемых далее методов.

2. Асимптотический метод решения задачи об ударной сдвиговой волне. Внешнее решение

Из системы нелинейных уравнений (1.2) для определения поля перемещений задачи будем рассматривать только первое уравнение, поскольку второе легко интегрируется при найденных перемещениях. Для решения этого уравнения определим следующие безразмерные переменные:

$$s = \frac{x_1}{CT}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad w(s, m) = \varepsilon^{-1}\frac{u(x_1, t)}{CT}, \quad \varepsilon \ll 1, \tag{2.1}$$

для которых T — характерный масштаб времени, за которое возникающие на границе перемещения значительно меньше проходимого волной в линейном приближении расстояния. Это определяет появление малого параметра задачи ε, причем зачастую для него можно принять $\varepsilon = -\left[\dot{u}(0,0)\right] C^{-1}$. В переменных (2.1) для перемещений из системы (1.2) получим уравнение

$$w_{,ss}\left(1 + 3\alpha\varepsilon^2 w^2_{,s}\right) + \ldots = w_{,mm}, \tag{2.2}$$

а от условия (1.3) перейдем к условию

$$w|_{s=0} = \begin{cases} f\,(m)\,, & m \geqslant 0, \\ 0, \quad m \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Поскольку уравнение (2.2) содержит только четные степени малого параметра, искомую функцию $w(s, m)$ представим асимптотической последовательностью:

$$w(s, m) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_{2k}(s, m) \approx w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^4 w_4 + \ldots$$

Интегрируя уравнение (2.2), методом последовательных линейных приближений получим

$$
\begin{gathered}
w(s,m) = f(\xi) + \frac{\alpha}{2}\varepsilon^2 \left(f'(\xi)\right)^3 s + \frac{9}{8}\alpha^2\varepsilon^4 \left\{ -\frac{39}{45}\left(f'(\xi)\right)^5 s + \right. \\
\left. + \left(f'(\xi)\right)^4 f''(\xi)\left(s^2 + \xi s - s\right)\right\} + \ldots, \quad \xi = m - s.
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Отметим, что к решению (2.4) можно прийти двумя способами. В первом из них "теряется" краевое условие (1.4) и выполняется только условие (2.2). Во втором принимаем в расчет все условия и снова получаем ряд (2.4). В любом случае ударная волна $\Sigma(t)$ имеет скорость, большую, чем C, поэтому в области от $\xi = 0$ до ударной волны из (2.4) получаем $w(s,m) = 0$, а на самой поверхности $\xi = 0$ $w(s,m)$ имеет разрыв (за счет $[f'(\xi)] \neq 0$), что недопустимо. Таким образом одним решением (2.4) невозможно выполнить все краевые условия и определить гладкое решение, мы приходим к сингулярной задаче метода малого параметра. Ряд (2.4) назовем, следуя терминологии метода сращиваемых асимптотических разложений [12], внешним решением. Для выполнения условий на ударной волне надо построить дополнительное решение, называемое внутренним.

3. Переход во внутреннюю область задачи. Эволюционное уравнение сдвиговых волн

Для определения новых переменных внутренней области есть несколько возможностей, связанных с потерей равномерности исходного ряда (2.4). Здесь рассмотрим неравномерность, возникающую на больших расстояниях. Очевидно, что при $s \sim \varepsilon^{-2}$ ряд (2.4) становится неравномерным. Для построения внутреннего решения примем новые переменные

$$
n = \varepsilon^2 s, \quad p = s - m, \quad w^i = w(n,p), \tag{3.1}
$$

где обозначение для w оставлено только ввиду сохранения масштаба этой функции, хотя, строго говоря, это функция, отличная от $w(s,m)$. Тем не менее, чтобы не перегружать текст дополнительными обозначениями, индекс "i" везде, где нет разночтений, применять не будем. В переменных (3.1) от уравнения (2.2) переходим к уравнению

$$
\begin{gathered}
\left(2w_{,pn} + \varepsilon^2 w_{,nn}\right)\left\{1 + 3\alpha^2\varepsilon^2\left(w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n}\right)^2\right\} + \\
+ 3\alpha w_{,pp}\left(w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n}\right)^3 + \ldots = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

На основании вида уравнения (3.2) в представлении $w(n,p)$ асимптотической последовательностью также сохраним только четные степени ε. При этом на нулевом шаге метода получим уравнение

$$
v_{0,n} + \frac{3\alpha}{2} v_0^2 v_{0,p} = 0, \quad v_0 = w_{0,p}, \tag{3.3}
$$

которое по своему типу относится к нелинейным волновым уравнениям первого порядка и может быть названо эволюционным, поскольку структура его решения определяет как движение ударной волны, так и ее возникновение в результате "опрокидывания" исходного непрерывного профиля. В [13] показано, что прифронтовая область одномерной продольной ударной волны, движущейся в нелинейно-упругом полупространстве, описывается решениями известного уравнения

Хопфа. Его отличие от уравнения (3.3) заключается в зависимости от характеристик функции v_0 в первой степени. Это простое математическое обстоятельство отличает процесс сдвигового деформирования и приводит к качественным отличиям его от объемного. Непрерывное решение уравнения (3.3) вдоль характеристик имеет вид

$$v_0 = F\left(p - \frac{3\alpha}{2}v_0^2 n\right), \tag{3.4}$$

где F — произвольная функция, определяемая краевыми условиями. В нашей задаче такими краевыми условиями необходимо считать вид поля перемещений и его производных в области, пограничной по отношению ко внутреннему и внешнему решению. Эта область определяется новой переменной $l = \varepsilon^k s, \quad 0 < k < 2$. В данной области на выбор функции F влияет только выбор $f'(\xi)$ с учетом $\xi = -p$. Следующая часть статьи посвящена подробному построению решений этой краевой задачи при достаточно общем виде $f(\xi)$ и $f'(\xi)$.

4. Различные методы решения краевой задачи с включением интегрирования эволюционного уравнения

Так как полное решение поставленной краевой задачи включает определение поля перемещений (на нулевом шаге — по функции $w_0(n,p)$, необходимо указать способ восстановления перемещений по функции $v_0(n,p)$ при условии произвольности функции $f(\xi)$.

Первая из возможностей — явное выражение функции $v_0(n,p)$ из уравнения (3.4) с последующим интегрированием по переменной p. Это относится прежде всего к некоторым алгебраическим функциям $f(\xi)$, особенно к тем, которые приводят к квадратным либо биквадратным уравнениям относительно функции $v_0(n,p)$. В качестве одного из примеров рассмотрим краевое условие (1.3) вида

$$u|_{x_1=0} = V_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad w|_{s=0} = m + \frac{Am^2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{V_0}{C}, \quad A = \frac{aT}{V_0}. \tag{4.1}$$

На основе формул (4.1) и (3.4) можно предположить, что во внутренней области

$$v_0(p,n) = B_1 + B_2\left(p - \frac{3\alpha}{2}v_0^2 n\right), \tag{4.2}$$

где B_1 и B_2 — константы, которые определяются при сращивании решений. Из уравнения (4.2) получаем явное представление для функции $v_0(n,p)$:

$$v_0(n,p) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4B_2\beta n\left(B_1 + B_2 p\right)}}{2\beta B_2 n}, \quad \beta = \frac{3\alpha}{2}, \tag{4.3}$$

в котором при $n \to 0$ числитель и знаменатель стремятся к нулю одновременно. Интегрируя соотношение (4.3) по переменной p, получаем

$$w_0(n,p) = \frac{-6B_2^2\beta np + \left(1 + 4B_2\beta n\left(B_1 + B_2 p\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{12B_2^3\beta^2 n^2} + \varphi\left(n\right), \tag{4.4}$$

где $\varphi(n)$ — неопределенная функция, вид которой можно установить, выполняя краевые условия на ударной волне. Отметим, что при $n \to 0$, применяя к формулам (4.3), (4.4) правило Лопиталя необходимое число раз, получим

$$\lim_{n\to 0} v_0(n,p) = B_1 + B_2 p, \quad \lim_{n\to 0} w_0(n,p) = B_1 p + B_2\frac{p^2}{2}, \tag{4.5}$$

причем второй из пределов получен при условии, что на ударной волне $\Sigma(t)$ в нашем приближении есть зависимость $p = p_0(n)$. Для этой зависимости должно быть выполнено условие $p_0(0) = 0$, а функция $\varphi(n)$ определяется из условия

$$w_0(n,p)\big|_{p=p_0(n)} = 0, \tag{4.6}$$

которое позволяет вычислить предельное значение $\varphi(n)$ при $n \to 0$. На основании формул (4.5) решение (4.3), (4.4) можно доопределить предельными значениями в нуле. Отметим, что для задачи о продольной ударной волне, распространяющейся по полупространству [14], квадратичное краевое условие приводит к решению эволюционного уравнения, в котором зависимость от полухарактеристической координаты также является квадратичной, а по пространственной координате идет затухание. Такое слабое искажение начального импульса, как следует из приведенных формул, является, скорее, исключением. Даже если речь идет о "слабой" нелинейности, решения эволюционного уравнения имеют в общем случае иную временную зависимость, чем краевое условие. Из формул (4.3), (4.4) следует, что решение воспроизводит краевое условие только асимптотически при $n \to 0$.

Обратимся теперь к определению неизвестной функции $\varphi(n)$ и к указанию зависимости $p = p_0(n)$ на ударной волне. Из уравнения эйконала следует:

$$\begin{aligned} &\left(1-\varepsilon^2 p'(n)\right)^2 \left\{1+\alpha\varepsilon^2\left(w_{,p}+\varepsilon^2 w_{,n}\right)+\ldots\right\}=1, \\ &p(n)=p_0(n)+\varepsilon^2 p_2(n)+\ldots, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $w_{,p}$ и $w_{,n}$ вычисляются при условии $p = p(n)$, записанном до требуемой степени малого параметра. В нулевом шаге из уравнений (4.7) получаем

$$\frac{dp_0}{dn} = \frac{\alpha}{2} v_0^2\left(p_0(n), n\right). \tag{4.8}$$

Интегрируя уравнение (4.8) с учетом формулы (4.3), получим решение в неявном виде:

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{1+4B_2\beta n\left(B_1+B_2p_0\right)}-1\right)\sqrt{2\sqrt{1+4B_2\beta n\left(B_1+B_2p_0\right)}+1}= \\ &=2\sqrt{3}B_1B_2\beta n, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где уже применено условие $p_0(0) = 0$, выполнение которого также необходимо проводить в пределе при $n \to 0$. Сопоставление решений в пограничной области определяет связь констант внешнего и внутреннего разложений: $B_1 = -1$, $B_2 = A$. К недостаткам приводимого здесь метода следует отнести математические трудности, последовательно возникающие при определении v_0, w_0, $p_0(n)$. Так, к примеру, для определения функции $\varphi(n)$ из формулы (4.4) необходимо выполнить условие (4.6), которое предполагает знание явной зависимости $p_0(n)$. Для нашего случая, принимая для определенности $A > 0$ и проводя алгебраические преобразования уравнения (4.9), получим

$$p_0(n) = \begin{cases} \dfrac{\left(\cos^2\dfrac{\psi}{3}-\dfrac{3}{4}\right)\left(\cos^2\dfrac{\psi}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+A\beta n}{A^2\beta n}, & \begin{array}{c} \cos\psi=-2\sqrt{3}A\beta n, \\ \frac{\pi}{2}<\psi<\frac{3\pi}{2}, \\ 0<n<\dfrac{1}{2\sqrt{3}A\beta}, \end{array} \\ 0, \quad \psi=\frac{\pi}{2}\ (n=0). & \end{cases} \tag{4.10}$$

Из формул (4.4) и (4.10) для поля перемещений в нулевом приближении получим

$$w_0(n,p)=\begin{cases}\dfrac{\left(\sqrt{1+4A\beta n\left(-1+Ap\right)}\right)^3+6A^2\beta n\left(p_0(n)-p\right)}{12A^2\beta^2n^2}-\\ -\dfrac{\left(\sqrt{1+4A\beta n\left(-1+Ap_0(n)\right)}\right)^3}{12A^2\beta^2n^2},\quad 0<n<\dfrac{1}{2\sqrt{3}A\beta},\\ -p+\dfrac{Ap^2}{2},\quad n=0,\end{cases}$$

откуда в исходных переменных следует

$$\dot u(x_1,t)=\frac{C^3}{2\beta a x_1}\left\{1-\sqrt{1+4\left(-1+\frac{a}{V_0}\left(\frac{x_1}{C}-t\right)\right)\beta\frac{ax_1V_0}{C^3}}\right\}+\ldots$$

$$\ddot u(x_1,t)=\frac{a}{\sqrt{1+4\left(-1+\dfrac{a}{V_0}\left(\dfrac{x_1}{C}-t\right)\right)\beta\dfrac{ax_1V_0}{C^3}}},$$

что означает малое изменение параметров начального воздействия за исключением достаточно больших расстояний x_1. Сравнение полученных решений внешней и внутренней области позволяет утверждать, что прифронтовая асимптотика является более информативной, поскольку в пограничной области двум членам внешнего ряда отвечает один шаг внутреннего.

Приведем еще один пример краевого условия, позволяющий определить решение рассмотренным выше способом. Предположим, что на границе перемещения и скорости определены так:

$$u|_{x_1=0}=\frac{4A}{5}t^{5/4},\quad \dot u|_{x_1=0}=At^{1/4},\quad A>0$$

или в безразмерных переменных:

$$w|_{s=0}=\frac{4}{5}m^{5/4},\quad \varepsilon=\frac{AT^{1/4}}{C}.$$

Эта задача интересна, в частности, как пример ситуации, где нет разрыва в скоростях в момент $t=0$. При этом график $(\dot u)^2$ имеет вертикальную касательную в нуле, что определяет мгновенное возникновение ударной волны, у которой интенсивность изменяется, начиная от нулевого значения. Приведем схематично основные результаты решения. Для внешней области получим:

$$w(s,m)\approx\frac{4}{5}(m-s)^{5/4}+\ldots$$

Тогда во внутреннем решении достаточно выбрать:

$$v_0(n,p)=-\left(p+\beta n v_0^2\right)^{1/4},$$

что приводит к представлению

$$v_0(n,p)=-\sqrt{\frac{\beta n}{2}+\sqrt{-p+\frac{\beta^2n^2}{4}}},$$

$$w_0(n,p)=\frac{4}{5}\left(\sqrt{\frac{\beta n}{2}+\sqrt{-p+\frac{\beta^2n^2}{4}}}\right)^5-\tag{4.11}$$

$$-\frac{2\beta n}{3}\left(\sqrt{\frac{\beta n}{2}+\sqrt{-p+\frac{\beta^2n^2}{4}}}\right)^3+\varphi\left(n\right),$$

из которого также следует, что форма начального воздействия в переменных n, p терпит серьезные преобразования. Для определения положения волнового фронта необходимо проинтегрировать уравнение

$$\frac{dp_0}{dn}=\frac{\beta}{3}\left(\frac{\beta n}{2}+\sqrt{-p_0+\frac{\beta^2n^2}{4}}\right).$$

Для него в переменных $g=\sqrt{-p_0+\dfrac{\beta^2n^2}{4}}$, n приходим к одному из вариантов уравнения Дарбу. При этом оказывается, что интересующее нас решение (с условием $p_0(0)=0$) совпадает с одним из особых решений. Из него в исходных переменных получаем

$$p_0(n)=\frac{5}{36}\beta^2n^2, \tag{4.12}$$

то есть в переменных p, n положение ударной волны задается ветвью параболы. Подстановка уравнений (4.11), (4.12) в условие (4.6) приводит к простому результату $\varphi(n)=0$, что и заканчивает решение в нулевом приближении. Кроме приведенных здесь вариантов, есть еще ряд краевых условий, допускающих явное представление функции v_0 с последующим интегрированием. Преимущество такого подхода состоит в работе с исходными переменными, основной недостаток — ограниченность вида краевых условий, приводящих к удобным в работе функциям $v_0(n,p)$. Рассмотрим далее еще один метод, позволяющий использовать решения эволюционных уравнений для практически произвольных краевых условий.

5. Параметрическое представление решений эволюционных уравнений

Обратим внимание на то, что уравнение (3.4) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial w_0}{\partial p}=F\left(p-\beta n\left(\frac{\partial w_0}{\partial p}\right)^2\right). \tag{5.1}$$

По типу уравнение (5.1) можно отнести к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно w_0 с независимой переменной p, а n играет роль параметра. Это уравнение не содержит явно саму искомую функцию $w_0(n,p)$, поэтому для него можно использовать параметрический подход к решению. Для этого представим:

$$p=\varphi(\sigma,n),\quad \frac{\partial w_0}{\partial p}=\psi(\sigma), \tag{5.2}$$

где σ — параметр, область изменения которого определяется краевой задачей. Вдоль линий $n=const$ в пространстве σ, n из формул (5.2) следует

$$dw_0=\psi(\sigma)\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}d\sigma, \tag{5.3}$$

причем $\varphi(\sigma,n)$ и $\psi(\sigma)$ — функции, связанные между собой исходным уравнением (5.1). В результате интегрирования уравнения (5.3) получим решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} w_0(n,p)=w_0\left(n,p(\sigma,n)\right)=W_0(\sigma,n),\\ p=p(\sigma,n).\end{cases}$$

Для каждой краевой задачи параметр σ может выбираться в зависимости от удобства представления краевых условий. В общем случае наиболее целесообразным будет выбор

$$\begin{gathered} \sigma = \beta n v_0^2 - p, \quad v_0 = \Phi(\sigma) = -f'(\sigma), \\ p = \varphi(\sigma, n) = \beta n \Phi^2(\sigma) - \sigma, \quad \sigma \geqslant 0. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Из уравнений (5.3) и (5.4) с учетом условия (2.3) получим

$$\begin{cases} W_0(n,\sigma) = -\dfrac{2\beta n}{3}\left(f'(\sigma)\right)^3 + f(\sigma) + \varphi_0(n), \\ p(n,\sigma) = \beta n \left(f'(\sigma)\right)^2 - \sigma, \end{cases}$$

где $\varphi_0(n)$ — неизвестная функция, позволяющая выполнить условие на ударной волне $\Sigma(t)$, которое теперь представим так:

$$W_0(n,\sigma)\big|_{n=n_0(\sigma)} = 0,$$

то есть в нулевом приближении положение ударной волны в параметрическом решении задается системой уравнений

$$\begin{cases} p_0 = p\left(\sigma, n_0(\sigma)\right) = \beta n_0(\sigma)\left(f'(\sigma)\right)^2 - \sigma, \\ n = n_0(\sigma). \end{cases}$$

Функция $n_0(\sigma)$ задает волновой фронт только на рассматриваемом нулевом шаге, далее, как обычно, надо уточнить представление, полагая $n = n_0(\sigma) + \varepsilon^2 n_2(\sigma) + \ldots$ Обычно на ударной волне считали, что $p = p_0(n)$ и вычисляли $p_0'(n)$ с подстановкой в уравнение (4.8). Теперь для этой производной можно использовать представление

$$\frac{dp_0}{dn} = \frac{\partial\varphi\left(n,\sigma(n)\right)}{\partial n} + \frac{\partial\varphi\left(n,\sigma(n)\right)}{\partial\sigma}\frac{d\sigma(n)}{dn}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \beta\left(f'\right)^2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = 2\beta n f' f'' - 1,$$

откуда и из уравнения (4.8) имеем

$$\frac{dn_0}{d\sigma} = -3\frac{f''(\sigma)}{f'(\sigma)}n_0 + \frac{3}{2\beta\left(f'(\sigma)\right)^2}.$$

Интегрирование этого уравнения при условии возникновения ударной волны с момента $t = 0$ приводит к таким результатам:

$$\begin{cases} n_0(\sigma) = \dfrac{3}{2\beta}\dfrac{f(\sigma)}{\left(f'(\sigma)\right)^3}, \\ p_0(\sigma) = \dfrac{3}{2}\dfrac{f(\sigma)}{f'(\sigma)} - \sigma. \end{cases}$$

Найденные формулы определяют $\varphi_0(n) = 0$. Решение в такой форме удобно при численных расчетах, также оно легко сопоставляется с внешним рядом (на нулевом шаге это было сделано исходно за счет выбора связи $\Phi(\sigma) = -f'(\sigma)$. Использование этого приема достаточно просто перенести на уточнение внутреннего ряда последующими шагами.

В качестве одного из примеров параметрических решений рассмотрим подробнее задачу, в которой перемещения и скорости граничных точек изменяются по экспоненциальным законам:

$$\dot{u}\big|_{x_1=0} = Ae^{\gamma t}, \quad u\big|_{x_1=0} = -\frac{A}{\gamma}\left(1 - e^{\gamma t}\right), \quad A > 0, \quad \gamma < 0. \tag{5.5}$$

Решение этой задачи во внутреннем приближении проведем до второго шага включительно. Для условия (5.5) в безразмерных переменных внешней области:

$$w\,(s,m)|_{s=0} = \frac{1}{B}\left(1-e^{-Bm}\right), \quad B=-\gamma T = const > 0, \quad \varepsilon = \frac{A}{C}.$$

Решение внешней области очевидно и строится на основе формулы (2.4). Для внутреннего решения можно выбрать

$$v_0 = w_{0,p} = \psi(\sigma) = -e^{\sigma}, \quad -\infty < \sigma \leqslant 0,$$

где область изменения σ задает затухающую ветвь экспоненты. Тогда

$$\sigma = B\left(p - \beta n e^{2\sigma}\right), \quad p = \varphi(n,\sigma) = \frac{\sigma}{B} + \beta n e^{2\sigma},$$

откуда

$$\begin{cases} W_0(n,\sigma) = -\dfrac{e^{\sigma}}{B} - \dfrac{2\beta n}{3} e^{3\sigma} + \varphi_0(n), \\ p(n,\sigma) = \dfrac{e^{\sigma}}{B} + \beta n e^{2\sigma}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Из уравнения эйконала определяем положение волнового фронта $\Sigma(t)$:

$$\begin{cases} n_0(\sigma) = \dfrac{3}{2\beta B}\left(e^{-3\sigma} - e^{-2\sigma}\right), \\ p_0(\sigma) = \dfrac{\sigma}{B} + \dfrac{3}{2B}\left(e^{-\sigma} - 1\right), \end{cases}$$

которое дает формулу $\varphi_0 = B^{-1} = const$.

Рассмотрим более подробно решение следующего шага. На нем в переменных n, p из уравнения (3.2) получим уравнение

$$\begin{aligned} &v_{2,n} + \beta v_0^2 v_{2,p} + 2\beta v_{0,p} v_0 v_2 + \frac{w_{0,nn}}{2} + 2\beta v_{0,n} v_0^2 + 2\beta v_0 v_{0,p} w_{0,n} = 0, \\ &v_2 = w_{2,p}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Прежде всего обратим внимание на тот факт, что угол наклона характеристик уравнения (5.7) совпадает с углом наклона характеристик исходного эволюционного уравнения (3.3), то есть очередные итерации уточняют поле перемещений и положение волнового фронта, но не влияют на характеристики. Поэтому основным уравнением в оценке опрокидывания волны, если изучается переходный волновой процесс, должно служить именно уравнение (3.3). Для решения уравнения (5.7) применим следующий подход: на второе уравнение в системе (5.6) будем смотреть как на неявное в пространстве σ, n, p. Предполагая наличие связи $\sigma = \sigma(n,p)$, из этого уравнения получим

$$\sigma_{,n} = -\frac{\beta e^{2\sigma}}{B^{-1} + 2\beta n e^{2\sigma}}, \quad \sigma_{,p} = \frac{1}{B^{-1} + 2\beta n e^{2\sigma}},$$

а для частных производных, входящих в уравнение (5.7), примем представление

$$v_{0,p} = V_0(\sigma)_{,\sigma}\sigma_{,p}, \quad v_{0,n} = V_0(\sigma)_{,\sigma}\sigma_{,n}, \quad w_{0,n} = W_{0,n} + W_{,\sigma}\sigma_{,n}.$$

В результате в переменных σ, n уравнение (5.7) переходит в уравнение

$$V_{2,n} + \frac{2\beta e^{2\sigma}}{B^{-1} + 2\beta n e^{2\sigma}} V_2 + \frac{13}{6}\beta^2 \frac{e^{5\sigma}}{B^{-1} + 2\beta n e^{2\sigma}} = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$V_2 = \frac{-\dfrac{13}{6}\beta^2 e^{5\sigma} n + K_0\,(\sigma)}{B^{-1} + 2\beta n e^{2\sigma}}, \tag{5.8}$$

причем $V_2 = w_{2,p} = W_{2,\sigma}\sigma_{,p}$, поэтому

$$W_2(n,\sigma) = -\frac{13}{30}\beta^2 e^{5\sigma} n + K(\sigma) + \varphi_2(n). \tag{5.9}$$

В формулах (5.8), (5.9) $K_0(\sigma)$, $K(\sigma)$, $\varphi_2(n)$ — новые неизвестные функции. Одну из них, $K(\sigma)$, определяем, сравнивая $w(s,m)$ и $w(n,p)$ в области перекрытия. Рассмотрим, к примеру, масштаб $l = \varepsilon s$. В переменных l, ξ для решения (2.4) внешней области получим

$$\begin{aligned} w^e(l,\xi) &= f(\xi) + \frac{\alpha}{2}\varepsilon\left(f'(\xi)\right)^3 l + \frac{9\alpha^2}{8}\varepsilon^2 l^2 \left(f'(\xi)\right)^4 f''(\xi) + \ldots = \\ &= \frac{1}{B} - \frac{e^{-B\xi}}{B} + \frac{\alpha}{2}\varepsilon e^{-3B\xi} l + \frac{9\alpha^2}{8}\varepsilon^2 l^2\left(-Be^{-5B\xi}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{5.10}$$

Для внутреннего решения переход к переменной l приводит к уравнению

$$\sigma(p,l) \approx Bp - \varepsilon B\beta l e^{2Bp} + 2\varepsilon^2 B^2\beta^2 l^2 e^{4Bp} + \ldots,$$

тогда

$$\begin{aligned} &W_0(n,\sigma) + \varepsilon W_2(n,\sigma)\big|_{n=\varepsilon l} \approx B^{-1} - B^{-1}e^{Bp} + \varepsilon\frac{\beta}{3} l e^{3Bp} + \\ &+\varepsilon^2\left\{-\frac{\beta^2}{2}Bl^2 e^{5Bp} + K\left(Bp\right)\right\} + \ldots \end{aligned} \tag{5.11}$$

Сравнение рядов (5.10) и (5.11) показывает, что они совпадают при условии $K(\sigma) = 0$. Для определения $\varphi_2(n)$ уточним положение волнового фронта, считая $n = n_0(\sigma) + \varepsilon^2 n_2(\sigma) + \ldots$ Из уравнения эйконала относительно функции $n_2(\sigma)$ получаем уравнение

$$\frac{dn_2}{d\sigma} = -3n_2 + \frac{1}{4B}\left(\frac{25}{2} - 9e^{-\sigma}\right), \quad n_2\left(0\right) = 0.$$

Его решением будет функция

$$n_2(\sigma) = \left(\frac{25}{24} - \frac{9}{8}e^{-\sigma} + \frac{e^{-3\sigma}}{12}\right)B^{-1}.$$

Для положения ударной волны $\Sigma(t)$ получаем

$$\begin{cases} n(\sigma) = \dfrac{3}{2\beta B}\left(e^{-3\sigma} - e^{-2\sigma}\right) + \varepsilon^2 B^{-1}\left(\dfrac{25}{24} - \dfrac{9}{8}e^{-\sigma} + \dfrac{e^{-3\sigma}}{12}\right), \\ p\left(n(\sigma),\sigma\right) = \dfrac{\sigma}{B} + \dfrac{3}{2B}\left(e^{-\sigma} - 1\right) + \dfrac{\varepsilon^2\beta}{B}\left(\dfrac{25}{24}e^{2\sigma} - \dfrac{9}{8}e^{\sigma} + \dfrac{e^{-\sigma}}{12}\right). \end{cases}$$

Чтобы определить неизвестную функцию $\varphi_2(n)$, решим сначала одну вспомогательную задачу, обратив зависимость $n = n_0(\sigma)$. Определяя переменную $z = e^{-\sigma} - \frac{1}{3}$, из возникающих решений кубического уравнения выделим единственное действительное:

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{n_0}{2\kappa} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{n_0}{2\kappa} - \sqrt{D}}, \quad D = \frac{n_0}{2\kappa}\left(\frac{2}{27} + \frac{n_0}{2\kappa}\right), \quad \kappa = \frac{3}{2\beta B}.$$

Краевое условие на перемещения необходимо выполнить в уточненном виде, то есть

$$W_0(n,\sigma) + \varepsilon^2 W_2(n,\sigma)\big|_{n=n_0+\varepsilon^2 n_2} = 0,$$

откуда следует

$$-\frac{2\beta}{3}n_2(\sigma)e^{3\sigma} - \frac{13}{30}\beta^2 e^{5\sigma} n_0 + \varphi_2\left(n_0(\sigma)\right) = 0.$$

Из этого уравнения, подставляя в него найденную зависимость $\sigma = \sigma(n_0)$, получим

$$\varphi_2(n) = \frac{\beta}{B\left(\frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{n}{2\kappa} + \sqrt{D_1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{n}{2\kappa} - \sqrt{D_1}}\right)} \left\{ \frac{2}{45} - \frac{1}{10}\left[\frac{1}{3} + \right.\right.$$

$$\left. + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{n}{2\kappa} + \sqrt{D_1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{n}{2\kappa} - \sqrt{D_1}}\right] + \frac{1}{18}\left[\frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{n}{2\kappa} + \sqrt{D_1}} + \right.$$

$$\left.\left. + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{n}{2\kappa} - \sqrt{D_1}}\right]^3 \right\}, \quad D_1 = \frac{n}{2\kappa}\left(\frac{2}{27} + \frac{n}{2\kappa}\right), \quad \kappa = \frac{3}{2\beta B},$$

причем $\varphi_2(n) \to 0$ при $n \to 0$. Такое решение возможно при условии, что $n = n_0(\sigma)$ можно обратить, как в нашем примере. В общем случае для вычисления $\varphi_2(n)$ необходимо привлекать дополнительные методы, например, численные.

Построенное решение внутренней области опять по своему содержанию опережает внешнее разложение, поскольку два его шага отвечают трем во внешней области. Приведенный метод легко распространяется на другие краевые условия. Так, авторами рассматривались краевые условия логарифмического, синусоидального вида, а также полиномиальное представление граничных перемещений.

Подводя итог, можно сделать заключение, что применение метода возмущений с выделением эволюционного уравнения является эффективным способом решения краевых задач ударного деформирования. Параметрическое построение решений эволюционных уравнений позволяет существенно расширить класс изучаемых краевых условий. Приведенный метод может быть перенесен как на одномерные плоские задачи объемного деформирования, так и на краевые задачи с ненулевой кривизной фронта ударной волны. Полученные решения можно использовать как самостоятельный теоретический результат либо в практических целях, включая их в задачи численных расчетов, в которых необходимо четко выделить поверхность ударной волны. Отметим также вопрос об образовании ударной волны в переходном волновом процессе, не вошедший в круг задач этой статьи. Его решение также может строиться исходя из анализа эволюционного волнового уравнения. Также следует ожидать, что полученные закономерности должны в определенной степени сохраняться и для многомерных задач либо для случая присутствия нескольких плоских волновых фронтов.

Литература

[1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

[2] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.

[3] Бленд Д.Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.

[4] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.

[5] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах // ПММ, 1982. Т. 44. Вып. 3. С. 523–534.

[6] Буренин А.А., Чернышов А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 711–717.

[7] Рагозина В.Е., Воронин И.И., Вековшинин Е.Л. Об использовании прифронтовой асимптотики в численных решениях динамических задач теории упругости с ударными волнами // Проблемы естествознания и производства. 1995. Вып. 115. С. 25–27.

[8] Герасименко Е.А., Завертан А.В. Расчеты динамики несжимаемой упругой среды при антиплоском и скручивающем ударе // Вычислительная механика сплошных сред, 2008. Т. 1. № 3. С. 46–56.

[9] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.; Т. 2. 584 с.

[10] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.

[11] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

[12] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 239 с.

[13] Буренин А.А., Россихин Ю.А. К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной // Прикл. механика, 1990. Т. 26. № 1. С. 103–108.

[14] Буренин А.А., Рагозина В.Е. О прифронтовых асимптотиках в нелинейной динамической теории упругости // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций. Владивосток: Дальнаука, 1988. С. 225–240.

Поступила в редакцию 10/*VII*/2010;
в окончательном варианте — 10/*VII*/2010.

THE EVOLUTIONARY EQUATION FOR ONE-DIMENSIONAL SHEAR WAVES OF A RUPTURE OF STRAINS

© 2011 Y.E. Ivanova, V.E. Ragozina[3]

The problem about formation and the subsequent distribution of the one-dimensional shear shock wave in nonlinear elastic incompressible isotropic half-space is solved. Application of a method of the spliced asymptotic expansions in front field of a shock wave leads to the evolutionary quasilinear wave equation which is distinct from the equations of Hopf, characteristic for volume shock waves. Some methods of build-up of solutions for the evolutionary equations of the shift waves, allowing to consider the manifold time functions in the capacity of boundary conditions for a field of transitions, are offered.

Key words: nonlinear elasticity, incompressibility, shock wave, method of perturbations, evolutionary equation.

Paper received 10/*VII*/2010.
Paper accepted 10/*VII*/2010.

[3]Ivanova Yulia Evgenevna (ivanova@iacp.dvo.ru), Ragozina Viktoria Evgenevna (ragozina@vlc.ru), Laboratory of Nonlinear Dynamics Deformation, Institution of Russian Academy of Sciences Institute for Automation and Control Processes Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, 690041, Russian Federation.