УДК 512.572

О НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА[1]

© 2011 Т.В. Скорая, Ю.Ю. Фролова[2]

В работе представлены два новых результата, касающиеся многообразий алгебр Лейбница. В случае простой характеристики p основного поля построен пример ненильпотентного многообразия алгебр Лейбница с условием энгелевости порядка p. В случае поля нулевой характеристики построено конкретное разложение пространства полилинейных элементов относительно свободной алгебры в прямую сумму неприводимых модулей симметрической группы многообразия левонильпотентных алгебр Лейбница ступени три.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, энгелевость, многообразие алгебр, диаграммы Юнга.

1. Предварительные сведения

Напомним, что алгеброй Лейбница называется векторное пространство с билинейным произведением, в котором выполняется тождество:

$$(xy)z \equiv (xz)y + x(yz). \tag{1}$$

Согласно этому тождеству, умножение справа на элемент алгебры становится дифференцированием этой алгебры. При условии выполнения тождества антикоммутативности $xy \equiv -yx$ тождество (1) эквивалентно тождеству Якоби: $x(yz)+y(zx)+ + z(xy) \equiv 0$. Поэтому если в алгебре Лейбница выполняется тождество $xx \equiv 0$, то она является алгеброй Ли. В частности, любая алгебра Ли является алгеброй Лейбница. Обратное неверно. Отметим, что, вероятно, впервые этот класс алгебр был введен в работе [1] в качестве обобщения понятия алгебры Ли.

Преобразуем тождество (1) следующим образом: $x(yz) \equiv (xy)z-(xz)y$. Последнее тождество позволяет любой элемент алгебры Лейбница представить в виде линейной комбинации элементов, в которых скобки расставлены слева направо. Поэтому договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, то есть $(((x_1x_2)x_3)\ldots x_n) = x_1x_2x_3\ldots x_n$. Для удобства записи произведений обозначим оператор умножения справа, например, на элемент z заглавной буквой Z, считая, что $xz = xZ$. В частности, в наших обозначениях получаем равенство $x\underbrace{yy...y}_{m} = xY^m$.

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ 10-01-00209-а.

[2]Скорая Татьяна Владимировна (skorayatv@yandex.ru), Фролова Юлия Юрьевна (yuyufrolova@mail.ru), кафедра алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета, 432700, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

Совокупность всех алгебр, в которых выполняется некоторый фиксированный набор тождественных соотношений, называется многообразием линейных алгебр.

Предположим, что поле K имеет характеристику ноль. В этом случае вся информация о многообразии содержится в полилинейных элементах его относительно свободной алгебры счетного ранга. Обозначим через $F(X, \mathbf{V})$ относительно свободную алгебру многообразия $\mathbf{V}$ со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и через $P_n = P_n(\mathbf{V})$ совокупность всех полилинейных элементов от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в пространстве $F(X, \mathbf{V})$. Отметим, что для удобства изложения в дальнейшем мы будем обозначать образующие относительно свободной алгебры и другими символами. Пусть σ — элемент симметрической группы S_n. Будем полагать, что в результате действия слева перестановки σ на элемент $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ пространства P_n мы получаем элемент $x_{\sigma(i_1)}x_{\sigma(i_2)}\ldots x_{\sigma(i_n)}$. Таким образом задается действие симметрической группы S_n на пространство P_n, вследствие чего P_n становится модулем над групповым кольцом KS_n. Структура P_n как KS_n-модуля играет важную роль и активно изучается для различных многообразий.

Напомним, что стандартный полином степени n имеет вид:

$$St_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{q \in S_n} (-1)^q x_{q(1)} x_{q(2)} \ldots x_{q(n)},$$

где суммирование ведется по элементам симметрической группы, а $(-1)^q$ равно $+1$ или -1 в зависимости от четности перестановки q. Договоримся, что переменные, входящие в стандартный полином, будем обозначать специальными символами сверху (чертой, волной и так далее). Например, стандартный полином степени n от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем записывать следующим образом: $St_n = \overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n$. Понятно, что стандартный полином является кососимметрическим. Переменные, входящие в разные кососимметрические наборы, будем обозначать разными символами, например:

$$\sum_{q \in S_n, p \in S_m} (-1)^q (-1)^p x_{q(1)} x_{q(2)} \ldots x_{q(n)} y_{p(1)} y_{p(2)} \ldots y_{p(m)} = \overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n\widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\ldots\widetilde{y}_m.$$

Отметим, что если элемент содержит одни и те же переменные, входящие в разные кососимметрические наборы, то его знак уже зависит от четности перестановок неявным образом, поэтому переменные в этом элементе будем называть альтернированными. Например, элемент $\overline{x}_1\ldots\overline{x}_n\widetilde{x}_1\ldots\widetilde{x}_m$ содержит два альтернированных набора переменных. Так как знак каждого слагаемого в стандартном полиноме зависит от четности перестановки, то во введенных обозначениях имеет место равенство: $\overline{x}_{i(1)}\ldots\overline{x}_{i(k)}\overline{x}_{i(k+1)}\ldots\overline{x}_{i(n)} = -\overline{x}_{i(1)}\ldots\overline{x}_{i(k+1)}\ \overline{x}_{i(k)}\ldots\overline{x}_{i(n)}$. Согласно тождеству (1), можно записать: $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \equiv \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2(\overline{x}_3\overline{x}_4)$. Непосредственным образом получаем: $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \equiv \frac{1}{2}\overline{x}_1\overline{x}_2(\overline{x}_3\overline{x}_4)$ и в более общем случае: $\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_{2n+1} \equiv \frac{1}{2^n}\overline{x}_1(\overline{x}_2\overline{x}_3)\ldots(\overline{x}_{2n}\overline{x}_{2n+1})$. Другими словами, начиная со второго места, переменные одного кососимметрического набора, стоящие рядом, мы можем объединять в скобки, умножая элемент на $\frac{1}{2}$ для каждой пары.

Поскольку мы рассматриваем случай нулевой характеристики основного поля, то всякое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств, которая получается при помощи стандартного метода линеаризации [2]. Приведем пример этого процесса для тождества

$$x_0(xy)(xy) \equiv 0.$$

После линеаризации по переменной x получаем:

$$x_0(x_1y)(x_2y) + x_0(x_2y)(x_1y) \equiv 0.$$

Полная линеаризация выглядит следующим образом:

$$x_0(x_1y_1)(x_2y_2) + x_0(x_1y_2)(x_2y_1) + x_0(x_2y_1)(x_1y_2) + x_0(x_2y_2)(x_1y_1) \equiv 0.$$

Договоримся линеаризацию элемента f обозначать $linf$.

Напомним, что алгебра Ли называется энгелевой порядка m, если она удовлетворяет тождеству $xY^m \equiv 0$. Если же в алгебре A выполняется тождество $x_1x_2\dots x_{c+1} \equiv 0$, но не выполняется тождество $x_1x_2\dots x_c \equiv 0$, то A называется нильпотентной алгеброй ступени нильпотентности c. Сохраним эти определения на случай алгебр Лейбница.

2. Пример ненильпотентного многообразия алгебр Лейбница с условием энгелевости

В случае нулевой характеристики поля Е.И. Зельманов в работе [3] доказал, что энгелева алгебра Ли нильпотентна. Используя этот результат, в работе [4] вторым автором доказано, что в случае нулевой характеристики основного поля многообразие энгелевых алгебр Лейбница является нильпотентным. Для случая ненулевой характеристики p основного поля П.М. Кон в работе [5] построил пример ненильпотентной алгебры Ли в которой выполнены тождества $(xy)(zt) \equiv 0$ и $xY^{p+1} \equiv 0$. Таким образом, в этом случае многообразие алгебр Ли с условием энгелевости порядка $p+1$ является ненильпотентным.

Следуя идеям указанной статьи, построим ненильпотентную энгелеву алгебру Лейбница, в которой выполняется тождество энгелевости $xY^p \equiv 0$.

Теорема. Пусть K — поле простой характеристики p. Многообразие $\mathbf{U}$ алгебр Лейбница над полем K, удовлетворяющих тождествам $xY^p \equiv 0$ и $x(yz) \equiv 0$, ненильпотентно.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно построить ненильпотентную алгебру Лейбница, принадлежащую многообразию $\mathbf{U}$.

Пусть W – векторное пространство над полем K, базисом которого является множество $\{e_f |\ f \in K^{\mathbb{N}}\}$, где $K^{\mathbb{N}}$ – множество всех функций натурального аргумента со значениями в K. Определим на пространстве W операцию умножения, считая, что алгебра W является абелевой алгеброй Ли, то есть $e_{f_1}e_{f_2} \equiv 0$. Для любого натурального m обозначим δ_m эндоморфизм векторного пространства W, который на базисном элементе e_f принимает значение $e_{\overline{f}}$, где

$$\overline{f}(i) = \begin{cases} f(i), & \text{если } i \neq m, \\ f(i)+1, & \text{если } i = m. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\delta_m\delta_n = \delta_n\delta_m$ и $\delta_m^p = \varepsilon$, где ε – тождественный эндоморфизм векторного пространства W. Положим $x_i = \delta_i - \varepsilon,\ i = 1, 2, ...,$ тогда $x_ix_j = (\delta_i - \varepsilon)(\delta_j - \varepsilon) = \delta_i\delta_j - \delta_i - \delta_j + \varepsilon = \delta_j\delta_i - \delta_j - \delta_i + \varepsilon = (\delta_j - \varepsilon)(\delta_i - \varepsilon) = x_jx_i$.

Относительно операции коммутирования $L = \langle x_i | i \in \mathbb{N}\rangle_K$ – K-оболочка множества $\{x_i |\ i \in \mathbb{N}\}$ является абелевой алгеброй Ли, а W – правым L-модулем.

Необходимая алгебра Лейбница является прямой суммой векторных пространств W и L, в котором умножение задается правилом:

$$(w_1 + l_1)(w_2 + l_2) = w_1l_2,$$

где $w_1, w_2 \in W,\ l_1, l_2 \in L$, а w_1l_2 – результат применения l_2 к элементу w_1, принадлежащему векторному пространству W. Обозначим полученную алгебру M.

В алгебре M выполняется тождество $x(yz) \equiv 0$. На самом деле, подставив в проверяемое тождество элементы $w_i + l_i \in M$, $i = 1, 2, 3$, получим

$$(w_1 + l_1)((w_2 + l_2)(w_3 + l_3)) = (w_1 + l_1)(w_2 l_3) = 0.$$

Для любых элементов t, y алгебры M справедливо тождество энгелевости $tY^p \equiv 0$. Действительно, хорошо известно, что биномиальный коэффициент $\begin{pmatrix} p \\ m \end{pmatrix} = \frac{p!}{m!(p-m)!}$ делится на p. Поэтому для всех $i \in \mathbb{N}$, $f \in K^{\mathbb{N}}$ по формуле бинома Ньютона получим $e_f X_i^p = e_f \underbrace{(\delta_i - \varepsilon)(\delta_i - \varepsilon)...(\delta_i - \varepsilon)}_{p} = e_f \underbrace{\delta_i \delta_i ... \delta_i}_{p} - -e_f \underbrace{\varepsilon\varepsilon...\varepsilon}_{p} = 0$. Последнее равенство следует из того, что $e_f \underbrace{\delta_i \delta_i ... \delta_i}_{p} = e_f$. Заметим, что результат верен в случае $p = 2$, так как $e_f x_i x_i = e_f \delta_i \delta_i + e_f \delta_i \delta_i = e_f \delta_i \delta_i - - e_f \delta_i \delta_i = 0$. То есть $e_f X_i^p \equiv 0$, для любого натурального i и любой функции f. Пусть $y = \sum_s \alpha_s x_s + \sum_f \beta_f e_f$ – произвольный элемент алгебры M, тогда $tY^p = = t(\sum_s \alpha_s X_s)^p = \sum_s \alpha_s^p t X_s^p = 0$.

Проверим теперь, что M не является нильпотентной алгеброй Лейбница. Обозначим через $f_{j_1, j_2, ..., j_s}$, где $\{j_1, j_2, ..., j_s\}$ – строго возрастающий набор натуральных чисел, функцию натурального аргумента, принимающую значение 1 в точках $j_1, j_2, ..., j_s$ и значение 0 в остальных точках, а через f_0 обозначим функцию, принимающую нулевое значение во всех точках. Докажем методом математической индукции по числу сомножителей следующую формулу:

$$e_{f_0} x_1 x_2 ... x_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{\{j_1, j_2, ..., j_{m-k}\}^m} e_{f_0} \delta_{j_1} \delta_{j_2} ... \delta_{j_{m-k}}, \tag{2}$$

где $\{j_1, j_2, ..., j_{m-k}\}^m$ — строго упорядоченное по возрастанию подмножество множества $\{1, 2, ..., m\}$. Для $m = 1$ получим $e_{f_0} x_1 = e_{f_0} \delta_1 - e_{f_0} = e_{f_1} - e_{f_0}$, и формула (2) верна. Предположим, что доказываемое равенство верно для $m - 1$, то есть

$$e_{f_0} x_1 x_2 ... x_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \sum_{\{j_1, j_2, ..., j_{m-1-k}\}^{m-1}} e_{f_0} \delta_{j_1} \delta_{j_2} ... \delta_{j_{m-1-k}},$$

докажем, что тогда выполнено и равенство (2). Умножив обе части последнего равенства на x_m, получим

$$e_{f_0} x_1 x_2 ... x_m = \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \sum_{\{j_1, j_2, ..., j_{m-1-k}\}^{m-1}} e_{f_0} \delta_{j_1} \delta_{j_2} ... \delta_{j_{m-1-k}} \right) x_m =$$

$$= \left(e_{f_0} \delta_1 \delta_2 ... \delta_{m-1} - \sum_{\{j_1, j_2, ..., j_{m-2}\}^{m-1}} e_{f_0} \delta_{j_1} \delta_{j_2} ... \delta_{j_{m-2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\{j_1, j_2, ..., j_{m-3}\}^{m-1}} e_{f_0} \delta_{j_1} \delta_{j_2} ... \delta_{j_{m-3}} + ... + (-1)^{m-1} e_{f_0} \right) (\delta_m - \varepsilon) =$$

$$= e_{f_0} \delta_1 \delta_2 ... \delta_{m-1} \delta_m - \sum_{\{j_1, j_2, ..., j_{m-2}\}^{m-1}} e_{f_0} \delta_{j_1} \delta_{j_2} ... \delta_{j_{m-2}} \delta_m +$$

$$+ \sum_{\{j_1, j_2, ..., j_{m-3}\}^{m-1}} e_{f_0} \delta_{j_1} \delta_{j_2} ... \delta_{j_{m-3}} \delta_m + ... + (-1)^{m-1} e_{f_0} \delta_m - e_{f_0} \delta_1 \delta_2 ... \delta_{m-1} +$$

$$+\sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{m-2}\}^{m-1}} e_{f_0}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\dots\delta_{j_{m-2}} - \sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{m-3}\}^{m-1}} e_{f_0}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\dots\delta_{j_{m-3}} + \dots + (-1)^m e_{f_0}.$$

Заметим, что при $s \leqslant m-1$

$$\sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{s-1}\}^{m-1}} e_{f_0}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\dots\delta_{j_{s-1}}\delta_m + \sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_s\}^{m-1}} e_{f_0}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\dots\delta_{j_s} =$$

$$= \sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_s\}^{m}} e_{f_0}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\dots\delta_{j_s}.$$

После группировки слагаемых получим

$$e_{f_0}x_1x_2\dots x_m = e_{f_0}\delta_1\delta_2\dots\delta_{m-1}\delta_m - \left(\sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{m-2}\}^{m-1}} e_{f_0}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\dots\delta_{j_{m-2}}\delta_m + e_{f_0}\delta_1\delta_2\dots\delta_{m-1}\right) +$$

$$+\left(\sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{m-3}\}^{m-1}} e_{f_0}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\dots\delta_{j_{m-3}}\delta_m + \sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{m-2}\}^{m-1}} e_{f_0}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\dots\delta_{j_{m-2}}\right) + \dots$$

$$\dots + \left((-1)^{m-1}e_{f_0}\delta_m + (-1)^{m-1}\sum_{\{j_1\}}^{m-1} e_{f_0}\delta_{j_1}\right) + (-1)^m e_{f_0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{m-k}\}} e_{f_0}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\dots\delta_{j_{m-k}}$$

Таким образом, формула (2) верна для любого натурального m.

Из равенства $e_{f_0}\delta_{j_1}\delta_{j_2}\dots\delta_{j_{m-k}} = e_{f_{j_1,j_2,\dots,j_{m-k}}}$ и формулы (2) получаем, что

$$e_{f_0}x_1x_2\dots x_m = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{m-k}\}^m} (-1)^k e_{f_{j_1,j_2,\dots,j_{m-k}}}.$$

Таким образом, элемент $e_{f_0}x_1x_2\dots x_m$ равен линейной комбинации различных базисных элементов с коэффициентами 1 или -1, поэтому отличен от нуля для любого натурального m. Теорема полностью доказана.

Замечание. Если M — алгебра Ли, принадлежащая многообразию $\mathbf{U}$, то тогда из тождества антикоммутативности и тождества $x(yz) \equiv 0$ следует тождество $yzx \equiv 0$, и алгебра M нильпотентна.

3. О строении полилинейной части многообразия левонильпотентных алгебр Лейбница ступени три

В данном разделе статьи рассматривается многообразие всех алгебр Лейбница, удовлетворяющих тождественному соотношению

$$x(y(zt)) \equiv 0. \qquad (3)$$

Вероятно, впервые это многообразие было рассмотрено в работе [6], в которой оно получило обозначение ${}_3\mathbf{N}$. Сохраним это обозначение и в этой статье. В работе [7] были доказаны следующие теоремы:

Теорема. 1. Совокупность элементов вида

$$\theta_{(i,i_1,\dots,i_m,j_1,\dots,j_m)} = x_i(x_{i_1}x_{j_1})(x_{i_2}x_{j_2})\dots(x_{i_m}x_{j_m})x_{k_1}\dots x_{k_{n-2m-1}},$$

где $i_s < j_s,\ s = 1, ..., m,\ i_1 < i_2 < ... < i_m,\ k_1 < k_2 < ... < k_{n-2m-1}$, образуют базис пространства $P_n({}_3\mathbf{N})$.

2. Коразмерность вербального идеала многообразия ${}_3\mathbf{N}$ определяется равенством $c_n({}_3\mathbf{N}) = n \cdot inv(n-1)$, где $inv(m)$ – число инволюций (элементов порядка два) симметрической группы S_m.

Теорема. Для многообразия ${}_3\mathbf{N}$ кратности m_λ в разложении

$$\sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda = \chi_{{}_3\mathbf{N}}$$

равны числу угловых клеток диаграммы Юнга, соответствующей разбиению $\lambda \vdash n$.

Теорема. Для кодлины многообразия ${}_3\mathbf{N}$ выполняются следующие неравенства

$$p(n) < l_n({}_3\mathbf{N}) < \sqrt{2n} \cdot p(n),$$

где $p(n)$ — количество разбиений числа n.

Отметим, что многообразие ${}_3\mathbf{N}$ по своим свойствам похоже на многообразие алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$, подробно изученное в работах [8–12].

Приведем пример алгебры Лейбница, лежащей в многообразии ${}_3\mathbf{N}$. Пусть $T_s = K[t_1, \ldots, t_s]$ — кольцо многочленов от переменных $t_1, \ldots, t_s$. Рассмотрим алгебру Гейзенберга H_s с базисом $\{a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s, c\}$ и умножением $a_i b_j = -b_j a_i = \delta_{ij} c$, где δ_{ij} — символ Кронекера, произведение остальных базисных элементов равно нулю. Легко проверить, что алгебра H_s является нильпотентной ступени два алгеброй Ли. Превратим кольцо многочленов T_s в правый модуль алгебры H_s, в котором базисные элементы алгебры H_s действуют справа на полином f из T_s следующим образом:

$$fa_i = f'_i, fb_i = t_i f, fc = f,$$

где f'_i — частная производная полинома f по переменной t_i. Нетрудно доказать, что прямая сумма векторных пространств H_s и T_s с умножением по правилу:

$$(x+f)(y+g) = xy + fy, \tag{4}$$

где x, y из H_s; f, g из T_s является алгеброй Лейбница. Обозначим ее символом H^s. Полученная алгебра H^s принадлежит многообразию ${}_3\mathbf{N}$ при любом s. Проверим, что тождество (3) выполняется в H^s:

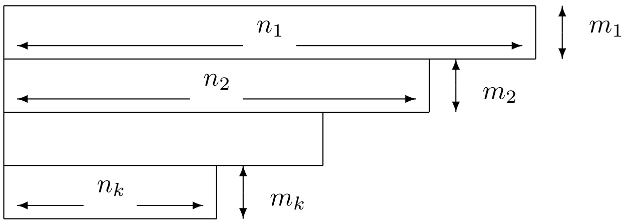
$$(x_1 + f_1)((x_2 + f_2)((x_3 + f_3)(x_4 + f_4))) = x_1(x_2(x_3 x_4)) + f_1(x_2(x_3 x_4)) = 0.$$

Это равенство верно, так как алгебра H_s нильпотентна ступени два.

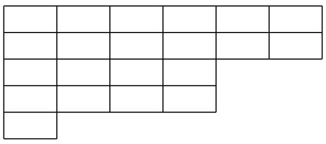
Определим общий вид элементов алгебры H^s, отличных от нуля. Так как алгебра Гейзенберга H_s нильпотентна ступени два, то произведение трех любых ее элементов равно нулю. Следовательно, в алгебре H^s все элементы степени 3 и выше должны содержать, по крайней мере, один полином из кольца T_s. Из формулы (4) следует, что элементы вида xf, где $x \in H_s,\ f \in T_s$, равны нулю. Кроме того, если произведение в элементе алгебры H^s содержит два сомножителя из T_s, то он также равен нулю согласно определению алгебры H^s. Следовательно, все ненулевые произведения алгебры H^s с числом сомножителей больше двух должны содержать ровно один полином на первом месте. Если элемент алгебры H^s содержит полином вне первого кососимметрического набора, то он представим в виде суммы слагаемых, каждое из которых не содержит указанный полином на первом месте, и поэтому равно нулю. Следовательно, ненулевые элементы алгебры H^s содержат полином f в первом кососимметрическом наборе.

Как уже упоминалось ранее, пространство полилинейных компонент степени n некоторого многообразия алгебр Лейбница разлагается в прямую сумму неприводимых подмодулей, соответствующих всевозможным диаграммам Юнга, содержащим n клеток; причем два модуля изоморфны тогда и только тогда, когда они отвечают одной и той же диаграмме. В работе [7] доказано, что число изоморфных слагаемых в указанной сумме для пространства $P_n({}_3\mathbf{N})$ равно числу угловых клеток соответствующей диаграммы Юнга.

Пусть задана диаграмма Юнга с n клетками, содержащая k угловых клеток, то есть отвечающая разбиению $\lambda = (n_1^{m_1}, n_2^{m_2}, \ldots, n_k^{m_k})$, где $n_1 > n_2 > \ldots > n_k > 0$ и $n_1m_1 + n_2m_2 + \ldots + n_km_k = n$, то есть диаграмма вида:



Рассмотрим частный случай диаграммы такого вида. Пусть $n = 21$ и $\lambda = (6, 6, 4, 4, 1)$. Тогда соответствующая диаграмма Юнга имеет вид:



По этой диаграмме построим следующие элементы:

$$g_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4\widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_3\widehat{x}_4\overline{\overline{x}}_1\overline{\overline{x}}_2\overline{\overline{x}}_3\overline{\overline{x}}_4\widetilde{\widetilde{x}}_1\widetilde{\widetilde{x}}_2\widehat{\widehat{x}}_1\widehat{\widehat{x}}_2,$$

$$g_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5\widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_3\widehat{x}_4\overline{\overline{x}}_1\overline{\overline{x}}_2\overline{\overline{x}}_3\overline{\overline{x}}_4\widetilde{\widetilde{x}}_1\widetilde{\widetilde{x}}_2\widehat{\widehat{x}}_1\widehat{\widehat{x}}_2,$$

$$g_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4\widetilde{x}_5\widehat{x}_1\widehat{x}_2\widehat{x}_3\widehat{x}_4\overline{\overline{x}}_1\overline{\overline{x}}_2\overline{\overline{x}}_3\overline{\overline{x}}_4\widetilde{\widetilde{x}}_1\widetilde{\widetilde{x}}_2\widetilde{\widetilde{x}}_3\widetilde{\widetilde{x}}_4\widehat{\widehat{x}}_1\widehat{\widehat{x}}_2.$$

Используя обозначения, введенные для операторов в первом пункте статьи, договоримся стандартный полином от операторов $X_1, X_2, \ldots, X_m$ обозначать через $\overline{St}_m = \overline{St}_m(X_1, \ldots, X_m) = \overline{X}_{p(1)} \ldots \overline{X}_{p(n)}$. Отметим, что стандартные полиномы, выражающие разные альтернированные наборы переменных, мы будем записывать, используя разные верхние символы. В этих обозначениях также имеет место обобщение на случай степени стандартного полинома от операторов. Тогда элементы g_1, g_2 и g_3 можно записать следующим образом:

$$g_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5\widetilde{St}_4^3\widehat{St}_2^2,$$

$$g_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\widetilde{St}_5\widehat{St}_4^2\overline{\overline{St}}_2^2,$$

$$g_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2\widetilde{St}_5\widehat{St}_4^3\overline{\overline{St}}_2.$$

Вернемся к общему случаю. Пусть, как и прежде, диаграмма Юнга отвечает разбиению $\lambda = (n_1^{m_1}, n_2^{m_2}, \ldots, n_k^{m_k})$, где $n_1 > n_2 > \ldots > n_k > 0$ и $n_1m_1 + n_2m_2 + \ldots + n_km_k = n$. Тогда ей соответствуют элементы следующего вида:

$$g_1 = (\overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_{d_k})\widetilde{St}_{d_k}^{n_k-1}\widehat{St}_{d_{k-1}}^{n_{k-1}-n_k} \ldots \overline{\overline{St}}_{d_2}^{n_3-n_2}\widetilde{\widetilde{St}}_{d_1}^{n_2-n_1},$$

$$g_2 = (\overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_{d_{k-1}})\widetilde{St}_{d_k}^{n_k}\widehat{St}_{d_{k-1}}^{n_{k-1}-n_k-1} \ldots \overline{\overline{St}}_{d_2}^{n_3-n_2}\widetilde{\widetilde{St}}_{d_1}^{n_2-n_1},$$

$$\dots$$

$$g_k = (\overline{x}_1\overline{x}_2\dots\overline{x}_{d_1})\widetilde{St}^{n_k}_{d_k}\widehat{St}^{n_{k-1}-n_k}_{d_{k-1}}\dots\overline{\overline{St}}^{n_3-n_2}_{d_2}\widetilde{\widetilde{St}}^{n_2-n_1-1}_{d_1},$$

где $d_j = \sum_{i=1}^{j} m_i,\ j = 1, ..., k$.

Известно (см. [13, гл. 2.4, с. 54]), что линеаризация любого элемента g_m, где $m = 1, \dots, k$, порождает неприводимый KS_n-модуль, соответствующий зафиксированному разбиению λ. Обозначим через $W_m(\lambda)$ модуль, порождаемый элементом g_m.

Теорема. Для любого натурального числа $n \geqslant 1$ имеет место равенство

$$P_n = \bigoplus_{\lambda\vdash n}\bigoplus_{r=1}^{k(\lambda)} W_r(\lambda). \tag{5}$$

Доказательство. В работе [14] доказано, что число изоморфных неприводимых подмодулей в формуле (5) равно максимальному числу линейно независимых элементов вида g_i, $i = 1, \dots, k$, порождающих эти подмодули. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать линейную независимость элементов $g_1, \dots, g_k$. Предположим обратное. Пусть существует линейная зависимость

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_k g_k = 0, \tag{6}$$

где хотя бы один из α_i, $i = 1, \dots, k$ отличен от нуля. Предположим, что l — наименьший номер, такой, что $\alpha_l \neq 0$ и $\alpha_q = 0$, если $q < l$. Пусть теперь $d_j = 2p_j + \varepsilon_j$, где $\varepsilon_j = 1$, если d_j нечетно, и $\varepsilon_j = 0$, если d_j четно. Осуществим подстановку вместо переменных элементов $g_l, \dots, g_k$ элементов из алгебры H^s следующим образом: если $\varepsilon_j = 1$, то $x_{d_j} = a_{p_j+1}$ $(j \neq k)$, $x_{d_k} = f + a_{p_k+1}$; если $\varepsilon_j = 0$, то $x_{d_j} = b_{p_j}$ $(j \neq k)$, $x_{d_k} = f + b_{p_k}$. Элементы, получаемые в результате подстановки из $g_l, \dots, g_k$, обозначим через $v_l, \dots, v_k$ соответственно. Тогда элементы $v_{l+1}, \dots, v_k$ будут равны нулю по определению алгебры H^s, так как из их строения видно, что они не содержат многочлен f на первом месте слева.

Рассмотрим теперь следующий частный вид элемента:

$$g_l = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5\overline{x}_6\overline{\overline{x}}_1\overline{\overline{x}}_2\overline{\overline{x}}_3\overline{\overline{x}}_4\overline{\overline{x}}_5\overline{\overline{x}}_6\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\widetilde{x}_3\widetilde{x}_4\widetilde{\widetilde{x}}_1\widetilde{\widetilde{x}}_2\widetilde{\widetilde{x}}_3.$$

После подстановки вместо переменных этого набора мы получим элемент:

$$v_l = \overline{a}_1\overline{b}_1\overline{a}_2\overline{b}_2\overline{a}_3\overline{f+b_3}\,\overline{\overline{a}}_1\overline{\overline{b}}_1\overline{\overline{a}}_2\overline{\overline{b}}_2\overline{\overline{a}}_3\overline{\overline{f+b_3}}\,\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1\widetilde{a}_2\widetilde{b}_2\widetilde{\widetilde{a}}_1\widetilde{\widetilde{b}}_1\widetilde{\widetilde{a}}_2 \equiv$$

$$\equiv (-1)^5 f\overline{a}_1\overline{b}_1\overline{a}_2\overline{b}_2\overline{a}_3\overline{\overline{a}}_1\overline{\overline{b}}_1\overline{\overline{a}}_2\overline{\overline{b}}_2\overline{\overline{a}}_3\overline{\overline{b}}_3\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1\widetilde{a}_2\widetilde{b}_2\widetilde{\widetilde{a}}_1\widetilde{\widetilde{b}}_1\widetilde{\widetilde{a}}_2 \equiv$$

$$\equiv \frac{-1}{2^8} f(\overline{a}_1\overline{b}_1)(\overline{a}_2\overline{b}_2)\overline{a}_3(\overline{\overline{a}}_1\overline{\overline{b}}_1)(\overline{\overline{a}}_2\overline{\overline{b}}_2)(\overline{\overline{a}}_3\overline{\overline{b}}_3)(\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1)(\widetilde{a}_2\widetilde{b}_2)(\widetilde{\widetilde{a}}_1\widetilde{\widetilde{b}}_1)\widetilde{\widetilde{a}}_2 \equiv$$

$$\equiv \frac{-1}{2^8} fcccccccca_3a_2 \equiv \frac{-1}{2^8} fa_3a_2.$$

Вернемся к общему случаю. Согласно рассуждениям, проведенным ранее, в элементе v_l ненулевыми являются только те слагаемые, которые содержат ровно один многочлен f на первом месте; то есть среди первых n_k кососимметрических наборов (в которые входит одна из сумм $f + a_{l_k+1}$ или $f + b_{p_k}$), только первый набор содержит многочлен f, а остальные – второе слагаемое a_{p_k+1} или b_{p_k}. В первом кососимметрическом наборе многочлен f изначально стоит последним. Для того чтобы он оказался на первом месте, его необходимо $d_k - 1$ раз переставить местами с элементами слева от него. Поэтому элемент v_l получит коэффициент $(-1)^{d_k-1}$. Кроме того, элемент v_l после многочлена f содержит либо элементы

a_ib_i, стоящие рядом, либо элементы a_i отдельно. Пары элементов a_ib_i объединим в скобки, вследствие чего каждая пара дает коэффициент $\frac{1}{2}$. Произведение элементов a_ib_i внутри скобок равно c, поскольку символ Кронекера δ_{ii} равен 1. Так как умножение многочлена f на c справа дает снова многочлен f, то в элементе v_l справа от f останутся только элементы a_i, стоящие вне скобок. Поэтому элемент v_l примет вид:

$$v_l = \frac{(-1)^{d_k-1}}{2^r} f a_{p_k+\varepsilon_k}^{\varepsilon_k(n_k-2)+1} a_{p_{k-1}+1}^{\varepsilon_{k-1}(n_{k-1}-n_k)} \dots a_{p_1+1}^{\varepsilon_1(n_1-n_2)},$$

где $r = p_1(n_1 - n_2) + p_2(n_2 - n_3) + \ldots + p_{k-1}(n_{k-1} - n_k) + p_k n_k + \varepsilon_k - 1$. Многочлен f мы можем выбрать таким образом, чтобы результат его дифференцирования по переменным $t_1, \ldots, t_s$ был отличен от 0. Таким образом, элемент v_l также отличен от нуля. Отметим, что элементы $v_{l+1}, ..., v_k$ при такой подстановке равны нулю, поскольку не содердат полином из кольца T_s в первом кососимметрическом наборе.

Вернемся к линейной комбинации (6). По предположению $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{l-1} = 0$. После осуществления подстановки эта линейная комбинация примет вид: $\alpha_l \cdot v_l + \alpha_{l+1} \cdot 0 + \ldots + \alpha_k \cdot 0 = 0$, где $v_l \neq 0$. Следовательно, $\alpha_l = 0$. Мы получили противоречие с предположением. Значит, все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ в линейной комбинации (6) равны нулю, то есть элементы $g_1, g_2, \ldots, g_k$ линейно независимы. Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность своему научному руководителю С.П. Мищенко за постановку задач, полезные советы и внимание к работе.

Литература

[1] Блох А.М. Об одном обобщении понятия алгебры Ли // Доклады Академии наук СССР, 1965. Т. 18. № 3. С. 471–473.

[2] Мальцев А.И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Матем. сб. 1950. Т. 26. № 1. С. 19–33.

[3] Зельманов Е.И. Об энгелевых алгебрах Ли // ДАН СССР. 1987. Т. 292. № 2. С. 265–268.

[4] Фролова Ю.Ю. О нильпотентности энгелевой алгебры Лейбница // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 3. С. 63–65.

[5] Cohn P.M. A non-nilpotent Lie ring satisfying the Engel condition and a non-nilpotent Engel group / P.M. Cohn [et al.] // Proc. Cambridge Phil. Soc.: Math. and Phys. Sci., 1955. 51. № 3. P. 401–405.

[6] Абанина Л.Е., Мищенко С.П. Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения. Труды девятых математических чтений МГСУ, М.: Союз, 2002. С. 95–99.

[7] Абанина Л.Е. Структура и тождества некоторых многообразий алгебр Лейбница: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ульяновск: УлГУ, 2003. 65 с.

[8] Воличенко И.Б. О многообразии алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$ над полем характеристики нуль // ДАН БССР 1981. Т. 25. № 12. С. 1063–1066.

[9] Воличенко И.Б. Многообразия алгебр Ли с тождеством $[[x_1x_2x_3],[x_4x_5x_6]] \equiv 0$ над полем характеристики нуль // Сиб. матем. журн, 1984. Т. 25. № 3. С. 40–54.

[10] Джамбруно А., Зайцев М.В., Мищенко С.П. Кратности характеров полилинейной части многообразия $\mathbf{AN}_2$ // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Фундаментальные проблемы математики и механики. 1998. Вып. 1(5). С. 59–62.
[11] Зайцев М.В., Мищенко С.П. Новое экстремальное свойство многообразия алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$ // Вестник МГУ. Сер. 1. 1999. № 5. С. 18–23.
[12] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. On the colength of a variety of Lie algebras // International Journal of Algebra and Computation. 1999. Vol. 9. № 5. P. 483–491.
[13] Giambruno A., Zaicev M.V. Polynomial Identities and Asymptotic Methods // Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence. RI. 2005. Vol. 122.
[14] Мищенко С.П., Зайцев М.В. О кодлине многообразий линейных алгебр // Математические заметки, 2006. Т. 79. № 4. С. 553–559.

Поступила в редакцию 18/V/2011;
в окончательном варианте — 18/V/2011.

ON SEVERAL VARIETIES OF LEIBNIZ ALGEBRAS

© 2011 T.V. Skoraya, Yu.Yu. Frolova[3]

The paper is devoted to two new results concerning varieties of Leibniz algebras. In case of prime characteristic p we construct an example of a non-nilpotent variety of Leibniz algebras with Engel condition. In case of field of characteristic zero we obtain a new result concerning the space of multilinear components of the variety of left-nilpotent Leibniz algebra of class three.

Key words: Leibniz algebra, Engel condition, variety of algebras, Young diagram.

Paper received 18/V/2011.
Paper accepted 18/V/2011.

[3]Skoraya Tatyana Vladimirovna (skorayatv@yandex.ru), Frolova Yuliya Yurievna (yuyufrolova@mail.ru), the Dept. of Algebraic and Geometric Computations, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432700, Russian Federation.