ФИЗИКА

УДК 130.145

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В НЕВЫРОЖДЕННОЙ ДВУХФОТОННОЙ МОДЕЛИ ТАВИСА — КАММИНГСА[1]

© 2011 Е.К. Башкиров, М.С. Мастюгин[2]

Исследовано влияние диполь-дипольного взаимодействия на перепутывание состояний двух атомов в различных начальных W-состояниях в модели Тависа — Каммингса с вырожденными двухфотонными переходами. Показано, что диполь-дипольное взаимодействие между атомами приводит к стабилизации атомного перепутывания.

Ключевые слова: двухатомная модель, невырожденные двухфотонные переходы, диполь-дипольное взаимодействие, атом-атомное перепутывание

Введение

Перепутанные состояния играют фундаментальную роль во всех эффективных протоколах физики квантовых вычислений и квантовой информатики. В последние годы предложены многочисленные схемы генерации перепутанных состояний в двух и многочастичных системах [1] Среди них системы двухуровневых атомов, взаимодействующих с электромагнитными полями в резонаторах. Однако возникающие в таких системах атомные перепутанные состояния оказываются нестабильными за счет осцилляций Раби. В результате в таких системах периодически происходят как исчезновения, так и восстановления атомного перепутывания. В квантовой информатике такие эффекты получили названия мгновенной смерти и рождения перепутывания. Недавно в работе [2] на примере двухатомной модели с невырожденным двухфотонным взаимодействием было исследовано влияние прямого диполь-дипольного взаимодействия на динамику атомного перепутывания. В качестве начальных перепутанных состояний системы "атом+поле" были использованы белловские состояния. При этом авторы показали, что эффект мгновенной смерти перепутывания заметно ослабляется или полностью сводится на нет для определенных перепутанных беловских начальных состояний системы за счет включения диполь-дипольного взаимодействия. В нашей работе [3] найден точное

[1]Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы по лоту "Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области оптики, лазерной физики и лазерных технологий", шифр "2010–1.1–122–084" (номер государственного контракта 14.740.11.0063).

[2]Башкиров Евгений Константинович (bash@ssu.samara.ru), Мастюгин Михаил Сергеевич (mast12basket@rambler.ru), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

решение для оператора эволюции модели Тависа — Каммингса с невырожденными двухфотонными переходами, с помощью которого легко может быть найдена временная волновая функция полной системы при любом начальном состоянии. Поэтому представляет интерес продолжить начатые в [2] исследования влияния диполь-дипольного взаимодействия на динамику атомного перепутывания и для других начальных перепутанных состояний атом-полевой системы. В настоящей работе в качестве начальных состояний нами выбраны W-перепутанные состояния. Такой выбор обусловлен тем, что именно такие атом-полевые перепутанные состояния привлекают в последнее время особое внимание в связи с задачами разработки квантовых протоколов передачи информации. В последнее время предложено также большое число возможных схем генерации таких перепутанных состояний [4].

1. Модель

Рассмотрим два идентичных двухуровневых атома, резонансно взаимодействующих с двухмодовым квантовым электромагнитным полем в идеальном резонаторе посредством невырожденных двухфотонных переходов, при наличии прямого диполь-дипольного взаимодействия между атомами. В представлении взаимодействия и приближении вращающейся волны гамильтониан такой модели можно представить в виде:

$$H_I = \hbar g \sum_{i=1}^{2} (a_1^+ a_2^+ R_i^- + R_i^+ a_1 a_2) + \hbar\Omega (R_1^+ R_2^- + R_2^+ R_1^-), \tag{1}$$

где a_j^+ и a_j — операторы рождения и уничтожения фотонов j-той резонаторной моды ($j = 1, 2$, R_i^+ и R_i^- — повышающий и понижающий оператор в i-м атоме ($i = 1, 2$), g — константа взаимодействия атомов с полем и Ω — константа прямого диполь-дипольного взаимодействия атомов.

Обозначим через $\mid +\rangle$ и $\mid -\rangle$ возбужденное и основное состояние двухуровневого атома. Тогда двухатомная волновая функция может быть представлена в виде комбинации волновых векторов вида $\mid \alpha, \beta\rangle = \mid \alpha\rangle \mid \beta\rangle$, где $\alpha, \beta = +, -$. Атом-полевая система в идеальном резонаторе обладает унитарной динамикой, которая в представлении взаимодействия описывается оператором эволюции вида $U_I(t) = \exp(-\imath H_I t/\hbar)$. Если система, включающая атомы и поле, находится в начальный момент времени в чистом состоянии, то ее вектор состояния в любой момент времени в представлении взаимодействия может быть представлен в виде

$$|\Psi(t)\rangle = U_I(t) |\Psi\rangle(0). \tag{2}$$

В двухатомном базисес $\mid +, +\rangle$, $\mid +, -\rangle$, $\mid -, +\rangle$, $\mid -, -\rangle$ оператор эволюции $U_I(t)$ для рассматриваемой модели может быть записан как [3]

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь

$$U_{11} = 1 + 2a_1 a_2 \frac{A}{\lambda} a^+{}_1 a^+{}_2, \quad U_{14} = 2a_1 a_2 \frac{A}{\lambda} a_1 a_2,$$

$$U_{41} = 2a_1^+ a_2^+ \frac{A}{\lambda} a_1^+ a_2^+, \quad U_{44} = 1 + 2a_1^+ a_2^+ \frac{A}{\lambda} a_1 a_2,$$

$$U_{12} = U_{13} = a_1 a_2 \frac{B}{\theta}, \quad U_{21} = U_{31} = \frac{B}{\theta} a_1^+ a_2^+,$$

$$U_{24} = U_{34} = \frac{B}{\theta} a_1 a_2, \quad U_{42} = U_{43} = a_1^+ a_2^+ \frac{B}{\theta},$$

$$U_{22} = U_{33} =$$

$$= \frac{\exp\left[-\imath \frac{g}{2}(\alpha+\theta)t\right]}{4\theta} \left\{[1-\exp(\imath g\theta t)]\alpha + 2\theta \exp(\imath \frac{g}{2}(3\alpha+\theta)t] + \theta[1+\exp(\imath g\theta t)]\right\},$$

$$U_{23} = U_{32} =$$

$$= \frac{\exp\left[-\imath \frac{g}{2}(\alpha+\theta)t\right]}{4\theta} \left\{[1-\exp(\imath g\theta t)]\alpha - 2\theta \exp(\imath \frac{g}{2}(3\alpha+\theta)t] + \theta[1+\exp(\imath g\theta t)]\right\},$$

где

$$A = \exp\left[-\imath \frac{g\alpha}{2} t\right] \left\{\cos\left(\frac{g\theta}{2}t\right) + \imath \frac{\alpha}{\theta} \sin\left(\frac{g\theta}{2}t\right)\right\} - 1,$$

$$B = \exp\left[-\imath \frac{g}{2}(\alpha+\theta)t\right] [1-\exp(\imath g\theta t)]$$

и

$$\alpha = \frac{\Omega}{g}, \quad \lambda = 2(a_1 a_2 a^+{}_1 a^+{}_2 + a^+{}_1 a^+{}_2 a_1 a_2), \quad \theta = \sqrt{8(a_1 a_2 a^+{}_1 a^+{}_2 + a^+{}_1 a^+{}_2 a_1 a_2) + \alpha^2}.$$

2. Вычисление параметра перепутывания и обсуждение результатов

Предположим, что атом-полевая система приготовлена в начальный момент времени в перепутанном состоянии W-типа вида

$$|\Psi(0)\rangle = a|+,-;0,0\rangle + b|-,+;0,0\rangle + c|-,-;1,1\rangle, \tag{4}$$

где $|n_1, n_2\rangle$ — двухмодовое полевое состояние с определенным числом фотонов в каждой из мод и коэффициенты удовлетворяют условию нормировки $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$.

Используя соотношения (2)–(4), можно представить временную волновую функцию системы в в виде

$$|\Psi(t)\rangle = X_1|+,-;0,0\rangle + X_2|-,+;0,0\rangle + X_3|-,-;1,1\rangle, \tag{5}$$

где

$$X_1 = (U_{22})_{0,0}\, a + (U_{23})_{0,0}\, b + \frac{B_{0,0}}{\theta_{0,0}}\, c,$$

$$X_2 = (U_{23})_{0,0}\, a + (U_{23})_{0,0}\, b + \frac{B_0}{\theta_{0,0}}\, c,$$

$$X_1 = \frac{B_{0,0}}{\theta_{0,0}}\, a + \frac{B_{0,0}}{\theta_{0,0}}\, b + (1 + 2\frac{A_{0,0}}{\lambda_{0,0}})\, c.$$

Здесь мы ввели обозначение $S_{n_1,n_2} = \langle n_1|\langle n_2|S|n_1\rangle|n_1\rangle$, где S – произвольный оператор, зависящий от переменных поля.

Информация относительно перепутывания состояний атомов содержится в редуцированной атомной матрице плотности $\rho_A(t)$, которая может быть получена при усреднении полной матрицы плотности системы "атомы+поле" $\rho_{AF}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ по переменным резонаторного поля

$$\rho_A(t) = Tr_F\ \rho_{AF}(t). \tag{6}$$

В двуатомном базисе $|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle$ редуцированная матрица плотности (6) может быть записана в виде

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |X_1|^2 & X_1X_2^* & 0 \\ 0 & X_2X_1^* & |X_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |X_3|^2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для количественной оценки степени перепутывания двух двухуровневых атомов воспользуемся критерием перепутанности двух кубитов Вуутерса [5]. Для редуцированной атомной матрицы плотности (7) соответствующий параметр перепутывания дается выражением

$$C(\rho_A) = 2\ \max\{0, |X_1X_2|\}. \tag{8}$$

Рассмотрим также другое начальное перепутанное состояние W-типа:

$$|\Psi(0)\rangle = a|+,+;0,0\rangle + b|+,-;1,1\rangle + c|-,+;1,1\rangle. \tag{9}$$

В этом случае временная волновая функция системы может быть записана в виде

$$|\Psi(t)\rangle = X_1|+,+;0,0\rangle + X2|+,-;1,1\rangle + X_3|-,+;1,1\rangle + X_4|-,-;2,2\rangle, \tag{10}$$

где

$$X_1 = (1 + 2\frac{A_{1,1}}{\lambda_{1,1}})\, a + \frac{B_{1,1}}{\theta_{1,1}}\, b + \frac{B_{1,1}}{\theta_{1,1}}\, c,$$

$$X_2 = \frac{B_{1,1}}{\theta_{1,1}}\, a + (U_{22})_{1,1}\, b + (U_{23})_{1,1}\, c,$$

$$X_3 = \frac{B_{1,1}}{\theta_{1,1}} a + (U_{23})_{1,1} b + (U_{22})_{1,1} c,$$

$$X_4 = 4\,\frac{A_{1,1}}{\lambda_{1,1}}\, a + 2\,\frac{B_{1,1}}{\theta_{1,1}}\, b + 2\,\frac{B_{1,1}}{\theta_{1,1}}\, c.$$

В двухатомном базисе соответствующая начальному состоянию (9) редуцированная атомная матрица плотности есть

$$\rho_A = \begin{pmatrix} |X_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |X_2|^2 & X_2X_3^* & 0 \\ 0 & X_3X_2^* & |X_3|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |X_4|^2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

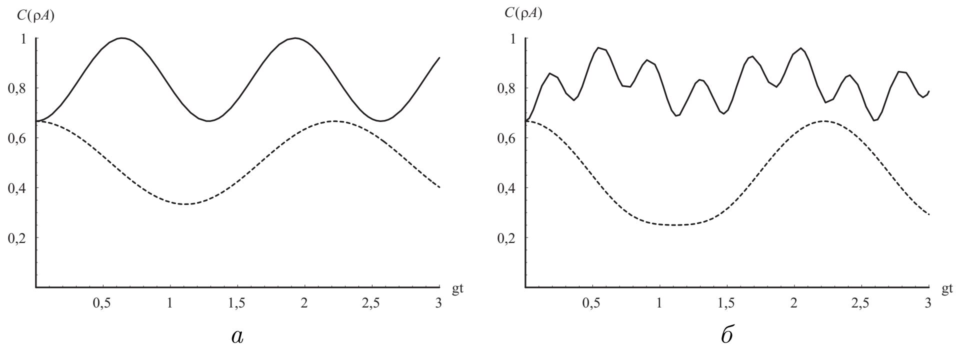

Рис. 1. Временная зависимость параметра перепутывания $C(\rho_A)$ для двухатомной системы с начальным состоянием (4) и значениями коэффициентов: $a = b = c = 1/\sqrt{3}$ (а) и $a = \sqrt{2/3}, b = c = 1/\sqrt{3}$. Параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = \Omega/g = 4$ (сплошные линии) и $\alpha = \Omega/g = 0$ (штриховые линии)

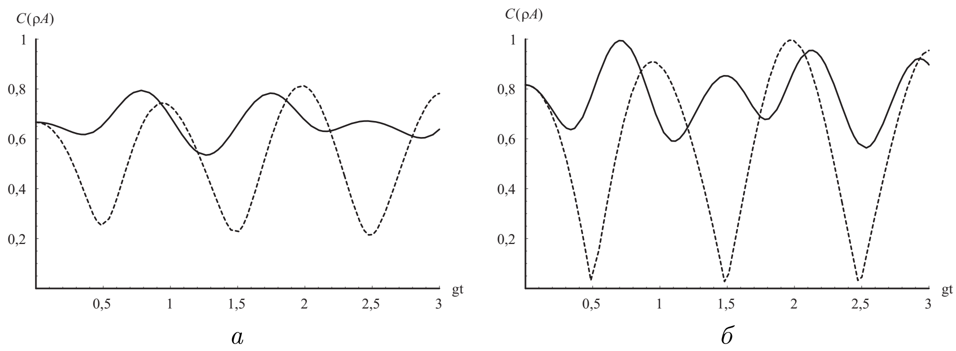

Рис. 2. Временная зависимость параметра перепутывания $C(\rho_A)$ для двухатомной системы с начальным состоянием (9) и значениями коэффициентов: $a = b = c = 1/\sqrt{3}$ (а) и $a = 0, b = c = 1/\sqrt{2}$. Параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = \Omega/g = 10$ (сплошные линии) и $\alpha = \Omega/g = 0$ (штриховые линии)

Параметр перепутывания для рассматриваемого случая есть

$$C(\rho_A) = 2\ \max\{0, |X_2X_3| - |X_1X_4|\}. \tag{12}$$

Результаты численного моделирования параметра перепутывания для начальных состояний двухатомной системы вида (4) и (9) представлены на рис. 1, 2. Из рисунков хорошо видно, что для обоих начальных состояний эффект мгновенной смерти перепутывания атомов отсутствует, в отличие от начальных белловских состояний [2], однако имеют место осцилляции параметра перепутывания. При этом диполь-дипольное взаимодействие приводит во всех случаях к значительной стабилизация атом-атомного перепутывания. Другой механизм стабилизации атомного перепутывания, связанный с наличием внешнего классического электромагнитного поля, будет рассмотрен для двухатомной модели с невырожденными двухфотонными переходами в нашей следующей работе.

Литература

[1] Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambrige: Cambrige University Press, 2000. 814 p.

[2] Zhang G-feng, Chen Zi-yu. The entanglement character between atoms in the non-degenerate two photons Tavis — Cummings model // Optics Communications. 2007. Vol. 275. P. 274–277.

[3] Bashkirov E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise // Laser Phys. Lett. 2006. V. 3. № 3. P. 145–150.

[4] Schumacker D., Westmoreland M.D. Quantum Processes, Systems, and Information, New York: Oxford University Press, 2010. 469 p.

[5] Wootters W.K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. № 10. P. 2245–2248.

Поступила в редакцию 4/*III*/2011;
в окончательном варианте — 4/*III*/2011.

ENTANGLEMENT IN NONDEGENERATE TWO-PHOTON TAVIS — CUMMINGS MODEL

© 2011 E.K. Bashkirov, M.S. Mastyugin[3]

The influence of dipole-dipole interaction on the entanglement between two atoms with different initial W-like states in Tavis — Cummings model with degenerate two-photon transitions has been investigated. The results show that the dipole-dipole interaction leads to the stabilization of atomic entanglement.

Key words: two-atom model, nondegenerate two-photon transitions, dipole-dipole interaction, atom-atom entanglement.

Paper received 4/*III*/2011.
Paper accepted 4/*III*/2011.

[3]Bashkirov Evgeniy Konstantinovich (bash@ssu.samara.ru), Mastyugin Mihail Sergeevich (mast12basket@rambler.ru), the Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.