УДК 368.1:519.22

В.Н. Никишов, А.Л. Сараев*

СТАБИЛИЗАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ РИСКОВ ПЕРЕСТРАХОВАНИЕМ

В публикуемой статье исследуется перестрахование портфеля рисков на базе эксцедента убытка и эксцедента убыточности. На основе нормально-степенной аппроксимации и трехпараметрического гамма распределения получены выражения для оценки стоимости перестраховочного леера. Вычислены моменты распределения совокупного размера убытков для портфеля рисков при наличии перестрахования. Предложена методика построения оптимального портфеля с минимальной дисперсией.

Ключевые слова: аппроксимация, перестрахование, убыток, убыточность, портфель рисков, гамма-распределение, предельное распределение.

Пусть в процесс страхования включен начальный фонд U_0, в который поступают премии P_t, и из него осуществляются выплаты S_t за период времени t. Таким образом, размеры фонда U_t за интервал $(0,t)$ определятся соотношением

$$U_t = U_0 + P_t - S_t .$$

Если требования по выплатам превысят начальный фонд и поступления, то ресурсы компании будут исчерпаны, что приведет к возможному разорению страховщика. Для определения изменений величины U_t необходимо вычислить величины P_t и S_t.

Общий размер выплат S_t есть сумма убытков

$$S_t = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_v .$$

Здесь $v(t)= v(0,t)$ – случайная величина количества убытков или требований о выплате за интервал времени $(0,t)$.

Будем считать процесс поступления требований о выплатах стационарным, ординарным, а число требований выплат независимым на непересекающихся интервалах времени. Очевидно, что такой процесс подчиняется закону распределения Пуассона

$$P(v = k) = \pi_k = \frac{(n\lambda_{00}t)^k}{k!} e^{-\lambda_0 t} .$$

Здесь

$$\lambda = \lambda_{00} \cdot t \cdot n = \lambda_0 \cdot n , \ \lambda_0 = \lambda_{00} \cdot t ,$$

Никишов Виктор Николаевич (TSh-sea05@yandex.ru), *Сараев Александр Леонидович* (alex_saraev@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$\lambda_{00} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P[v(\tau, \tau + \Delta t)]$$

– интенсивность процесса поступления требований от одного объекта страхования, n – количество объектов.

Будем предполагать, что размер предъявляемых требований является случайной величиной, имеющей гамма-распределение.

$$dP(x < Y < x + dx) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x) dx = g(x; \alpha, \beta) dx = dG(x; \alpha, \beta).$$

Ее начальные моменты имеют вид

$$v_1 = E(Y) = \frac{\alpha}{\beta}, v_2 = E(Y^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}, v_3 = E(Y^3) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta^3},$$

центральные моменты задаются выражениями

$$\mu_2 = Var(Y) = \sigma^2(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2} = v_2 + v_1^2, \mu_3 = \frac{2\alpha}{\beta^3}.$$

Параметры α, β определяются из фактических данных о среднем размере убытка и его дисперсии

$$v_1 = E(Y), \ \mu_2 = Var(Y) = \sigma^2(Y), \ \alpha = v_1^2 / \mu_2, \ \beta = v_1 / \mu_2.$$

Вычислим первые три момента случайной величины S_t

$$E(S_t) = m_1 = E(Y + ... + Y_v) = E_v(E_y(S_t|v)) = E(v)E(Y) = \lambda \cdot v_1,$$

$$Var(S_t) = m_2 = \sigma^2(S_t) = E(Var(S_t|v)) + Var(E(S_t|v)) = \lambda v_2,$$

$$E(S_t - E(S_t))^3 = \lambda E(Y^3) = \lambda v_3.$$

Коэффициент асимметрии имеет вид

$$\gamma = \frac{E(S_t - E(S_t))}{\sigma^3(S_t)} = \frac{\lambda v_3}{[\lambda v_2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Поскольку сумма k случайных гамма-распределенных величин также является случайной гамма-распределенной величиной с параметрами $k\alpha, \beta$, то совокупный убыток имеет сложное распределение Пуассона

$$P(S_t < x) = P(Y_1 + ..Y_v < x) = F_{S_t}(x) = e^{-\lambda}[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} G(x; k\alpha, \beta)] =$$

$$= e^{-\lambda}[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda\beta^{\alpha})^k}{k!\Gamma(k\alpha)} \int_0^x u^{k\alpha-1} \exp(-\beta u) du] = e^{-\lambda}[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \gamma(\beta x; k\alpha)]. \quad (1)$$

Здесь $G(x;\alpha;\beta)=\gamma(\beta x;a)=\int\limits_0^x \upsilon^{\alpha-1}e^{-\upsilon}d\upsilon$ — неполная гамма-функция.

1. Нормально-степенная аппроксимация

Рассмотрим нормально-степенную аппроксимацию. Введем нормированную величину

$$s=\frac{S_t-E(S_t)}{\sigma(S_t)}$$

и представим ее в виде ряда

$$s=b_0+b_1U+b_2U^2+...$$

Здесь U имеет нормальное стандартное распределение

$$P(U<x)=\Phi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt,\ \varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}.$$

Следовательно, $P(s<x)=F_S(x)=P(b(U)<x)=P(U<b^{-1}(x))=\Phi(b^{-1}(x))$.

Коэффициенты b_k можно определить из разложения Эджворта [1]

$$F_S(x)=\Phi(x)-\frac{\gamma}{3!}\Phi^{(3)}(x)+[\frac{\eta}{4!}\Phi^{(4)}(x)+\frac{10\gamma^2}{6!}\Phi^{(6)}(x)]-...$$

Здесь $m_k=E(S_t-E(S_t))^k, k>1$, $\Phi^{(k)}(x)=d^k\Phi(x)/dx^k$, $\gamma=\frac{m_3}{\sigma^3}=\frac{m_3}{[m_2]^{3/2}}$ — коэффициент асимметрии, $\eta=(\frac{m_4}{\sigma^4}-3)=(\frac{m_4}{[m_2]^{3/2}}-3)$ - коэффициент эксцесса.

Таким образом,

$$F_S(x)=\left(\begin{array}{l}\int\limits_0^x f_S(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x}\{1+\frac{\gamma}{3!}H_3(t)+[\frac{\eta}{4!}H_4(t)+\frac{10\gamma^2}{6!}H_6(t)]-...\}\varphi(t)dt=\\ =\Phi(b^{-1}(x))=\int\limits_{-\infty}^{b^{-1}(x)}\varphi(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(b(t))\frac{db(t)}{dt}dt\end{array}\right). \quad (2)$$

Здесь $H_m(t)=(-1)^m[d^m\varphi(t)/dt^m]/\varphi(t)$, $H_3(t)=(t^3-3t)$, $H_4(t)=t^4-6t^2+3$ — полиномы Эрмита [2].

Приравнивая подынтегральные выражения, найдем

$$b_0=-\frac{\gamma}{6}, b_1=1, b_2=\frac{\gamma}{6},\ b(U)\cong U+\frac{\gamma}{6}(U^2-1).$$

Следовательно,

$$F_N(x) \cong \Phi(b^{-1}(x)) = \Phi(\sqrt{\frac{9}{\gamma^2}+\frac{6x}{\gamma}+1}-\frac{3}{\gamma}),\ F_N(b(x)) = P(s < x+\frac{\gamma}{6}(x^2-1)) \cong \Phi(x). \quad (3)$$

Данное представление называется асимптотическим разложением Корниша-Фишера, а также известно как нормально-степенная аппроксимация или NP-аппроксимация [3–5].

Отметим, что выражения

$$F_N(b(x)) = P(s < b(x)) = P(s < x+\frac{\gamma}{6}(x^2-1)) = \Phi(x),$$

$$S_\varepsilon = E(S)+[z_\varepsilon+\frac{\gamma}{6}(z_\varepsilon^2-1)]\sigma(S) = m_1+(z_\varepsilon+\frac{\gamma}{6}(z_\varepsilon^2-1))\sqrt{m_2}$$

удобны для нахождения квантилей.

Пусть заданы количество объектов страхования (транспортных средств) n_1=300; n_2=500; n_3=750; n_4=1000, параметр λ_0=0,1 для одного транспортного средства, средний размер убытка и дисперсия v_1, v_2. Тогда размер ожидаемых страховых выплат с вероятностью $1-\varepsilon$ не превысит величины $S_\varepsilon : P(S \geq S_\varepsilon) = \varepsilon$ и зависит от параметров страхового портфеля. Для значения $\varepsilon = 0{,}05$ эта величина принимает значения

$$S_\varepsilon(300) = 40{,}5v_1; S_\varepsilon(500) = 63{,}5v_1; S_\varepsilon(750) = 91{,}4v_1;\ S_\varepsilon(1000) = 118{,}82v_1.$$

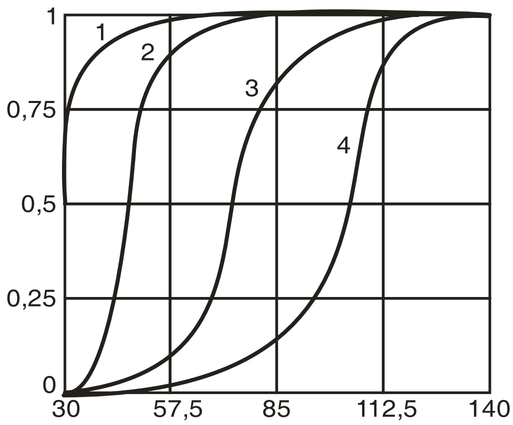

Рис. 1

На рис. 1 приведены графики зависимости функций распределения

$$F_S = F_S(\frac{S}{v_1}; n_k),\ F_N = F_N(\frac{S}{v_1}; n_k),\ \sqrt{v_2}/v_1 = 1/2$$

для разных объемов портфеля n_k. Для данного портфеля рисков они показывают близкие численные результаты расчета по формулам (1) и (3). Следует отметить, что выражение (1) нельзя применять при значениях $\lambda \geq 100$, а нормально-степенная аппроксимация (3) таких ограничений не имеет.

Размер ожидаемых страховых выплат с заданной вероятностью $(1-\varepsilon)$ не превысит величины

$$S_t = S_\varepsilon = m_1+[z_\varepsilon+\frac{\gamma}{6}(z_\varepsilon^2-1)]\sqrt{m_2}.$$

Размер страховой премии P_t устанавливается в размере большем, чем среднее значение ожидаемых страховых выплат

$$P_t = (1+\theta_0)E(S)\ .$$

Здесь θ_0 — нагрузка от 10 до 30 %, взимаемая в целях снижения вероятности разорения до величины 95–99 %. Обычно θ_0 устанавливается в фиксированном размере.

Пусть

$$\theta_0 = 10\%\ ,\ n = 1000;\ \lambda_0 = 0{,}1;\ v_1 = 1;\ \sqrt{\mu_2}\,/\,v_1 = 0{,}5,\ \varepsilon = 5\ \%\ ,$$

тогда

$$P_t = 110 v_1\ ;\ m_1 = 100 v_1;\ \ m_2 = 125 v_1;\ \ z_\varepsilon = 1{,}645;\ \ S_\varepsilon = 121 v_1\,.$$

В силу конкуренции размер θ_0, как правило, ниже необходимого. В данном случае налицо дефицит средств, в размере $11v_1$, и устранить его в условиях конкурентного рынка за счет увеличения нагрузки не удается. Рост тарифных ставок приведет к потере страхователей, а уменьшение размера страхового портфеля, в свою очередь, увеличивает коэффициент вариации выплат

$$k = \frac{\sqrt{S_\varepsilon}}{m_1}\,.$$

При этом вероятность разорения резко увеличивается, и в этом случае как раз и приходится применять одну из форм перестрахования.

2. Перестрахование на базе эксцедента убытка

Предположим, что страховщик возмещает по каждому убытку величину в размере

$$Y(d) = \begin{pmatrix} Y, Y < d \\ d, Y \ge d \end{pmatrix} = Y - (Y-d)_+\,.$$

Такой порядок возмещения применяется при непропорциональном перестраховании на базе эксцедента убытка (excess of loss) [6]. В этом случае перестраховщик возмещает свою часть в размере

$$(Y-d)_+ = \begin{pmatrix} 0, Y < d \\ Y-d, Y > d \end{pmatrix}.$$

Величина $Y(d)$ имеет следующие моменты:

$$E[Y(d)] = v_1(d) = v_1\cdot G(d;\alpha+1;\beta) + d\cdot(1-G(d;\alpha;\beta))\ ,$$

$$E[Y^2(d)] = v_2(d) = v_2\cdot G(d;\alpha+2;\beta) + d^2(1-G(d;\alpha;\beta))\ ,$$

$$E[Y^3(d)] = v_3(d) = v_3\cdot G(d;\alpha+3;\beta) + d^3(1-G(d;\alpha;\beta))\,.$$

В этих предположениях первые три момента $S_t(d)$ имеют вид:

$$E(S_t(d)) = m_1(d) = E(Y(d)+\ldots+Y_v(d)) = E_v(E_y(S_t(d)|v)) = E(v)E(Y(d)) = \lambda\cdot v_1(d)\ ,$$

$$Var(S_t(d)) = \sigma^2(S_t(d)) = E(Var(S_t(d)|v)) + Var(E(S_t(d)|v)) = \lambda E(Y^2(d)) = \lambda v_2(d),$$

$$E(S_t(d) - E(S_t(d)))^3 = \lambda E(Y^3(d)) = \lambda v_3(d).$$

Здесь $\gamma(d) = \dfrac{E(S_t(d) - E(S_t(d)))}{\sigma^3(S_t(d))} = \dfrac{\lambda v_3(d)}{[\lambda v_2(d)]^{3/2}}$ — коэффициент эксцесса, $E(.)$, $Var(.)$ — операторы взятия математического ожидания и дисперсии.

Нормально степенная аппроксимация нормированной величины

$$S(d) = x = \frac{S_t(d) - E(S_t(d))}{\sigma(S_t(d))}$$

имеет вид

$$F_D(x;d) \cong \Phi\left(\sqrt{\frac{9}{\gamma^2(d)} + \frac{6x}{\gamma(d)} + 1} - \frac{3}{\gamma(d)}\right), x > 1. \tag{4}$$

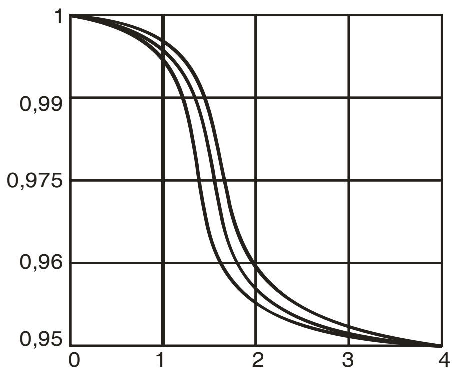

Рис. 2.

На рис. 2 приведены графики зависимости функции распределения

$$F_D = F_D\left(\frac{S_\varepsilon}{v_1}, \frac{d}{v_1}\right)$$

при различном объеме портфеля рисков $n_1 = 300$; $n_2 = 500$; $n_3 = 750$ от величины собственного удержания d. С ростом d значение перестрахования уменьшается, и кривые стремятся к соответствующим значениям

$$F_N = F_N\left(\frac{S_\varepsilon}{v_1}, n_k\right).$$

При наличии перестрахования необходимый размер страхового фонда на выплаты равен

$$S_\varepsilon(d,n) = m_1(d,n) + [z_\varepsilon + \frac{\gamma(d,n)}{6}(z_\varepsilon^2 - 1)]\sqrt{m_2(d,n)}. \tag{5}$$

Под стабилизацией портфеля понимается снижение коэффициента вариации портфеля

$$K(d,n) = \frac{S_\varepsilon(d,n)}{m_1(d,n)}$$

в зависимости от уменьшения величины собственного удержания d.

Необходимый размер нагрузки, при котором достигается заданный уровень вероятности неразорения $(1-\varepsilon)$, связан с данным коэффициентом соотношением

$$\theta(d,n) = K(d,n) - 1 = \frac{S_\varepsilon(d,n)}{m_1(d,n)} - 1 = [z_\varepsilon + \frac{\gamma(d,n)}{6}(z_\varepsilon^2 - 1)]\frac{\sqrt{m_2(d,n)}}{m_1(d,n)}.$$

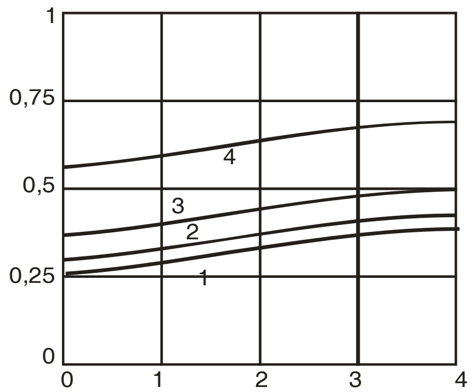

Рис. 3

На рис. 3 приведены графики зависимости $\theta(d,n_k)$ в зависимости от размера собственного удержания d при различных объемах портфеля n_k. С ростом d значения $\theta(d,n_k)$ стремятся к значениям

$$\theta(n_k) = \theta(\infty, n_k) = [z_\varepsilon + \frac{\gamma(n_k)}{6}(z_\varepsilon^2 - 1)]\sqrt{m_2} / m_1,$$

$$\gamma(n_k) = \gamma(\infty; n_k),\ m_2(n) = m_2(\infty, n_k).$$

Наиболее стабильный портфель имеет место при малых значениях d.

Размер средств, находящихся в распоряжении страховщика при наличии перестрахования, состоит из премии за вычетом платы перестраховщику в размере

$$(1+h)E(S - S(d)) = (1+h)(m_1(n) - m_1(d,n)).$$

Нагрузка перестраховщика h, как правило, процентов на 30 % больше, чем θ_0.

Находим $U_t(d,n) = U_0 + (1+\theta_0)m_1(n) - (1+h)[m_1(n) - m_1(d,n)]$.

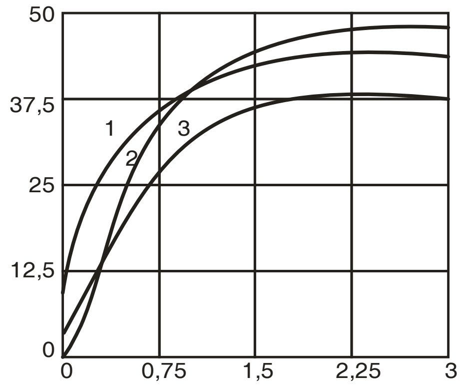

Рис. 4

На рис. 4 приведены графики размера средств страховщика $U(d,n_k)$ и размера ожидаемых выплат $S_\varepsilon(d,n_k)$ в зависимости от уровня собственного удержания d.

При размере дополнительного капитала U_0=5v_1 необходимый уровень собственного удержания $d \le 0{,}3v_1$. При размере U_0=105v_1 размер собственного удержания увеличивается до $d \le 0{,}76v_1$. Таким образом, данная методика позволяет выбирать оптимальный размер собственного удержания на базе перестрахования excess of loss.

3. Аппроксимация трехпараметрическим гамма-распределением

Представим совокупный размер убытков $S(d)$ в виде

$$S(d,n) = x_0(d,n) + V(a,b),$$

где V имеет гамма-распределение. Таким образом

$$P(S<x) = G_S(x-x_0;a,b,x_0) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^{x-x_0} t^{a-1}\exp(-bt)dt = \\ = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{b(x-x_0)} t^{a-1}\exp(-t)dt. \tag{6}$$

Приравнивая моменты, находим параметры трехпараметрического или сдвинутого гамма-распределения

$$a = a(d,n) = \frac{4}{\gamma^2(d,n)},\ b = b(d,n) = \frac{2}{\gamma(d,n)\sqrt{m_2(d,n)}}, \\ x_0 = x_0(d,n) = m_1(d,n) - \frac{2\sqrt{m_2(d,n)}}{\gamma(d,n)}. \tag{7}$$

Плотность сдвинутого гамма-распределения имеет вид

$$g(x;a,b) = \begin{pmatrix} f(x-x_0;a,b), x > x_0 \\ 0, x < x_0 \end{pmatrix},\ f(x;a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}\ . \tag{8}$$

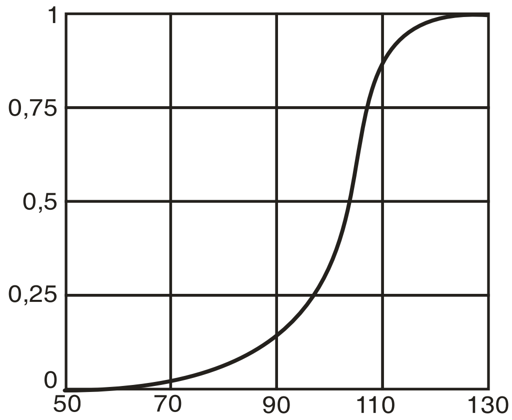

Рис. 5

На рис. 5 приведены графики распределения на основе выражения (1), нормально-степенной аппроксимации (3) и сдвинутого гамма-распределения (8). Численный анализ показывает практически полное совпадение результатов. Следует отметить, что при большом объеме портфеля рисков могут применяться только аппроксимации. При этом гамма-аппроксимация определена только при положительном значении коэффициента асимметрии γ $(d, n) > 0$, а NP-аппроксимация определена только в случае, если

$$S(d) > E(S(d)) = m_1(d), \;\; 0 < \gamma(d,n) < 1 .$$

4. Перестрахование на базе эксцедента убыточности

Перестрахование на базе эксцедента убытка более выгодно для перестраховщика, чем для страховщика, в то время как перестрахование на базе эксцедента убыточности (stop-loss) более выгодно страховщику [4]. Перестраховщик покрывает превышение размера совокупного убытка страховщика S над установленной величиной d собственным удержанием страховщика.

В этом случае совокупный убыток $S=\underline{\underline{S}}+\underline{S}$, где $\underline{\underline{S}}=(S-d)_+$ – доля перестраховщика, а $\underline{S}=S-\underline{\underline{S}}=S-(S-d)_+$ – доля страховщика.

Распределение S дается точным выражением (1) или аппроксимирующими выражениями (3) и (6). Это позволяет находить любые характеристики, связанные с перестрахованием. В частности, распределение $\underline{S}$ имеет вид

$$P(\underline{S}(d) < x) = \begin{pmatrix} F_S(x), x < d \\ 1, x \ge d \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим размер совокупного убытка страховщика при наличии перестрахования с заданной вероятностью ε

$$P(\underline{S}(d) \le \underline{S}_\varepsilon(d)) = 1-\varepsilon \,, \;\; \underline{S}_\varepsilon(d) = \begin{pmatrix} S_\varepsilon, d \ge S_\varepsilon \\ d, d < S_\varepsilon \end{pmatrix}, \;\; F_S(S_\varepsilon) = 1-\varepsilon \,.$$

Вычислим среднее значение

$$E(\underline{S}(d)) = \underline{m}_1(d) = \int_0^d x \cdot f_s(x)dx + d(1-F_S(d)) .$$

Применяя соотношение (1), находим

$$\underline{m}_1(d) = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\gamma(\beta d; k\alpha+1) + d(1-F_S(d)). \tag{9}$$

Для сдвинутого гамма-распределения формула (9) принимает вид

$$\underline{m}_1(d) = \int_0^{\infty}\begin{pmatrix} x, x<d \\ d, x\ge d\end{pmatrix} g(x;a;b)dx =$$
$$= x_0\gamma[b(d-x_0);a] + (\frac{a}{b})\gamma[b(d-x_0);\, a+1] + d(1-\gamma[b(d-x_0);a]). \tag{10}$$

Нормальная аппроксимация для величины S

$$P(S<x) = \Phi(\frac{S-m_1(n)}{\sqrt{m_2(n)}})$$

дает

$$\underline{m}_1(d) = m_1\Phi(\frac{d-m_1}{\sqrt{m_2}}) - \sqrt{m_2}\,\varphi(\frac{d-m_1}{\sqrt{m_2}}) + d(1-\Phi(\frac{d-m_1}{\sqrt{m_2}})). \tag{11}$$

Применение NP-аппроксимации в данном случае громоздко и здесь не приводится.

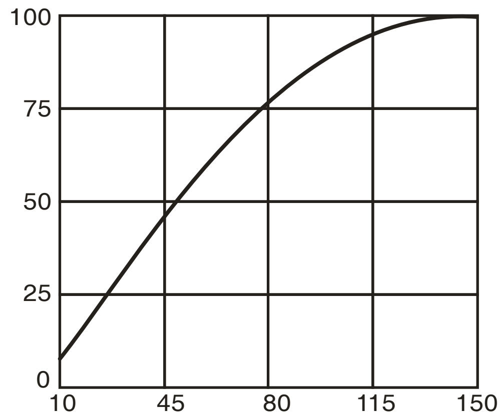

Рис. 6

На рис. 6 приведены средние значения риска страховщика в зависимости от размера собственного удержания d по формулам (9)–(11). Численные расчеты по этим формулам дают практически одинаковый результат.

Средний размер убытков, покрываемых перестраховщиком, равен

$$E(\underline{\underline{S}}(d)) = (S-d)_+ = \underline{\underline{m}}_1(d,n) = m_1(n) - \underline{m}_1(d). \tag{12}$$

Размер средств страховщика после получения страховой премии, уплаты перестраховочной премии и страховых выплат в пределах собственного удержания задается выражением

$$U = U0 + (1+\theta_0)m_1(n) - (1+h_0)[m_1(n) - \underline{m}_1(d)] - \underline{S}_{\varepsilon}(d). \tag{13}$$

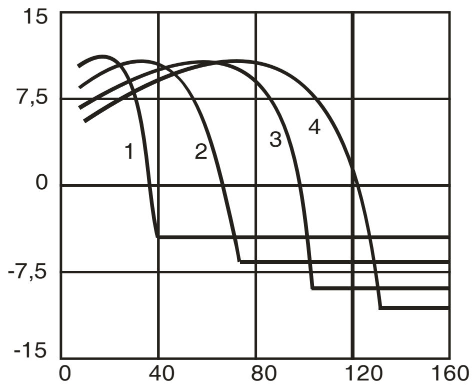

Рис. 7

На рис. 7 приведены графики зависимости размера средств страховщика $U(d,n_k)$ от собственного удержания d и размера портфеля n_k. Максимальный размер достигается при $U_0=10v_1$.

Для определения дисперсии выплат страховщика вычислим второй момент величины $\underline{S}$

$$E[(\underline{S})^2] = \int_{-\infty}^{(d-m_1)/\sqrt{m_2}} (m_1 + x\sqrt{m_2})^2 \varphi(x)dx =$$

$$= \Phi(\frac{d-m_1}{\sqrt{m_2}})[m_1^2 + m_2] - \varphi(\frac{d-m_1}{\sqrt{m_2}})[2m_1\sqrt{m_2} + m_2(\frac{d-m_1}{\sqrt{m_2}})]. \tag{14}$$

Отсюда

$$Var(\underline{S}) = E[(\underline{S})^2] - E^2[(\underline{S})] = E[(\underline{S})^2] - \underline{m}_1^2(d,n). \tag{15}$$

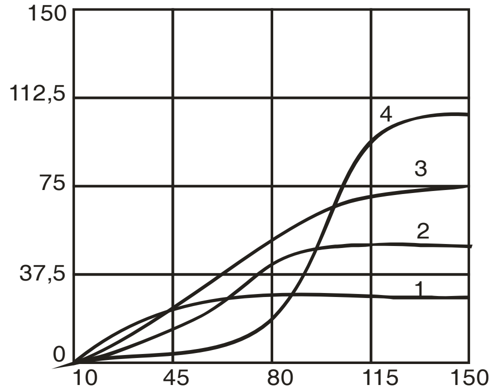

Рис. 8

На рис. 8 приведены графики среднеквадратичного отклонения в зависимости от размера собственного удержания

$$ds(d,n_k) = \sqrt{Var(\underline{S})} \,.$$

Для определения дисперсии выплат перестраховщика вычислим второй момент величины $\underline{\underline{S}}=(S-d)_+$

$$E[(\underline{\underline{S}})^2] = \int\limits_{(d-m_1)/\sqrt{m_2}}^{\infty} (m_1 + x\sqrt{m_2})^2 \varphi(x)dx =$$
$$= (1-\Phi(\frac{d-m_1}{\sqrt{m_2}}))[m_1^2 + m_2] + \varphi(\frac{d-m_1}{\sqrt{m_2}})[2m_1\sqrt{m_2} + m_2(\frac{d-m_1}{\sqrt{m_2}})]. \tag{16}$$

Отсюда

$$Var(\underline{\underline{S}}) = E[(\underline{\underline{S}})^2] - E^2[(\underline{\underline{S}})] = E[(\underline{\underline{S}})^2] - \underline{\underline{m}}_1^2(d,n). \tag{17}$$

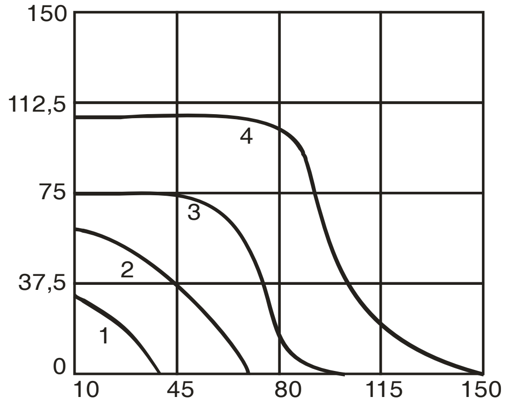

Рис. 9

На рис. 9 приведены графики среднеквадратичного отклонения в зависимости от размера собственного удержания *d*.

$$dds(d,n_k) = \sqrt{Var(\underline{\underline{S}})}\ .$$

Предложенная методика расчета параметров перестрахования на базе excess of loss и stop loss позволяет подобрать оптимальные значения параметров, позволяющие минимизировать вариацию выплат и максимизировать размер средств страховщика.

Библиографический список

1. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир. 1975. 648 с.
2. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
3. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М.: Наука, 1966. Т. 1. 588 с.
4. Современная актуарная теория риска / Р. Каас [и др.]. М.: Янус-К, 2007. 376 с.
5. Королев В.Ю., Беннинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007. 544 с.
6. Мак Т. Математика рискового страхования. М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2005. 432 с.

*V.N. Nikishov, A.L. Saraev**

STABILIZATION AND OPTIMIZATION OF PORTFOLIO RISK BY REINSURANCE

In the published article the reinsurance portfolio risk based on the excess of loss and excess of unprofitability is investigated. Based on the normal degree of approximation and the three-parameter gamma distribution, expressions for estimating the cost of reinsurance rails are obtained. The moments of the distribution of the total amount of losses for the portfolio of risks in the presence of reinsurance are calculated. A method of constructing an optimal portfolio with minimum variance is suggested.

Key words: approximation, reinsurance, loss, unprofitability, portfolio risk, gamma - distribution, limit distribution.

* *Nikishov Viktor Nikolaevich* (Tsh-sea05@yandex.ru), *Saraev Alexander Leonidovich* (alex_saraev@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.