УДК 517.51:517.98

ВЫРАВНИВАНИЕ НОРМ В СТРОКАХ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ И РАВНОМЕРНЫЕ ФРЕЙМЫ

© 2009 М.А. Лапшина[1]

В работе описаны упрощенные алгоритмы Casazza-Leon для построения равномерного фрейма Парсеваля-Стеклова произвольного объема из блочно-диагональной ортогональной матрицы. Приведены примеры равномерных фреймов Парсеваля-Стеклова объема 5 в пространстве $\mathbb{R}^2$ и объема 7 в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Ключевые слова: допустимая последовательность, фрейм, фрейм Парсеваля-Стеклова, равномерный фрейм, фреймовый оператор.

Все рассуждения в работе будем проводить в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^N$, в котором введено стандартное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и норма $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть M и N — натуральные числа, причем $M \geqslant N$.

Напомним понятие фрейма [1].

Определение 1. Набор элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ из $\mathbb{R}^N$ называется *фреймом* для пространства $\mathbb{R}^N$, если существуют положительные числа A и B такие, что

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} | < x, \varphi_i > |^2 \leqslant B\|x\|^2$$

для всех x из $\mathbb{R}^N$.

Числа A и B называются соответственно нижней и верхней границей фрейма, причем $\inf B$ — оптимальная верхняя граница фрейма, а $\sup A$ — его оптимальная нижняя граница. Если оптимальные верхняя и нижняя границы совпадают, то есть $A = B$, то фрейм называется жестким. Жесткий фрейм, у которого $A = B = 1$, будем называть, следуя В.С.Владимирову, фреймом Парсеваля-Стеклова. В книге [1] и вообще в англоязычной литературе такие фреймы называются фреймами Парсеваля.

Определение 2. Фрейм $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ называется *равномерным*, если существует число α такое, что $\|\varphi_i\| = \alpha$ для любого i.

[1]Лапшина Мария Александровна (Marijalapshina@rambler.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Заметим, что для равномерного фрейма Парсеваля-Стеклова $\alpha = = \sqrt{\frac{N}{M}}$ [2].

С каждым фреймом связаны три оператора:

1) оператор анализа $F: \ x \mapsto \{< x, \varphi_i >\}_{i=1}^M, \quad F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$;

2) оператор синтеза $F^* : \{a_i\} \in \mathbb{R}^M \to \sum\limits_{i=1}^M a_i \varphi_i \in \mathbb{R}^N$, сопряженный для оператора анализа;

3) фреймовый оператор Sx :

$$Sx = F^* F x = \sum_{i=1}^M < x, \varphi_i > \varphi_i,$$

этот оператор положительный, самосопряженный и обратимый. Заметим, что фреймовый оператор может быть определен для произвольной системы векторов, такой оператор, вообще говоря, необратим.

Для каждого x из $\mathbb{R}^N$ справедливо фреймовое представление:

$$x = \sum_{i=1}^M < x, S^{-1} \varphi_i > \varphi_i.$$

Теорема 1. Набор векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ является фреймом Парсеваля-Стеклова в пространстве $\mathbb{R}^N$ тогда и только тогда, когда фреймовый оператор является единичным: $Sx = Ix, \ x \in \mathbb{R}^N$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ фрейм Парсеваля-Стеклова. Тогда рассмотрим скалярное произведение

$$< Sx, x > = < \sum_{i=1}^M < x, \varphi_i > \varphi_i, x > = \sum_{i=1}^M < x, \varphi_i > < \varphi_i, x > =$$

$$= \sum_{i=1}^M | < x, \varphi_i > |^2 = \|x\|^2 = < Ix, x >$$

для всех x из $\mathbb{R}^N$. Отсюда следует, что $S = I$.

Обратно, для произвольной системы векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ определяем

$$Sx = \sum_{i=1}^M < x, \varphi_i > \varphi_i$$

для всех x из $\mathbb{R}^N$. Если $S = I$, то

$$< Sx, x > = \left\langle \sum_{i=1}^M < x, \varphi_i > \varphi_i, x \right\rangle = \sum_{i=1}^M < x, \varphi_i > < \varphi_i, x > = \sum_{i=1}^M | < x, \varphi_i > |^2.$$

Таким образом, получаем равенство $\sum\limits_{i=1}^M | < x, \varphi_i > |^2 = \|x\|^2$, которое является определением фрейма Парсеваля-Стеклова. •

В настоящее время известен простой и универсальный способ построения фреймов Парсеваля-Стеклова. Он состоит в том, что из ортогональной $M \times M$ матрицы удаляются произвольные $M - N$ столбцов. Строки оставшейся $M \times N$ матрицы будут образовывать фрейм Парсеваля-Стеклова [1, 3]. В прикладных задачах удобнее работать с равномерными фреймами Парсеваля-Стеклова. Общая конструкция, описанная выше, не обеспечивает равенства норм. Поэтому возникает задача выравнивания норм строк ортогональной матрицы после удаления некоторого количества столбцов. Такая задача, видимо, может считаться классической и неявно рассматривалась в работах А.Н. Колмогорова [4] и Ю.В. Линника [5] Общее решение задачи описания ортопроекторов, преобразующих ортонормированный базис в векторы одинаковой нормы, до сих пор неизвестно [3].

В серии работ P.G. Casazza, M. Leon [6-8] были приведены алгоритмы для решения задачи построения фреймов Парсеваля-Стеклова с заданным набором норм. В данной работе упрощенные алгоритмы применены к построению равномерных фреймов Парсеваля-Стеклова. В итоге получилось развитие предыдущей работы [9], в которой мы использовали две матрицы. Здесь используется целый класс матриц блочно-диагонального вида и, таким образом, строится достаточно широкий класс равномерных фреймов Парсеваля-Стеклова произвольного объема.

Определение 3. Числовая последовательность $\{c_i\}_{i=1}^M$ называется допустимой, если $c_i^2 \leqslant 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{M} c_i^2 = N$.

Группу ортогональных матриц пространства $\mathbb{R}^M$ будем обозначать $O(M)$, и I_L — единичная матрица пространства $\mathbb{R}^L$.

Опишем кратко упрощенный вариант алгоритма Casazza-Leon (ACL). Фрейм Парсеваля-Стеклова $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ с заданными нормами $\|\varphi_i\| = c_i$, где $\{c_i\}_{i=1}^M$ — допустимая последовательность, будет построен из ортогональной матрицы $O \in O(M)$, которая имеет вид:

$$O = \begin{pmatrix} R_N & 0 \\ 0 & R_{M-N} \end{pmatrix},$$

где $R_N \in O(N)$ и $R_{M-N} \in O(M-N)$.

Используя матрицу O и матрицу вращения Гивенса [10]

$$\theta(t,k,M) = \begin{pmatrix} I_{k-1,k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 0 & I_{M-k-1,M-k-1} & 0 \\ 0 & -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix},$$

вычисляем индуктивно матрицы $O_1, O_2, \ldots, O_{M-1}$. В матрице O_{M-1} первые N столбцов будут образовывать фрейм Парсеваля-Стеклова $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ с заданными нормами.

Матрица O_1 определяется соотношением $O_1 := \theta(t_1, 1, M)O$, где $t_1 := = \arg(c_1 + j\sqrt{1-c_1^2})$ и j — мнимая единица.

Рассмотрим два случая.

I случай: если $c_1^2 + c_2^2 \geqslant 1$, то t_2 — произвольное решение уравнения

$$\sin^2 t_2 = \frac{1 - c_2^2}{c_1^2},$$

и вычисляем

$$O_2 := \theta(t_2, 2, M)O_1.$$

II случай: если $c_1^2 + c_2^2 < 1$, то t_2 — произвольное решение уравнения

$$\sin^2 t_2 = \frac{c_2^2}{1 - c_1^2}$$

и вычисляем

$$O_2 := \theta(t_2, M-1, M)O_1.$$

Действуя аналогично, получим:

I случай: если $c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_{m+l+2} \geqslant m+1$, то t_{m+l+2} находим как одно из решений уравнения

$$\sin^2 t_{m+l+2} = \frac{1 - c_{m+l+2}^2}{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_{m+l+1}^2 - m},$$

и вычисляем

$$O_{m+l+2} := \theta(t_{m+l+2}, m+2, M)O_{m+l+1}, \quad m := m+1.$$

II случай: если $c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_{m+l+2} < m+1$, то t_{m+l+2} находим как одно из решений уравнения

$$\sin^2 t_{m+l+2} = \frac{c_{m+l+2}^2}{m + 1 - c_1^2 - c_2^2 - \ldots - c_{m+l+1}^2},$$

и вычисляем

$$O_{m+l+2} := \theta(t_{m+l+2}, M-l-1, M)O_{m+l+1}, \quad l := l+1.$$

Пример 1. Опишем построение равномерного фрейма Парсеваля-Стеклова в пространстве $\mathbb{R}^2$ из пяти векторов и единичной матрицы

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как было описано выше, итогом такого построения является система векторов одинаковой нормы, которая с необходимостью равна $\sqrt{\frac{2}{5}}$. Таким образом, числа $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Вычисляем t_1 и O_1 :

$$t_1 := \arg(\sqrt{\frac{2}{5}} + j\sqrt{1 - \frac{2}{5}}) = \arg(\sqrt{\frac{2}{5}} + j\sqrt{\frac{3}{5}}),$$

отсюда

$$\cos t_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ и } \sin t_1 = \sqrt{\frac{3}{5}};$$

$$O_1 := \theta(t_1, 1, 5)O = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$O_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}.$$

Так как $c_1^2 + c_2^2 = \frac{4}{5} < 1$, то это второй случай и

$$\cos t_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ и } \sin t_2 = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$O_2 := \theta(t_2, 4, 5)O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix},$$

$$O_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{90}}{15} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{60}}{15} \\ -\frac{\sqrt{45}}{15} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{30}}{15} \end{pmatrix}$$

и $m := 0$, $l := 1$.

Так как $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \frac{6}{5} \geqslant 1$, то это первый случай и

$$\cos t_3 = \frac{1}{2} \text{ и } \sin t_3 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$O_3 := \theta(t_3, 2, 5)O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{90}}{15} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{60}}{15} \\ -\frac{\sqrt{45}}{15} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{30}}{15} \end{pmatrix},$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{18}}{6} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{90}}{15} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{60}}{15} \\ -\frac{\sqrt{45}}{30} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{30}}{30} \end{pmatrix}$$

и $m := 1,\ l := 1$.

Так как $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = \frac{8}{5} < 2$, то это второй случай и

$$\cos t_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \sin t_4 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$O_4 := \theta(t_4, 3, 5)O_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{18}}{6} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{90}}{15} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{60}}{15} \\ -\frac{\sqrt{45}}{30} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{30}}{30} \end{pmatrix},$$

$$O_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{18}}{6} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{90}}{60} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{12}}{12} & \frac{\sqrt{60}}{60} \\ -\frac{\sqrt{90}}{15} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{60}}{15} \\ -\frac{\sqrt{90}}{60} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{12}}{12} & \frac{\sqrt{60}}{60} \end{pmatrix}$$

и $m := 1,\ l := 2$.

Таким образом, мы вычислили матрицу O_4, в которой строки первых двух столбцов образуют равномерный фрейм Парсеваля-Стеклова из пяти элементов в пространстве $\mathbb{R}^2$ (норма каждого элемента равна $\sqrt{\frac{2}{5}}$).

Пример 2. Опишем построение равномерного фрейма Парсеваля-Стеклова в пространстве $\mathbb{R}^3$ из семи векторов. Для построения будет использована матрица

$$O = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Как было описано выше, итогом такого построения является система векторов одинаковой нормы, которая с необходимостью равна $\sqrt{\frac{3}{7}}$. Таким образом, числа $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Вычисляем t_1 и O_1 :

$$t_1 := \arg(\sqrt{\frac{3}{7}} + j\sqrt{\frac{4}{7}}),$$

отсюда

$$\cos t_1 = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ и } \sin t_1 = \sqrt{\frac{4}{7}};$$

$$O_1 := \theta(t_1, 1, 7)O = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{63}}{21} & \frac{\sqrt{126}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{2\sqrt{21}}{21} & -\frac{2\sqrt{42}}{21} 0 & \frac{\sqrt{21}}{14} & -\frac{\sqrt{21}}{14} & \frac{\sqrt{21}}{14} & -\frac{\sqrt{21}}{14} & \end{pmatrix},$$

Так как $c_1^2 + c_2^2 = \frac{6}{7} < 1$, то это второй случай и

$$\cos t_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} \text{ и } \sin t_2 = \sqrt{\frac{3}{4}};$$

$$O_2 := \theta(t_2, 6, 7)O_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{63}}{21} & \frac{\sqrt{126}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{126}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{63}}{28} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{63}}{28} & \frac{\sqrt{63}}{28} & -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{63}}{28} \\ -\frac{\sqrt{21}}{21} & -\frac{\sqrt{42}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{21}}{28} & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{28} & \frac{\sqrt{21}}{28} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{28} \end{pmatrix}$$

и $m := 0$, $l := 1$.

Так как $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \frac{9}{7} \geqslant 1$, то это первый случай и

$$\cos t_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ и } \sin t_3 = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$O_3 := \theta(t_3, 2, 7)O_2,$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{63}}{21} & \frac{\sqrt{126}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} \\ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63} & -\frac{\sqrt{18}}{18} - \frac{2\sqrt{7}}{21} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{126}}{84} & -\frac{\sqrt{36}}{12} - \frac{\sqrt{126}}{84} & \frac{\sqrt{126}}{84} & \frac{\sqrt{36}}{12} - \frac{\sqrt{126}}{84} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{126}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{63}}{28} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{63}}{28} & \frac{\sqrt{63}}{28} & -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{63}}{28} \\ -\frac{\sqrt{18}}{9} - \frac{\sqrt{7}}{21} & \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63} & -\frac{\sqrt{12}}{6} & \frac{\sqrt{63}}{84} & -\frac{\sqrt{18}}{12} - \frac{\sqrt{63}}{84} & \frac{\sqrt{63}}{84} & \frac{\sqrt{18}}{12} - \frac{\sqrt{63}}{84} \end{pmatrix}.$$

и $m := 1$, $l := 1$.

Матрицы O_4, O_5, O_6 вычисляются аналогично. Запишем только получившийся равномерный фрейм Парсеваля-Стеклова.

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{63}}{21} \\ \frac{\sqrt{126}}{21} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63} \\ -\frac{\sqrt{18}}{18} - \frac{2\sqrt{7}}{21} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \ \varphi_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{15} + \frac{2\sqrt{50}}{25}(-\frac{\sqrt{18}}{9} - \frac{\sqrt{7}}{21}) \\ -\frac{\sqrt{30}}{30} + \frac{2\sqrt{50}}{25}(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63}) \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{2\sqrt{6}}{15} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{2\sqrt{15}}{15} + \frac{\sqrt{50}}{25}(-\frac{\sqrt{18}}{9} - \frac{\sqrt{7}}{21})) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{30}}{15} + \frac{\sqrt{2}}{5}(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63})) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{10}}{5} - \frac{\sqrt{6}}{15}) \end{pmatrix}, \ \varphi_5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{5}(-\frac{\sqrt{18}}{9} - \frac{\sqrt{7}}{21}) \\ \frac{\sqrt{15}}{5}(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63}) \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_6 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{7}}{7} \\ -\frac{\sqrt{14}}{7} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi_7 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{2\sqrt{15}}{15} + \frac{\sqrt{2}}{5}(-\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{7}}{21})) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{30}}{15} + \frac{\sqrt{2}}{5}(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{14}}{21})) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{10}}{5} - \frac{\sqrt{6}}{15}) \end{pmatrix}.$$

Описанный алгоритм можно реализовать в системе компьютерной математики (СКМ) Maple, а также в програмной среде Delphi. В работе [7] предлагается реализация в СКМ MATLAB.

Литература

[1] Christensen, O. An Introduction to Frames and Riesz Bases / O. Christensen. — Boston: Birkhäuser, 2002.

[2] Драбкова, Е.С. Объем фрейма Парсеваля / Е.С. Драбкова, С.Я. Новиков // Вестник Самарского государственного университета. — 2007. — №9/1(59). — С. 91-106.

[3] Casazza, P.G. The known equal norm Parseval frames as of 2005 / P.G. Casazza, N. Leonhard. Preprint 2006. Режим доступа: www.math.missouri.edu/∼pete/

[4] Колмогоров, А.Н. К обоснованию метода наименьших квадратов / А.Н. Колмогоров // Успехи математических наук. — 1946. — Т.1. — Вып. 1. — С. 57-70

[5] Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов / Ю.В. Линник. — М.: Физматгиз, 1962. — С. 352.

[6] Casazza, P.G. Frames with a given frame operator / P.G. Casazza, M. Leon. Preprint. — Режим доступа: www.math.missouri.edu/∼pete/

[7] Casazza, P.G. Existence and construction of finite tight frames / P.G. Casazza, N. Leon. — Режим доступа: www.math.missouri.edu/∼pete/

[8] Casazza, P.G. Custom Building Finite Frames / P.G. Casazza. Preprint. — Режим доступа: www.math.missouri.edu/∼pete/

[9] Лапшина, М.А. Равномерные фреймы в пространстве $\mathbb{R}^N$ / М.А. Лапшина // Вестник Самарского государственного университета. — 2008. — №6. — С.112-122.

[10] Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — С. 655.

Поступила в редакцию 9/*II*/2009;
в окончательном варианте — 9/*II*/2009.

NORM EQUALIZATION IN ROWS OF ORTHOGONAL MATRIX AND UNIFORM FRAMES

 M.A. Lapshina[2]

The simplified versions of Casazza-Leon algorithms for the construction of the uniform Parseval-Steklov frame of arbitrary volume from a block-diagonal orthogonal matrix are described in the paper. There are examples of uniform Parseval-Steklov frames of volume 5 in $\mathbb{R}^2$ and of volume 7 in $\mathbb{R}^3$.

Key words and phrases: admissible sequence, frame, Parseval-Steklov frame, uniform frame, frame operator.

Paper received 9/*II*/2009.
Paper accepted 9/*II*/2009.

[2]Lapshina Mariya Alexandrovna (`Marijalapshina@rambler.ru`), Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia.