МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

© 2009 Л.С. Пулькина[1] О.М. Кечина[2]

В работе доказано существование единственного решения нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения в прямоугольной области.

Введение

В работе рассматривается вопрос о разрешимости одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения

$$Lu \equiv u_{xy} + (Au)_x + (Bu)_y + Cu = f(x, y) \tag{0.1}$$

на плоскости. Нелокальными задачами принято называть такие задачи, в которых вместо задания значений искомого решения или его производных на фиксированной части границы задаётся соотношение между этими значениями и значениями тех же функций на внутренних многообразиях. Часто роль таких соотношений выполняют условия, содержащие интегралы от искомого решения. В настоящей работе в качестве нелокальных условий задаются интегралы вдоль характеристик уравнения, а область, в которой ищется решение, представляет собой прямоугольник, ограниченный характеристиками. Задача с такими условиями может трактоваться как обобщение задачи Гурса, и известна в литературе как интегральный аналог задачи Гурса [1]

[1]Пулькина Людмила Степановна (louise@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2]Кечина Ольга Михайловна (omka-83@mail.ru), кафедра математического анализа Самарского государственного педагогического университета, 443090, г. Самара, ул. Антонова-Овсеенко, 26.

1. Постановка задачи

Обозначим $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$. Пусть $A(x, y), B(x, y), C(x, y), f(x, y), K(x, y), \varphi(x), \psi(y)$ — заданные функции, определённые при $x \in [0, a], y \in [0, b]$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, имеющую в Ω непрерывные производные u_x, u_y и u_{xy}, которая удовлетворяет в Ω уравнению (0.1) и условиям

$$\int_0^a K(x, y)u(x, y)dx = \psi(y), 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{1.2}$$

$$\int_0^b K(x, y)u(x, y)dy = \varphi(x), 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{1.3}$$

2. Основные результаты

Теорема 1. Если $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $A_y(x, y)$, $B_x(x, y)$, $C_{xy}(x, y)$, $f(x, y)$ непрерывны в Ω,

$$A(x, y) \neq 0, B(x, y) \neq 0, C(x, y) \geqslant 0,$$

$$K(x, y) > 0, K(x, y) \in C^2(\bar{\Omega}), (x, y) \in \bar{\Omega},$$

$$\varphi(x) \in C^1[0, a], \psi(y) \in C^1[0, b],$$

$$\left(\frac{C(x, y)}{K(x, y}\right)_{xy} \geqslant 0, \left(\frac{A(x, y)}{K(x, y)}\right)_y \cdot \left(\frac{B(x, y)}{K(x, y)}\right)_x - \frac{C^2(x, y)}{K^2} \geqslant 0,$$

то существует единственное решение задачи (0.1)–(1.2)–(1.3).

Доказательство

1. Предположим, что существует два различных решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ — решение задачи (0.1)–(1.2)–(1.3) с $f(x, y) = \varphi(x) = \psi(y) = 0$. Умножим однородное уравнение (0.1) на $\int\limits_0^y \int\limits_0^x K(\xi, \eta)u(\xi, \eta)d\xi d\eta$ и проинтегрируем по области Ω. Интегрируя по частям каждое слагаемое, учитывая при этом однородные условия

$$\int_0^a K(x, y)u(x, y)dx = 0, \quad \int_0^b K(x, y)u(x, y)dy = 0,$$

получим:

$$\int\limits_0^b \int\limits_0^a \left[Ku^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{K}\right)_y \left(\int\limits_0^y Kud\eta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{B}{K}\right)_x \left(\int\limits_0^x Kud\xi\right)^2 - \right.$$

$$\left. + -\frac{C}{K}\int\limits_0^y Kud\eta \int\limits_0^x Kud\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{C}{K}\right)_{xy} \left(\int\limits_0^y \int\limits_0^x Kud\xi d\eta\right)^2 \right] dxdy = 0. \tag{2.4}$$

В силу условий теоремы 1 из (2.4) следует, что $u(x,y)=0$ в $\bar{\Omega}$.

2. Доказательство существования решения проведём в несколько этапов. Сначала покажем, что задача 1 эквивалентна следующей задаче:

Задача 2. Найти функцию $v(x,y)\in C(\bar{\Omega})$, имеющую в Ω непрерывные производные v_x, v_y и v_{xy}, которая удовлетворяет в Ω уравнению

$$v_{xy}+(\bar{A}v)_x+(\bar{B}v)_y+\bar{C}v=\bar{f}(x,y) \tag{2.5}$$

и условиям

$$\int_0^a v(x,y)dx=\psi(y), \quad \int_0^b v(x,y)dy=\varphi(x), \tag{2.6}$$

где

$$\begin{gathered}\bar{A}(x,y)=\frac{A(x,y)K(x,y)-K_y(x,y)}{K(x,y)},\\ \bar{B}(x,y)=\frac{B(x,y)K(x,y)-K_x(x,y)}{K(x,y)},\\ \bar{C}(x,y)=\frac{K_{xy}(x,y)-A(x,y)K_x(x,y)}{K(x,y)}-\\ -\frac{B(x,y)K_y(x,y)-C(x,y)K(x,y)}{K(x,y)},\\ \bar{f}(x,y)=f(x,y)\cdot K(x,y).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Действительно, положим

$$v(x,y)=K(x,y)u(x,y). \tag{2.8}$$

Если $u(x,y)$ — решение задачи (0.1)–(1.2)–(1.3), то $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению (2.5) и условиям (2.6). Нетрудно убедиться и в обратном: если $v(x,y)$ — решение (2.5)–(2.6), то $u(x,y)$ - решение (0.1)–(1.2)–(1.3). Таким образом, задачи 1 и 2 эквивалентны, если $K(x,y)\neq 0$ и коэффициенты уравнений (0.1) и (2.5) связаны соотношениями (2.7).

Теперь покажем, что задача 2 однозначно разрешима. Запишем уравнение (2.5) в виде

$$v_{xy}=F(x,y), \tag{2.9}$$

где

$$F(x,y)=\bar{f}(x,y)-(\bar{A}v)_x-(\bar{B}v)_x-\bar{C}(x,y)v. \tag{2.10}$$

Решение уравнения (2.9) можо представить в виде

$$v(x,y)=f(x)+g(y)+\int\limits_0^y\int\limits_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{2.11}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ — произвольные функции, имеющие непрерывные производные в $[0,a]$ и $[0,b]$ соответственно. Применим к (2.11) условия (2.6). Тогда

$$\int\limits_0^a f(x)dx+ag(y)+\int\limits_0^a\int\limits_0^y\int\limits_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dx=\psi(y), \tag{2.12}$$

$$bf(x)+\int_0^b g(y)dy+\int_0^b\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dy=\varphi(x). \qquad (2.13)$$

Выразив из (2.12)и (2.13) $f(x)$ и $g(y)$, получим

$$v(x,y)=\frac{\varphi(x)}{b}+\frac{\psi(y)}{a}-\frac{1}{ab}\int_0^a\varphi(x)dx-$$

$$-\frac{1}{a}\int_0^a\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dx-\frac{1}{b}\int_0^b\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dy+$$

$$+\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dydx+\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (2.14)$$

Заменив в (2.14) $F(x,y)$ её представлением (2.10) и проделав несложные преобразования, приходим к нагруженному интегральному уравнению относительно $v(x,y)$:

$$v(x,y)-\frac{1}{a}\int_0^a\int_0^y \bar{A}vd\eta dx-\frac{1}{a}\int_0^a\int_0^x \bar{B}vd\xi dx--\frac{1}{b}\int_0^b\int_0^y \bar{A}vd\eta dy-$$

$$-\frac{1}{b}\int_0^b\int_0^x \bar{B}vd\xi dy+\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b\int_0^y \bar{A}vd\eta dxdy+\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b\int_0^x \bar{B}vd\xi dxdy+$$

$$+\int_0^y \bar{A}vd\eta+\int_0^x \bar{B}vd\xi+\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b\int_0^y\int_0^x \bar{C}vd\xi d\eta dxdy-\frac{1}{a}\int_0^a\int_0^y\int_0^x \bar{C}vd\xi d\eta dx-$$

$$-\frac{1}{b}\int_0^b\int_0^y\int_0^x \bar{C}vd\xi d\eta dy+\int_0^y\int_0^x \bar{C}vd\xi d\eta=Q(x,y), \qquad (2.15)$$

где

$$Q(x,y)=\frac{1}{b}\varphi(x)+\frac{1}{a}\psi(y)-\frac{1}{2ab}\int_0^a\varphi(x)dx-\frac{1}{2ab}\int_0^b\psi(y)dy+$$

$$+\int_0^y\int_0^x \bar{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta-\frac{1}{a}\int_0^a\int_0^y\int_0^x \bar{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta dx-\frac{1}{b}\int_0^b\int_0^y\int_0^x \bar{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta dy+$$

$$+\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b\int_0^y\int_0^x \bar{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta dydx.$$

Покажем, что это уравнение можно эквивалентным образом свести к уравнению Вольтерра второго рода. Обозначим

$$w(x,y) = v(x,y) + \int_0^y \bar{A}v(x,\eta)d\eta + \int_0^x \bar{B}vd\xi + \int_0^y \int_0^x \bar{C}(\xi,\eta)vd\xi d\eta, \qquad (2.16)$$

тогда в силу (2.15) эта функция удовлетворяет уравнению

$$w(x,y) - \frac{1}{a}\int_0^a w(x,y)dx - \frac{1}{b}\int_0^b w(x,y)dy + \frac{1}{ab}\int_0^a \int_0^b w(x,y)dydx = G(x,y), \quad (2.17)$$

где

$$G(x,y) = \int_0^y \int_0^x \bar{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta + \frac{1}{ab}\int_0^a \int_0^b \int_0^y \int_0^x \bar{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta dydx -$$

$$\frac{1}{a}\int_0^a \int_0^y \int_0^x \bar{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta dx - \frac{1}{b}\int_0^b \int_0^y \int_0^x \bar{f}(\xi,\eta)d\xi d\eta dy.$$

Уравнение (2.17) нетрудно решить, заметив, что его можно переписать следующим образом:

$$w(x,y) - \frac{1}{a}\int_0^a w(x,y)dx - \frac{1}{b}\left[w(x,y) - \frac{1}{a}\int_0^a w(x,y)dx\right] dy = G(x,y).$$

Решение имеет вид:

$$w(x,y) = G(x,y) + c_1(x) + c_2(y), \qquad (2.18)$$

где $c_1(x)$ и $c_2(y)$ — произвольные функции. Однако в силу доказанной выше единственности решения задачи (0.1)–(1.2)–(1.3) и эквивалентности задач 1 и 2 $c_1(x) + c_2(y) = 0$.

Рассмотрим теперь (2.16) как интегральное уравнение относительно функции $v(x,y)$:

$$v(x,y) + \int_0^y \bar{A}(x,\eta)v(x,\eta)d\eta + \int_0^x \bar{B}(\xi,y)v(\xi,y)d\xi + \int_0^y \int_0^x \bar{C}(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta = G(x,y). \qquad (2.19)$$

Обозначим

$$v(x,y) + \int_0^y \bar{A}(x,\eta)v(x,\eta)d\eta = \tilde{v}(x,y) \qquad (2.20)$$

Тогда (2.19) примет вид уравнения Вольтерра относительно $\tilde{v}(x,y)$:

$$\tilde{v}(x,y) + \int_0^x \bar{B}(\xi,y)\tilde{v}(x,y)d\xi = H(x,y), \qquad (2.21)$$

где

$$H(x,y) = G(x,y) + \int\limits_0^y \int\limits_0^x [\bar{B}(\xi,y)\bar{A}(x,\eta) - \bar{C}(\xi,\eta)]v(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Ядро $\bar{B}(\xi,y)$ и правая часть $H(x,y)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$, следовательно, уравнение (2.21) имеет единственное непрерывное решение $\tilde{v}(x,y)$, которое можно записать следующим образом:

$$\tilde{v}(x,y) = H(x,y) - \int\limits_0^x R(\xi,y,-1)H(\xi,y)d\xi,$$

где $R(\xi,y,-1)$ — резольвента ядра $\bar{B}(\xi,y)$. [2]Учитывая выражение для $H(x,y)$, будем иметь

$$\tilde{v}(x,y) = G(x,y) + \int\limits_0^y \int\limits_0^x D(\xi,\eta,x,y)v(\xi,\eta)d\xi d\eta -$$

$$- \int\limits_0^x R(\xi,y,-1)G(\xi,y)d\xi - \int\limits_0^x R(\xi,y,-1) \int\limits_0^y \int\limits_0^\xi D(\xi',\eta,\xi,y)v(\xi',\eta)d\xi' d\eta d\xi, \tag{2.22}$$

где $D(\xi,\eta,x,y) = \bar{B}(\xi,y)\bar{A}(x,\eta) - \bar{C}(\xi,\eta)$.

Решая теперь уравнение

$$v(x,y) + \int\limits_0^y \bar{A}v d\eta = \tilde{v}(x,y),$$

ядро которого в силу условий теоремы непрерывно в $\bar{\Omega}$, получим

$$v(x,y) - \int\limits_0^y \int\limits_0^x D(\xi,\eta,x,y)v(\xi,\eta)d\xi d\eta + \int\limits_0^x R(\xi,y,-1) \int\limits_0^y \int\limits_0^\xi D(\xi',\eta,\xi,y)v(\xi',\eta)d\xi' d\eta d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^y R(x,\eta,-1) \int\limits_0^\eta \int\limits_0^x D(\xi,\eta',x,\eta)v(\xi,\eta')d\xi d\eta' d\eta -$$

$$- \int\limits_0^y R(x,\eta,-1) \int\limits_0^x R(\xi,\eta,-1) \int\limits_0^\eta \int\limits_0^\xi D(\xi',\eta',\xi,\eta)v(\xi',\eta')d\xi' d\eta' d\xi d\eta = \tilde{G}(x,y), \tag{2.23}$$

где

$$\tilde{G}(x,y) = G(x,y) - \int\limits_0^x R(\xi,y,-1)G(\xi,y)d\xi - \int\limits_0^y R(x,\eta,-1)G(x,\eta)d\eta +$$

$$+\int\limits_0^y R(x,\eta,-1)\int\limits_0^x\int\limits_0^x R(\xi,\eta,-1)G(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

и преобразуем интегралы, содержащие $v(x,y)$, меняя порядок интегрирования.

Обозначим

$$\int\limits_{\xi'}^x R(\xi,y,-1)D(\xi',\eta,\xi,y)d\xi = H_1(\xi',\eta,x,y),$$

$$\int\limits_{\eta'}^y R(x,\eta,-1)D(\xi,\eta',x,\eta)d\eta = H_2(\xi,\eta',x,y),$$

$$\int\limits_{\xi'}^x\int\limits_{\eta'}^y R(x,\eta,-1)R(\xi,\eta,-1)D(\xi',\eta',\xi,\eta)d\eta d\xi = H_3(\xi',\eta',x,y).$$

После замены обозначений ξ на x, ξ' на ξ, η на y, η' на η (2.23) примет вид:

$$v(x,y)-\int\limits_0^y\int\limits_0^x \tilde{H}(\xi,\eta,x,y)v\xi,\eta)d\xi d\eta = \tilde{G}(x,y), \tag{2.24}$$

$$\tilde{H}(\xi,\eta,x,y) = D(\xi,\eta,x,y)+H_1(\xi,\eta,x,y)+H_2(\xi,\eta,x,y)-H_3(\xi,\eta,x,y),$$

Ядро $\tilde{H}(\xi,\eta,x,y)$ и правая часть $\tilde{G}(x,y)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$, следовательно, уравнение (2.22) имеет единственное непрерывное решение $v(x,y)$. [2]

Так как в силу условий теоремы функция $\tilde{H}(\xi,\eta,x,y)$ имеет производные $\tilde{H}_{xy}$, функция $\tilde{G}(x,y)$ имеет производные $\tilde{G}_{xy}$, нетрудно убедиться в том, что существует v_{xy}. В силу отмеченной выше эквивалентности задачи 2 и уравнения (2.15), уравнения (2.17) и уравнения (2.24) функция $v(x,y)$, полученная как решение уравнения (2.24), будет и решением задачи 2. Таким образом, решение задачи 2 существует. Так как $K(x,y)\neq 0$, то существует и решение задачи 1. Теорема доказана.

Замечание 1.

Теорема доказана при условии $A(x,y)\neq 0, B(x,y\neq 0$. Это ограничение существенно, так как, если $A(x,y)=0$ или $B(x,y)=0$, то единственнность решения будет иметь место только при $C(x,y)=0$. Заметим, что в случае $K(x,y)\equiv 1$ решение единственно только, если $A_y\neq 0, B_x\neq 0$. Этот случай рассмотрен в [3], где приведён пример неединственности решения задачи с условиями (1.2)–(1.3) с $K(x,y)\equiv 1$ для уравнения $u_{xy}+cu=f(x,y)$. Однако, наложив дополнительные условия на ядро $K(x,y)$, эту трудность можно преодолеть. Пусть в уравнении (0.1) $A(x,y) = B(x,y) = 0$. Тогда из (2.7) коэффициенты уравнения (2.5) и правая часть будут иметь вид:

$$\bar{A} = -\frac{K_y}{K}, \bar{B} = -\frac{K_x}{K}, \bar{C} = \frac{K_{xy} + CK}{K}, \bar{f}(x,y) = K(x,y)f(x,y).$$

Теорема 2. Если $C_{xy}(x,y), f(x,y) \in C^2(\bar{\Omega})$,

$$K(x,y) \in C^2(\bar{\Omega}), K_{xyxy}(x,y) \in C(\bar{\Omega}), \left(\frac{K_{xy} + CK}{K}\right)_{xy} \geqslant 0,$$

$$(K_{yy}K - K_y^2)(K_{xx}K - K^2)_x - (K_{xy} + CK)^2 \geqslant 0,$$

то существует единственное решение задачи (0.1)–(1.2)–(1.3).

Доказательство. Введём новую неизвестную функцию $v(x,y) = K(x,y)u(x,y)$ и, воспользовавшись формулами (2.7), придём к задаче отыскания функции $v(x,y)$, удовлетворяющей уравнению

$$v_{xy} - \left(\frac{K_y}{K}v\right)_x - \left(\frac{K_x}{K}v\right)_y + \frac{K_{xy} + CK}{K}v = f(x,y)$$

и условиям

$$\int_0^a v(x,y)dx = \psi(y), \quad \int_0^b v(x,y)dy = \varphi(x).$$

Нетрудно проверить, что условия, гарантирующие единственность решения, выполняются. Единственность решения такой задачи доказана в [4]. Существование решения вытекает из теоремы 1.

Литература

[1] Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных. // Дифференциальные уравнения, 1986, № 1. — С. 171–174.

[2] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

[3] Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения. // Дифференциальные уравнения, 2000, № 2. — С. 279–280.

[4] Кечина О.М., Пулькина Л.С. О разрешимости одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения //Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: тр. международной научной конференции. –Уфа: Гилем, 2008. –Т. 1. –С. 120–122.

Поступила в редакцию //2009;
в окончательном варианте — //2009.

NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION IN CHARACTERISTIC RECTANGULAR

© 2009 L.S. Pulkina,[3] O.M. Ketchina[4]

In this paper, we consider a nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation in a rectangular domain. The existence and uniqueness of the solution are proved.

Paper received //2009.
Paper accepted //2009.

[3]Pulkina Ludmila Stepanovna (louise@samdiff.ru), Dept. of Mathematical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.
[4]Ketchina Olga Mikhailovna (omka-83@mail.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Samara State Pedagogical University, Samara, 443090, Russia.