УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ ВНУТРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

© 2009 О.М. Кечина[1]

В работе доказано существование единственного решения нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения в прямоугольной области.

Ключевые слова: нелокальная задача, гиперболическое уравнение, интегральные условия.

Введение

Нелокальными задачами принято называть такие задачи, в которых вместо классических краевых условий для дифференциальных уравнений в частных производных задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри нее. Часто роль таких соотношений выполняют условия, содержащие интегралы от искомого решения. В данной работе область, в которой ищется решение, представляет собой прямоугольник, ограниченный характеристиками уравнения, а в качестве нелокальных условий задаются интегралы вдоль характеристик. Задача с такими условиями может трактоваться как обобщение задачи Гурса и известна в литературе как интегральный аналог задачи Гурса [1].

1. Постановка задачи

Обозначим $D = \{(x,y): \ 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$. Пусть $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, $f(x,y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — заданные функции, определенные при $x \in [0,a], y \in [0,b]$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\bar{D})$, имеющую в D непрерывные производные u_x, u_y и u_{xy}, которая удовлетворяет в области D уравнению

$$Lu \equiv u_{xy} + (A(x,y)u)_x + (B(x,y)u)_y + C(x,y)u = f(x,y) \qquad (1.1)$$

[1]Кечина Ольга Михайловна (omka-83@mail.ru), кафедра математического анализа Поволжской государственной социально-гуманитарной академии, 443090, Россия, г. Самара, ул. Антонова-Овсеенко, 26.

и условиям

$$\int_0^{\alpha} u(x,y)dx = \psi(y), \quad 0 < \alpha < a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{1.2}$$

$$\int_0^{\beta} u(x,y)dy = \varphi(x), \quad 0 < \beta < b, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{1.3}$$

Случай $\alpha = a$, $\beta = b$ был рассмотрен в [2, 3].

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$A(x,y), B(x,y), C(x,y) \in C^1(\bar{D}), \quad C_{xy} \in C(\bar{D}), \quad f(x,y) \in C(\bar{D}),$$
$$\varphi(x) \in C[0,a] \cap C^2(0,a), \quad \psi(y) \in C[0,b] \cap C^2(0,b),$$
$$A_y(x,y) \geqslant 0, \quad B_x(x,y) \geqslant 0, \quad C_{xy}(x,y) \geqslant 0,$$
$$A_y(x,y)B_x(x,y) - C^2(x,y) \geqslant 0,$$
$$A(x,\beta) \geqslant 0, \quad B(\alpha,y) \geqslant 0, \quad C_x(x,\beta) \geqslant 0, \quad C_y(\alpha,y) \geqslant 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1.1)–(1.3).

Доказательство.

Обозначим

$$D_0 = \{(x,y) : 0 < x < \alpha, 0 < y < \beta\},$$
$$D_1 = \{(x,y) : \alpha < x < a, 0 < y < \beta\},$$
$$D_2 = \{(x,y) : 0 < x < \alpha, \beta < y < b\},$$
$$D_3 = \{(x,y) : \alpha < x < a, \beta < y < b\},$$
$$J_1 = \{(x,y) : x = \alpha, 0 < y < b\},$$
$$J_2 = \{(x,y) : y = \beta, 0 < x < a\}.$$

Тогда область $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup J_1 \cup J_2$.

1. Единственность. Предположим, что существует два различных решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ — решение задачи (1.1)–(1.3) с однородными условиями. Опираясь на результат, полученный в [3], легко видеть, что в области D_0 $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y) = 0$.

Из непрерывности $u(x,y)$ в области D следует, что $u(\alpha,y) = 0$, и выполнено условие (1.3). Будем рассматривать в D_1 задачу отыскания решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условиям

$$\int_0^{\beta} u(x,y)dy = 0,$$

$$u(\alpha, y) = 0.$$

Умножим уравнение (1.1) с $f(x,y)=0$ на функцию $l_1u = \int\limits_0^y \int\limits_a^x u(\xi,\eta)d\xi d\eta$ и проинтегрируем по области D_1. Интегрируя по частям каждое слагаемое, учитывая при этом однородные условия, получим

$$\int\limits_0^\beta \int\limits_\alpha^a u^2(x,y)dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta \int\limits_\alpha^a C_{xy}\left(\int\limits_0^y \int\limits_a^x u(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)^2 dxdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\beta \int\limits_\alpha^a \left[A_y(x,y)\left(\int\limits_0^y u(x,\eta)d\eta\right)^2 -\right.$$

$$\left.-2C(x,y)\int\limits_0^y u(x,\eta)d\eta \int\limits_a^x u(\xi,y)d\xi + B_x(x,y)\left(\int\limits_a^x u(\xi,y)d\xi\right)^2\right]dxdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\beta B(\alpha,y)\left(\int\limits_a^\alpha u(\xi,y)d\xi\right)^2 dy + \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta C_y(\alpha,y)\left(\int\limits_0^y \int\limits_a^\alpha u(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)^2 dy = 0.$$

В силу условий теоремы левая часть полученного равенства неотрицательна, поэтому из него следует, что $u(x,y)=0$ в D_1.

Из непрерывности $u(x,y)$ в области D следует, что $u(x,\beta)=0$, и выполнено условие (1.2). Будем рассматривать в D_2 задачу отыскания решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условиям

$$\int\limits_0^\alpha u(x,y)dx = 0,$$

$$u(x,\beta) = 0.$$

Умножим уравнение (1.1) с $f(x,y)=0$ на функцию $l_2u = \int\limits_b^y \int\limits_0^x u(\xi,\eta)d\xi d\eta$ и проинтегрируем по области D_2. Интегрируя по частям каждое слагаемое, учитывая при этом однородные условия, получим

$$\int\limits_\beta^b \int\limits_0^\alpha u^2(x,y)dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_\beta^b \int\limits_0^\alpha C_{xy}\left(\int\limits_b^y \int\limits_0^x u(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)^2 dxdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_\beta^b \int\limits_0^\alpha \left[A_y(x,y)\left(\int\limits_b^y u(x,\eta)d\eta\right)^2 -\right.$$

$$\left.-2C(x,y)\int\limits_b^y u(x,\eta)d\eta \int\limits_0^x u(\xi,y)d\xi + B_x(x,y)\left(\int\limits_0^x u(\xi,y)d\xi\right)^2\right]dxdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha A(x,\beta)\left(\int\limits_\beta^b u(x,\eta)d\eta\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha C_x(x,\beta)\left(\int\limits_\beta^b\int\limits_0^x u(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)^2 dx=0.$$

В силу условий теоремы левая часть полученного равенства неотрицательна, поэтому из него следует, что $u(x,y)=0$ в D_2.

В области D_3 получаем однородную задачу Гурса для уравнения (1.1) с условиями

$$u(\alpha,y)=0,$$
$$u(x,\beta)=0,$$

которая однозначно разрешима [4].

Единственность решения задачи (1.1)–(1.3) доказана в каждой из областей D_0,D_1,D_2,D_3. В силу непрерывности функции $u(x,y)$ в области D единственность решения задачи доказана для всей области D.

2. Существование. Опираясь на результат, полученный в [3], легко видеть, что в области D_0 существует решение задачи (1.1)–(1.3).

Обозначим $u(\alpha,y)=\mu(y)$ – значение решения задачи в области D_0 и рассмотрим задачу в области $D_1=\{(x,y):\alpha<x<a,0<y<\beta\}$ с интегральным условием (1.3) и граничным условием

$$u(\alpha,y)=\mu(y). \tag{2.1}$$

Запишем уравнение (1.1) в виде

$$u_{xy}=F(x,y), \tag{2.2}$$

где

$$F(x,y)=f(x,y)-(A(x,y)u)_x-(B(x,y)u)_y-C(x,y)u. \tag{2.3}$$

Решением уравнения (2.2) в области D_1 является функция $u(x,y)$, представимая в виде

$$u(x,y)=f(x)+g(y)+\int\limits_0^y\int\limits_\alpha^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{2.4}$$

где $f(x)\in C[\alpha,a],g(y)\in C[0,\beta]$ — произвольные функции.

Подчиняя (2.4) условиям (1.3) и (2.1), получим

$$f(\alpha)+g(y)=\mu(y), \tag{2.5}$$

$$\beta f(x)+\int\limits_0^\beta g(y)dy+\int\limits_0^\beta\int\limits_0^y\int\limits_\alpha^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dy=\varphi(x). \tag{2.6}$$

Выразим из полученных равенств функции $f(x)$ и $g(y)$. Тогда получим решение задачи (1.1)–(1.3), (2.1) для уравнения (2.2):

$$u(x,y)=\frac{\varphi(x)}{\beta}+\mu(y)-\frac{\varphi(\alpha)}{\beta}-$$

$$-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^y\int\limits_\alpha^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dy+\int\limits_0^y\int\limits_\alpha^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (2.7)$$

Заменив в (2.7) $F(x,y)$ ее представлением (2.3) и проделав некоторые преобразования, приходим к нагруженному интегральному уравнению относительно $u(x,y)$:

$$u(x,y)-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^y A(x,\eta)u(x,\eta)d\eta dy-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_\alpha^x B(\xi,y)u(\xi,y)d\xi dy-$$

$$-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^y\int\limits_\alpha^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta dy+\int\limits_0^y A(x,\eta)u(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_\alpha^x B(\xi,y)u(\xi,y)d\xi-\int\limits_0^y\int\limits_\alpha^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta=F_1(x,y), \quad (2.8)$$

где

$$F_1(x,y)=\frac{1}{\beta}\varphi(x)+\mu(y)-\frac{1}{\beta}\varphi(\alpha)+\int\limits_0^y\int\limits_\alpha^x f(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^y\int\limits_\alpha^x f(\xi,\eta)d\xi d\eta dy+\int\limits_0^y A(\alpha,\eta)\mu(\eta)d\eta--\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^y A(\alpha,\eta)\mu(\eta)d\eta dy.$$

Следуя рассуждениям [3], приведем уравнение (2.8) к уравнению Вольтерра второго рода

$$u(x,y)-\int\limits_0^y\int\limits_\alpha^x \tilde{H}(\xi,\eta,x,y)u(\xi,\eta)d\xi d\eta=\tilde{G}(x,y), \quad (2.9)$$

где $\tilde{H}(\xi,\eta,x,y),\tilde{G}(x,y)$ — функции, которые выражаются через известные функции.

Ядро $\tilde{H}(\xi,\eta,x,y)$ и правая часть $\tilde{G}(x,y)$ непрерывны в $\bar{D_1}$, следовательно, уравнение (2.9) имеет единственное непрерывное решение $u(x,y)$ [5]. В силу эквивалентности задачи (1.1)–(1.3), (2.1) и уравнения (2.8), уравнения (1.1) и уравнения (2.9) функция $u(x,y)$, полученная как решение уравнения (2.9), будет и решением задачи (1.1)–(1.3), (2.1) в области D_1.

Обозначим $u(x,\beta)=\nu(x)$ — значение решения задачи в области D_0 и рассмотрим задачу в области $D_2=\{(x,y):0<x<\alpha,\beta<y<b\}$ с интегральным условием (1.2) и граничным условием

$$u(x,\beta)=\nu(x). \quad (2.10)$$

Проводя рассуждения, аналогичные использованным при рассмотрении задачи в области D_1, получим уравнение Вольтерра второго рода

$$u(x,y) - \int\limits_{\beta}^{y} \int\limits_{0}^{x} \tilde{H}(\xi,\eta,x,y)u(\xi,\eta)d\xi d\eta = \tilde{L}(x,y), \tag{2.11}$$

где $\tilde{H}(\xi,\eta,x,y), \tilde{L}(x,y)$ — функции, которые выражаются через известные функции.

Ядро $\tilde{H}(\xi,\eta,x,y)$ и правая часть $\tilde{L}(x,y)$ непрерывны в $\bar{D_2}$, следовательно, уравнение (2.11) имеет единственное непрерывное решение $u(x,y)$ [5].

Функция $u(x,y)$, полученная как решение уравнения (2.11), будет и решением задачи (1.1), (1.2), (2.10) в области D_2.

В области D_3 получаем задачу Гурса для уравнения (1.1) с условиями

$$u(\alpha,y) = \mu(y),$$
$$u(x,\beta) = \nu(x),$$

которая однозначно разрешима [4].

Существование решения задачи (1.1)–(1.3) доказано в каждой из областей D_0, D_1, D_2, D_3. В силу непрерывности функции $u(x,y)$ в области D существование решения задачи доказано для всей области D.

Литература

[1] Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. 1986. № 1. С. 171–174.

[2] Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2000. № 2. С. 279–280.

[3] Пулькина Л.С., Кечина О.М. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2009. № 2(68). С. 80–88.

[4] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.

[5] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

Поступила в редакцию 25/V/2009;
в окончательном варианте — 25/V/2009.

NONLOCAL PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION WITH CONDITIONS SPECIFIED INSIDE CHARACTERISTIC RECTANGLE

 O.M. Ketchina[2]

In this paper, we consider the existence of a unique solution of a nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation in a rectangular domain.

Key words: nonlocal problem, hyperbolic equation, integral conditions.

Paper received 25/ V/2009.
Paper accepted 25/ V/2009.

[2]Ketchina Olga Mikhailovna (omka-83@mail.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Povolzhskaya State Academy of Social Sciences and Humanities, Samara, 443090, Russia.