

УДК 534.535

ДЕФОРМАЦИЯ НЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ БИНАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ЖИДКИЙ КРИСТАЛЛ СДВИГА И СЖАТИЯ¹

© 2009 Е.Н. Кожевников, Я.В. Кучеренко²

Теоретически в широком диапазоне частот описано искажение нематической структуры жидкого кристалла при бинарном воздействии периодического сдвига и сжатия. В расчете эффекта при формулировке граничных условий учитываются подвижность по нормали верхней граничной пластины и конечное значение ориентирующей энергии на границах слоя. Доказана нелинейная зависимость деформации нематической структуры от амплитуды сдвигового воздействия. Анализируется возможность регистрации деформации структуры оптическим путем.

Ключевые слова: нематический жидкий кристалл, периодический сдвиг, осцилляции директора, деформация структуры, потоки, прозрачность.

Введение

Воздействие периодического сдвига на слой нематического жидкого кристалла (НЖК) с исходной ориентацией молекул, ортогональной сдвигу, приводит к деформации его структуры, при которой меняется направление выстраивания длинных осей молекул — директора [1-3]. При малых амплитудах сдвига ось кристалла периодически отклоняется от равновесного направления на угол, пропорциональный градиенту сдвига и однородный в пределах плоскости сдвига (линейная деформация). Увеличение амплитуды сдвига приводит к нарушению ориентационной однородности кристалла и

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: грант 07-02-00763.

²Кожевников Евгений Николаевич (kozhev@ssu.samara.ru), Кучеренко Яна Викторовна (yana20002@yandex.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

возникновению пространственно-модулированных структур с периодом порядка толщины НЖК-слоя, изменение симметрии кристалла носит пороговый характер и сопровождается появлением вихревых гидродинамических потоков [4-8]. Угол отклонения молекул нематика от исходной ориентации в модулированной структуре содержит постоянную составляющую, величина которой зависит от расстояния до порога эффекта и, следовательно, нелинейна по амплитуде сдвига.

Дополнительно помимо сдвига периодическое воздействие на нематический кристалл с частотой, равной частоте сдвига, также может приводить к нелинейной деформации нематической структуры, при которой стационарный угол поворота директора значительно превышает амплитуду его осцилляций. Нелинейный эффект в этом случае является непороговым, и пространственно-модулированные искажения не возникают. В данной работе рассматриваются искажения гомеотропной структуры нематического монокристалла при его деформации, создаваемой одновременным воздействием на кристалл периодических сдвига и сжатия. Такое воздействие, в частности, достигается, если одна из граничных пластин, ограничивающих НЖК-слой, совершает эллиптическое движение, смещаясь гармонически в своей плоскости и, с некоторым запаздыванием по фазе, в направлении нормали. Показано, что одновременное воздействие на кристалл сдвига и сжатия приводит к появлению среднего по времени отклонения директора от нормали, в результате чего он осциллирует вблизи нового квазиравновесного положения — стационарный эффект в основном обусловлен действием нелинейных моментов и несколько уменьшается за счет потоков жидкости.

О степени деформации ориентационной структуры кристалла при воздействии периодических сдвига и сжатия будем судить по изменению оптических свойств жидкокристаллической ячейки, в которой гомеотропный слой нематического кристалла помещен между скрещенными поляроидами. В отсутствие внешнего воздействия на кристалл ячейка непрозрачна по отношению к потоку света, падающему на нее по нормали. При отклонении оси кристалла от первоначальной ориентации в плоскости, не совпадающей с осями поляроидов, ячейка просветляется. В линейной области эффекта, в которой поворот директора определяется в основном периодическим сдвигом граничной пластины, прозрачность ячейки, нарастая с увеличением амплитуды сдвига U_0 , достигает первого максимума при некотором значении $U_{0,max}$. Изменение характера внешнего воздействия на НЖК-слой меняет оптическую картину его деформации. При переходе в нелинейную область эффекта, когда начинает сказываться сжатие слоя, возникает стационарная деформация нематической структуры, и просветление ячейки наблюдается при амплитудах сдвига, меньших тех, которые необходимы при идеальном сдвиге. Меняются также временной характер прозрачности и спектральные составляющие интенсивности оптического потока, прошедшего через ячейку.

Просветление жидкокристаллической ячейки, возникающее при воздействии эллиптического сдвига на нематическую структуры, описано в работах [9,10] для низких частот, на которых длина вязкой волны больше толщины жидкокристаллического слоя. В данной работе деформация структуры нематического кристалла при бинарном воздействии периодических сдвига и сжатия анализируется в широком диапазоне частот, включая ультразвуковые, на которых длина вязкой волны много меньше толщины слоя. Описание искажения нематической структуры проводится в рамках классической гидродинамики жидких кристаллов [11,12] с учетом квадратичных слагаемых в уравнении вращения директора и уравнении движения; учитываются все факторы, которые могут определить деформацию структуры: объемные моменты и напряжения, граничные напряжения, обусловленные дополнительным смещением подвижной пластины по нормали, условия ориентации молекул на границах слоя. Конечными результатами расчета являются выражения для углов поворота оптической оси кристалла в НЖК-слое и прозрачности жидкокристаллической ячейки.

1. Теоретический анализ

Рассмотрим двухмерную картину деформации гомеотропно ориентированного НЖК-слоя толщины h и длины L ($L \gg h$) при эллиптическом движении одной из граничных пластин, считая, что течение жидкости и поворот молекул происходят в плоскости сдвига XZ , где ось X указывает направление сдвига, а ось Z направлена перпендикулярно границам слоя (возможность пренебрежения азимутальными возмущениями в ориентации молекул при бинарном воздействии обсуждается в работе [10]). Выбирая начало координат $Z = 0$ на нижней неподвижной границе слоя, зададим воздействие на структуру нематического кристалла движением верхней границы в виде

$$V_X|_{Z=h+U_h} = V_0 \cos \omega T, \quad V_Z|_{Z=h+U_h} = \beta V_0 \sin \omega T.$$

Здесь V_0 и βV_0 — амплитуды продольной и поперечной составляющих скорости движения пластины, $U_h = -\beta U_0 \cos \omega T$ — смещение верхней границы слоя по нормали, $U_0 = V_0/\omega$, T — время, ω — частота.

Ограничимся частотами, при которых длина звуковой волны много больше длины слоя, а длина ориентационной волны меньше толщины слоя, считая выполняющимися неравенства

$$\frac{K_{33}}{\gamma_1 h^2} \ll \omega < \frac{c}{L},$$

где c — скорость звука в кристалле, K_{33} — упругий модуль Франка, $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$, α_k ($k = 1, \dots, 6$) — коэффициенты вязкости Лесли. В дальнейших расчетах малые коэффициенты вязкости α_1 и α_3 полагаются равными нулю, при этом $\gamma_1 \approx -\gamma_2 \approx -\alpha_2$. Ограничение частоты снизу позволяет пренебрегать упругими моментами Франка при описании осцилляций директора,

ограничение частоты сверху позволяет при формулировке уравнений движения считать нематический кристалл несжимаемой жидкостью.

В расчете полагаем деформации нематического кристалла малыми, считая, что малы углы θ отклонения молекул от оси Z , и линеаризуем уравнения движения и поворота молекул по θ .

Вводя безразмерные координаты $x = X/h$, $z = Z/h$, время $t = \omega T$ и безразмерные скорости $v_k = V_k/(\omega h)$, представим уравнения для гидродинамических переменных в виде [13]

$$\begin{aligned} \partial_t \theta - \varepsilon \Delta \theta - v_{x,z} &= -\theta_{,x} v_x - \theta_{,z} v_z - 2\theta v_{zz}, \\ [2\eta \sigma^2 \Delta \partial_t - (\eta \Delta^2 + \partial_z^2 \partial_x^2)] v_x + \varepsilon \Delta \partial_z^3 \theta &= \\ = [\partial_z (\partial_z^2 - \partial_x^2) (v_{z,z} \theta) - 2\partial_x \partial_z^2 (v_{xz} \theta)] + 2\eta \sigma^2 \partial_z [\Delta v_z v_{1x} - v_z v_{x,z^2}], \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{\rho \omega h^2}{2\eta}, \quad \varepsilon = \frac{K_{33}}{\gamma_1 \omega h^2} = \frac{\lambda}{2\sigma^2}, \quad \lambda = \frac{\rho K_{33}}{\gamma_1 \eta} \sim 10^{-6},$$

ρ — плотность, $\eta = (\alpha_4 + \alpha_6)/2\gamma_1$ — безразмерная вязкость в вязкой волне, распространяющейся вдоль оси кристалла.

Граничные условия для скорости жидкости и угла поворота молекул на верхней подвижной границе запишем для $z = 1$, раскладывая по степеням $u_{1z} = u_z|_{z=1} = -\beta u_0 \sin t$ ($u_0 = U_0/h$ — безразмерная амплитуда сдвига) и ограничиваясь первой степенью разложения

$$\begin{aligned} v_x|_{z=0} = v_z|_{z=0} &= 0, \\ v_x + v_{x,z} u_{1z}|_{z=1} &= u_0 \cos t, \\ v_z + v_{z,z} u_{1z}|_{z=1} &= \beta u_0 \sin t. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия для угла θ определяем с учетом конечной связи молекул НЖК с ограничивающими слой поверхностями. Полагая поверхностную плотность ориентирующей энергии изотропной и равной $F_s = 1/2w\theta^2$, получим

$$\begin{aligned} \theta - \delta \theta_{z,z}|_{z=0} &= 0, \\ \theta + (\delta + u_{1z}) \theta_{z,z}|_{z=1} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\delta = K_{33}/wh$ — безразмерный параметр.

Представим далее скорости v и угол θ в виде суммы осциллирующих с частотой внешнего воздействия (индекс "1") и стационарных (индекс "2") слагаемых

$$v = v_1 + v_2 \quad \theta = \theta_1 + \theta_2,$$

и рассмотрим отдельно уравнения для v_1 , θ_1 и v_2 , θ_2 .

Отбрасывая малые производные по x ($\partial/\partial x \sim 1/L \ll \partial/\partial z \sim \sigma$), выделим из (1.1)-(1.3) уравнения для осциллирующих переменных

$$\begin{aligned} \partial_t \theta_1 - \varepsilon \partial_z^2 \theta_1 - v_{1x,z} &= 0, \\ (2\sigma^2 \partial_t - \partial_z^2) v_{1x} + \frac{\varepsilon}{\eta} \partial_z^3 \theta_1 &= 0, \quad \text{div } \vec{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} z = 0: \quad v_{1x} &= v_{1x} = \theta_1 - \delta \theta_{1,z} = 0, \\ z = 1: \quad v_{1x} &= u_0 \cos t, \quad v_{1z} = \beta u_0 \sin t, \quad \theta_1 + \delta \theta_{1,z} = 0 \end{aligned}$$

и уравнения для стационарных переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v_{2x}}{\partial z^3} &= \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\left\langle v_{1x} \theta_{1,x} + v_{1z} \theta_{1,z} + \theta_1 \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right\rangle \right] + \\ &\quad + \frac{2\sigma^2 \eta}{\eta_2} \frac{\partial}{\partial z} \langle (v_1 \nabla) v_{1x} \rangle, \\ \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle u_{1x} v_{1z} \rangle - \frac{\partial v_{2x}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

с условиями

$$\begin{aligned} v_{2x}|_{z=0} &= 0, \quad v_{2x} + \langle u_{1z} v_{1x,z} \rangle|_{z=1} = 0, \quad \int_0^1 v_{2x} dz = 0, \\ \theta_2 - \delta \theta_{2,z}|_{z=0} &= 0, \quad \theta_2 + \delta \theta_{2,z} + \langle u_{1z} \theta_{1,z} \rangle|_{z=1} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\eta_2 = (\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_2)/2\gamma_1$ — вязкость в стационарном потоке v_{2x} , угловые скобки означают усреднение по периоду колебаний.

Решая уравнения для осциллирующих скоростей v_{1z} , v_{1x} и угла θ_1 , получим для них следующие выражения:

$$\begin{aligned} v_{1x} &\approx u_0 \mathbf{Re} \left\{ e^{-it} \left[z + \psi_1 + \beta i x (6(z^2 - z) + \psi_2) \right] \right\}, \\ v_{1z} &\approx u_0 \beta \mathbf{Re} \left\{ i e^{-it} (3z^2 - 2z^3 + \psi_3) \right\}, \\ \theta_1 &\approx u_0 \mathbf{Re} \left\{ i e^{-it} \left[1 + \psi_4 - \right. \right. \\ &\quad - \frac{s(1+i)}{(1+i+2\delta q) \sin s} \left(e^{(i-1)qz} + (\cos s - \delta s \sin s) e^{(i-1)q(1-z)} \right) - \\ &\quad \left. \left. - \beta i x \left[6(1-2z) + \psi_5 - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{(1+i)(1-\cos s + \delta \sin s)}{(1+i+2\delta q)(2(1-\cos s) - s \sin s)} \left(e^{(i-1)qz} - e^{(i-1)q(1-z)} \right) \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $s = (1+i)\sigma$ и $(1+i)q = (1+i)\sqrt{\eta/[2\varepsilon(\eta+1)]}$ — комплексные волновые числа в вязких и ориентационных волнах, распространяющихся вдоль оси кристалла.

Комплексные функции $\psi_k = \psi_{k1}(z) + i\psi_{k2}(z)$ ($k = 1...5$) имеют вид

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\sin sz}{\sin s} - z, \\ \psi_2 &= s \frac{\sin s - \sin sz - \sin[s(1-z)]}{2(1 - \cos s) - s \sin s} - 6(z^2 - z), \\ \psi_3 &= - \int \psi_2 dz = \\ &= \frac{(1 - \cos s)(1 - \cos sz) + \sin s(\sin sz - sz)}{2(1 - \cos s) - s \sin s} - (3z^2 - 2z^3), \\ \psi_4 &= \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{\cos(sz)s}{\sin(s)} - 1, \\ \psi_5 &= - \frac{d\psi_2}{dz} = \frac{s^2 [\cos sz(1 - \cos s) - \sin s \sin sz]}{2(1 - \cos s) - s \sin s} - (6 - 12z).\end{aligned}$$

Функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 обращаются в ноль на границах слоя. На низких частотах, когда справедливо неравенство $\sigma \ll 1$, функции ψ_k малы $|\psi_k| \ll 1$, и выражения для скоростей v_{1x}, v_{1z} и угла θ_1 совпадают с полученными ранее в работах [9,10].

Рассмотрим деформацию структуры НЖК в центральной части слоя для координат x , удовлетворяющих неравенству $6\beta x < 1$. Скорость потоков v_{2x} в этом случае определяется выражением

$$v_{2x} = \frac{\beta u_0^2}{2} \{F(z) + A(3z^2 - 2z)\}, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned}A &= - \frac{2}{\beta u_0^2} \langle v_{1x, z} u_z \rangle |_{z=1} = 1 + \psi_{41}|_{z=1}, \\ F(z) &= \tilde{V}(z) + \tilde{V}(1)(2z - 3z^2) - 6(z - z^2) \int_0^1 \tilde{V}(z) dz,\end{aligned}$$

$\tilde{V}(z)$ — частное решение уравнения для потоков в системе (1.5)

$$\begin{aligned}\tilde{V}(z) &= \frac{1}{\eta_2} \left\{ (3z^2 - 2z^3 + \psi_{31})(1 + \psi_{41}) + \psi_{32}\psi_{42} + \right. \\ &+ \int_0^z \left\{ [z' + \psi_{11}(z')] [6(1 - 2z') + \psi_{51}(z')] + \psi_{12}(z')\psi_{52}(z') \right\} dz + \\ &+ 2\sigma^2 \eta \int_0^z \int_0^{z'} \left\{ [6(z''^2 - z'') + \psi_{21}(z'')] \psi_{12}(z'') - [z'' + \psi_{11}(z'')] \psi_{22}(z'') + \right.\end{aligned}$$

$$+ [3z''^2 - 2z''^3 + \psi_{31}(z'')] \psi_{42}(z'') - [1 + \psi_{41}(z'')] \psi_{32}(z'') \} dz'' dz' \}.$$

Интегралы в функциях $F(z)$ и $\tilde{V}(z)$ допускают аналитическое представление, однако ввиду громоздкости эти выражения опущены.

Первое слагаемое в формуле (1.7), обусловленное объемными напряжениями, обращается в ноль на границах слоя.

Для θ_2 получим следующее выражение:

$$\theta_2 = \frac{\beta u_0^2}{\varepsilon} \Phi(\delta, \sigma, z) = \frac{2\beta \sigma^2 u_0^2}{\lambda} \Phi(\delta, \sigma, z), \quad (1.8)$$

где

$$\Phi(\delta, \sigma, z) = \frac{1}{2} \left\{ (z + \psi_{11}) (3z^2 - 2z^3 + \psi_{31}) + \psi_{12} \psi_{32} - \int_0^z F(z') dz' - A(z^3 - z^2) - \frac{\delta + z}{1 + 2\delta} \right\}.$$

Деформация структуры кристалла определяется полным углом поворота молекул θ , который представим в виде суммы осциллирующего угла θ_1 (1.6) и стационарного угла θ_2 (1.8): $\theta = \theta_2 + \theta_1$.

Особенности деформации структуры нематического кристалла при воздействии эллиптического сдвига в линейном и нелинейном режимах определяют оптические свойства жидкокристаллической ячейки, содержащей слой нематического жидкого кристалла с исходной гомеотропной ориентацией, помещенный между скрещенными поляроидами. В исходном состоянии с недеформированной структурой кристалла ячейка непрозрачна по отношению к световому потоку, падающему на нее нормально. Отклонение молекул нематика от нормали при внешнем воздействии приводит к изменению разности фаз в обыкновенной и необыкновенной световых волнах в кристалле и, как результат, к изменению оптической прозрачности ячейки. Определим оптическую прозрачность $m(t)$ НЖК-ячейки как отношение светового потока $I(t)$, прошедшего через систему, к падающему I_0 . При неоднородной по толщине слоя ориентации молекул и малых углах θ прозрачность $m(t)$ приводится к виду [14]

$$m(t) = \frac{I(t)}{I_0} = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{\Delta n}{2} k h \int_0^1 \theta^2(x, z) dz \right\} \sin^2(2\varphi), \quad (1.9)$$

где $\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$ — оптическая анизотропия, n_{\parallel} и n_{\perp} — показатели преломления вдоль и ортогонально оси кристалла, $k = 2\pi/\Lambda$ — волновое число в световой волне с длиной волны Λ , φ — угол между направлением сдвига и ориентацией одного из поляроидов. Рассмотрим далее случай максимальной по φ прозрачности, считая $\varphi = \pi/4$.

Подставляя $\theta = \theta_1 + \theta_2$ в выражение для прозрачности и преобразуя его, получим

$$m(t) = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} [(P_{00} + P_{01}) - P_{1s} \sin t - P_{1c} \cos t + P_{2s} \sin 2t - P_{2c} \cos 2t] \right\}. \quad (1.10)$$

Коэффициенты P_i зависят от частоты через волновое число σ

$$\begin{aligned} P_{00} &= \Delta n k_o h \left(\frac{\beta \sigma^2 u_0^2}{\lambda} \right)^2 f_{00}, & P_{01} &= \Delta n k_o h u_0^2 f_{01}, \\ P_{1s} &= \Delta n k_o h \frac{\beta \sigma^2 u_0^3}{\lambda} f_{1s}, & P_{1c} &= \Delta n k_o h \frac{\beta \sigma^2 u_0^3}{\lambda} f_{1c}, \\ P_{2s} &= \Delta n k_o h u_0^2 f_{2s}, & P_{2c} &= \Delta n k_o h u_0^2 f_{2c}, \end{aligned}$$

а функции f_{ij} определяются следующими интегралами:

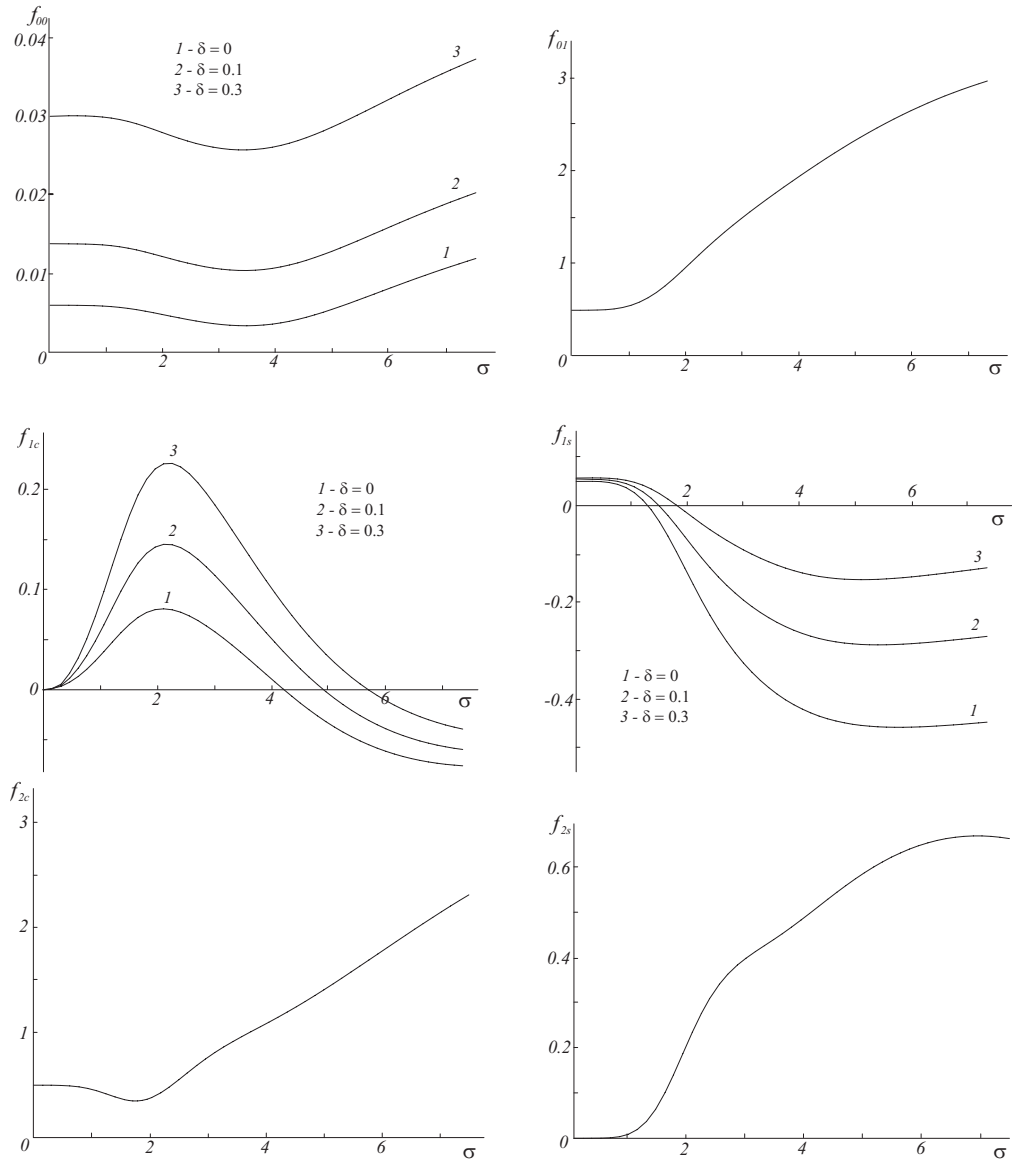
$$\begin{aligned} f_{00} &= 4 \int_0^1 \Phi(\delta, \sigma, z)^2 dz, & f_{01} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(1 + \psi_{41})^2 + \psi_{42}^2 \right] dz, \\ f_{1s} &= -4 \int_0^1 \Phi(\delta, \sigma, z)(1 + \psi_{41}) dz, & f_{1c} &= 4 \int_0^1 \Phi(\delta, \sigma, z) \psi_{42} dz, \\ f_{2s} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \psi_{41}) \psi_{42} dz, & f_{2c} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(1 + \psi_{41})^2 - \psi_{42}^2 \right] dz. \end{aligned}$$

Функции f_{01}, f_{2s}, f_{2c} не содержат параметр δ и, следовательно, не зависят от условий ориентации молекул на границах НЖК-слоя. Зависимость f_{ij} от волнового числа σ для жидкого кристалла МББА с параметрами [11] $K_{33} = 0.78 \cdot 10^{-11}$ Н, $\gamma_1 \approx 0.078$ Па·с, $\alpha_4 \approx 0.104$ Па·с, $\alpha_6 \approx -0.034$ Па·с ($\eta = 0.4, \eta_2 = 1.45$) представлена на рис. 1.1.

2. Результаты и их обсуждение

Возможность регистрации деформации структуры нематического жидкого кристалла на основе изменения оптической прозрачности определяется формулой (1.10). Рассмотрим особенности оптических эффектов, возникающих при деформации НЖК в линейном и нелинейном режимах.

В общем случае прозрачность НЖК-ячейки обусловлена суммарным углом поворота молекул $\theta = \theta_1 + \theta_2$, причем θ_1 определяется линейными ($\theta_1 \sim u_0$), а θ_2 нелинейными ($\theta_2 \sim u_0^2$) гидродинамическими эффектами. Определим значения параметров, при которых преобладающий вклад в прозрачность вносит осциллирующий угол θ_1 , как линейную область эффекта, и значения параметров, при которых основной вклад в прозрачность связан


 Рис. 1.1. Зависимость функций f_{ij} от σ

со стационарной деформацией θ_2 , как нелинейную. Эти области разделяются значениями безразмерного параметра l

$$l \approx \sqrt{\frac{P_{00}}{P_{01}}} \sim 0.1 \frac{\beta\gamma\omega hU_0}{K_{33}},$$

введенного ранее в работе [9].

Линейной области эффекта соответствуют малые значения параметра $l \ll 1$, а скорости и углы определяются формулами (1.6). В этом случае $P_{00} \ll P_{01}$, $|P_{1s}|, |P_{1c}| \ll P_{2,c}$ — стационарная деформация кристалла мала и не влияет на прозрачность НЖК-ячейки, а выражение для $m(t)$ принимает

вид

$$m(t) = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} [P_{01} + P_{2s} \sin 2t - P_{2c} \cos 2t] \right\}. \quad (2.1)$$

Параметр δ не входит в выражение для P_{01}, P_{2s}, P_{2c} , поэтому в линейной области эффекта прозрачность НЖК-ячейки не зависит от условий ориентации молекул кристалла на границах.

Оптическая прозрачность и, следовательно, интенсивность светового потока $I(t) = m(t) \cdot I_0$ периодически зависят от времени. Представим прозрачность $m(t)$ разложением в ряд Фурье

$$m(t) = m_0 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos(kt + \nu_k),$$

где m_0 — постоянная составляющая, m_k — гармоники, ν_k — фазовая задержка по отношению к сдвиговым колебаниям пластины. Спектральные компоненты m_k определяются следующими выражениями:

$$m_0 = \frac{1}{4} [1 - \cos P_{01} J_0(P_2)],$$

$$m_{4k-2} = \frac{1}{4} \sin P_{01} J_{2k-1}(P_2),$$

$$m_{4k} = \frac{1}{4} \cos P_{01} J_{2k}(P_2),$$

$$m_{2k-1} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2)$$

где J_0, J_n — функции Бесселя первого рода, $P_2 = \sqrt{P_{2s}^2 + P_{2c}^2}$.

В линейной области эффекта спектр прозрачности содержит лишь четные гармоники. На низких частотах, когда $\sigma \ll 1$, получим $P_2 = P_{01} = 1/2 \Delta n k_o h u_0^2$. В этом случае прозрачность определяется лишь параметром P_2 , выражения для постоянной составляющей m_0 и P_2 совпадают с полученным ранее в работе [9], где отмечено согласие теории с данными эксперимента. Постоянная составляющая прозрачности m_0 возрастает с увеличением амплитуды сдвига от нулевого значения при $P_2 = 0$ до максимального $m_{0,max} = 0,323$ при $P_2 = 1,95$ и далее осциллирует вблизи значения $m_0 = 0,25$. Амплитуда $u_{0,max}$, соответствующая первому максимуму прозрачности, не зависит от частоты.

На высоких частотах, когда $\sigma > 3$, параметры P_{01}, P_2 пропорциональны волновому числу σ , в этом случае $u_{0,max}$ уменьшается с ростом частоты по закону $u_{0,max} \sim \omega^{-1/4}$.

В нелинейной области ($l \gg 1$) прозрачность приводится к виду

$$m = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} [P_{00} - P_{1s} \sin(t) - P_{1c} \cos t] \right\}. \quad (2.3)$$

Постоянная составляющая и спектральные компоненты прозрачности определяются выражениями

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{4} [1 - \cos P_{00} J_0(P_1)], \\ m_{2k-1} &= \frac{1}{4} \sin(P_{00}) J_{2k-1}(P_1), \\ m_{2k} &= \frac{1}{4} \cos(P_{00}) J_{2k}(P_1), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $P_1 = \sqrt{P_{1s}^2 + P_{1c}^2}$, спектральное разложение прозрачности $m(t)$ содержит как четные, так и нечетные гармоники.

В нелинейной области эффекта имеет место оценка $P_{00}/P_{1s} \sim l \gg 1$, следовательно, первые по амплитуде u_0 максимумы гармоник m_k определяются в основном значением P_{00} — соответствующие амплитуды сдвига $u_{0,max}$ с увеличением частоты и эллиптичности смещаются в область меньших значений. На низких частотах получим зависимость $u_{0,max} \sim (\beta\omega)^{-1/2}$. На высоких частотах, когда $\sigma > 4$, зависимость $u_{0,max}$ от ω и β аппроксимируется выражением $u_{0,max} \sim (\beta\omega)^{-1/2} (\omega/\omega_0 - 1)^{-1/4}$, где $\omega_0 = 2\eta\sigma_0^2/\rho h^2$, а волновое число σ_0 зависит от δ и подбирается по графику функции f_{00} : для $\delta = 0$ получим $\sigma_0 \approx 3$.

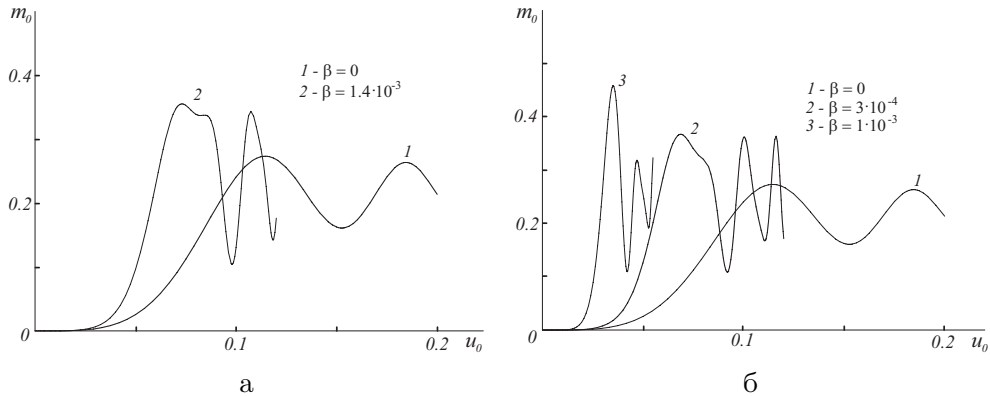


Рис. 2.1. Зависимость постоянной составляющей прозрачности m_0 от безразмерной амплитуды сдвига u_0 на частотах $\nu = 200$ Гц (а) $\nu = 1000$ Гц (б)

Рассмотрим отдельно влияние малой эллиптичности в движении граничной пластины на прозрачность НЖК-ячейки на примере ячейки с нематическим жидким кристаллом МББА, дополняя приведенные выше параметры кристалла значениями $n_{\perp} = 1,58$, $\Delta n = 0,2$ [11], полагая $h = 10^{-4}$ м, длину световой волны $\Lambda = 650$ Нм и предполагая жесткую ориентацию молекул на границе, что дает $\delta = 0$. На рис. 2.1 приведены зависимости постоянной составляющей прозрачности m_0 от безразмерной амплитуды сдвига $u_0 = U_0/h$, построенные для частот сдвига $\nu = 200$ Гц и $\nu = 1000$ Гц и значений эллиптичности $\beta \ll 1$. Составляющая m_0 определялась численным усреднением по периоду колебаний выражения (1.10) для прозрачности. Как видно из рис. 2.1, даже малая эллиптичность в дви-

жении граничной пластины может существенно по отношению к "чистому сдвигу" менять прозрачность жидкокристаллической ячейки, причем роль эллиптичности возрастает с увеличением частоты. На частоте 200 Гц при $\beta \approx 1,4 \cdot 10^{-3}$ первый максимум постоянной составляющей прозрачности достигается при амплитуде сдвига $u_{0,max}$, равной $u_{0,max} \approx 0,6 u_{0,max}^{(0)}$, где $u_{0,max}^{(0)}$ — амплитуда сдвига, соответствующая первому максимуму при "чистом сдвиге". На частоте 1000 Гц при значениях $\beta \approx 10^{-3}$ и $\beta \approx 3 \cdot 10^{-4}$ максимумы прозрачности достигаются соответственно при $u_{0,max} \approx 0,3 u_{0,max}^{(0)}$ и $u_{0,max} \approx 0,6 u_{0,max}^{(0)}$. Амплитуды нормального смещения граничной пластины $U_{1z} = \beta U_0$ при этом ничтожно малы и сопоставимы с длиной молекул нематического кристалла ($\approx 20 \div 30 \text{ \AA}$); на частоте $\nu = 1000$ Гц для приведенных значений β получим соответственно $U_{1z} \approx 38 \text{ \AA}$ и $U_{1z} \approx 20 \text{ \AA}$.

В нашем расчете амплитуды сдвига предполагались малыми настолько, чтобы были малы углы отклонения молекул от нормали $\theta \ll 1$, в этом случае справедливы исходные уравнения динамики (1.1) и формулы для прозрачности (1.9)-(1.10). Покажем, что описанные оптические свойства НЖК-ячейки (чередование максимумов и минимумов прозрачности) должны наблюдаться в эксперименте в пределах малых углов θ . Для этого оценим количество максимумов постоянной составляющей прозрачности, наблюдаемых при максимальных по z углах θ , не превышающих значение $\theta_M = 0,5$, что позволяет отбросить в уравнениях (1.1) и формуле (1.10) слагаемые порядка малости $\theta_M^3 \sim 0,1$ и меньшие. В расчете используем параметры жидкого кристалла МББА, полагая $h = 10^{-4}$ м и предполагая жесткую ориентацию молекул на границе.

В линейной области эффекта $\theta_2 \ll \theta_1 \approx u_0$ — постоянная составляющая прозрачности m_0 определяется первой из формул (2.2). Ограничивая угол $\theta_1 < 0,5$ на низких частотах ($\sigma \ll 1$), получим соотношение $P_{01} \approx P_2 < 37$. В этой области значений P_2 постоянная составляющая прозрачности имеет 6 максимумов. На высоких частотах ($\sigma \gg 1$) параметры P_{01}, P_2 можно оценить выражением $P_{01} \approx P_2 \approx 0,5 + \sigma/3$, а углы малы при амплитудах сдвига, меньших $u_0 < 0,5/\sigma$. Число N максимумов m_0 , описываемых настоящим расчетом, в этом случае оценивается целой частью выражения $(6 + 4\sigma)/\sigma^2 + 1/2$ и зависит от частоты: при значениях $\sigma = 3$ и $\sigma = 7$ получим соответственно $N = 2$ и $N = 1$.

В нелинейной области эффекта $\theta_1 \ll \theta_2 \sim u_0^2$. Постоянная составляющая прозрачности дается первой из формул (2.4), в которой $P_{00}/P_1 \sim l \gg 1$ — первые максимумы m_0 определяются значениями P_{00} . Максимальное по z значение угла θ_2 равно $\theta_2 = 0,012\beta\sigma^2 u_0^2/\lambda$; ограничивая его сверху величиной $\theta_M = 0,5$, получим неравенство $P_{00} = (\beta\sigma^2 u_0^2/\lambda)^2 f_{00} \leq 45$ — в эту область значений параметра P_{00} попадает 7 максимумов m_0 .

Таким образом, условие малости угла поворота молекул, определяющее применимость расчета, выполняется вблизи первых максимумов прозрачности НЖК-ячейки.

Заключение

Приведенные расчеты определяют свойства жидкокристаллической ячейки при бинарном воздействии на нее периодического сдвига и сжатия. Показано, что эллиптичность в движении граничной пластины может существенно по отношению к "чистому сдвигу" менять картину деформации структуры нематического жидкого кристалла и оптические свойства жидкокристаллической ячейки, причем роль эллиптичности возрастает с увеличением частоты. Возможность эллиптичности, даже малой, и нелинейной деформации НЖК-структуры необходимо учитывать при исследовании воздействия периодического сдвига на гомеотропный нематический жидкий кристалл.

Литература

- [1] Капустин, А.П. Акустика жидких кристаллов / А.П. Капустин, О.А. Капустина. — М.: Наука, 1986. — 248 с.
- [2] Vúka, A. Pattern Formation in Liquid Crystals / A. Vúka, L Kramer. — NY.: Springer-Verlag. 1996. — 339 p.
- [3] Капустина, О.А. Акустика жидких кристаллов. Современный взгляд на проблему (обзор) / О.А. Капустина // Кристаллография. — 2004. — Т. 49. — № 4. — С.759–772.
- [4] Dubois-Violette, E. Theory and experiments on plane shear flow instabilities in nematic / E. Dubois-Violette, E. Guyon, I. Janossy [et al] // J. de Mec. — 1977. — V. 16. — № 5. — P. 733–767.
- [5] Scudieri, F. High-frequency shear instability in nematic liquid crystal / F. Scudieri // Appl. Phys. Lett. — 1976. — V. 29. — P. 398–399.
- [6] Burghardt, W.R. Oscillatory shear flow of nematic liquid crystals / W.R. Burghardt // J. Rheol. — 1991. — V. 35. — P.49–62.
- [7] Baimakova, O.A. The orientational instability of nematic layers under oscillatory shear / O.A. Baimakova, O.A. Scaldin, A.N. Chuvyrov // Mol. Liq. Cryst. — 1995. — V. 265. — P.199–314.
- [8] Krehov, A.P. Flow-alignment instability and slow director oscillations in nematic liquid crystals under oscillatory flow / A.P. Krehov, L. Kramer // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 53. — P.4925–4932.
- [9] Капустина, О.А. Оптические свойства гомеотропно ориентированного слоя нематического кристалла при эллиптической деформации / О.А. Капустина, Е.Н. Кожевников [и др.] // ЖЭТФ. — 1984. — Т. 87. — С. 849–858.
- [10] Кожевников, Е.Н. Оптические свойства нематического жидкого кристалла при бинарном воздействии периодического сдвига и сжатия / Е.Н. Кожевников, Я.В. Кучеренко // Кристаллография. — 2008. — Т.53. — №4. — С.8.

- [11] Stephen, M.J. Physics of liquid crystals / M.J. Stephen, J.P. Straley // Reviews of Modern Physics. — 1974. — V. 46. — P. 617–703.
- [12] Де Жен, П. Физика жидких кристаллов / П. Де Жен. — М: Мир, 1977. — 399 с.
- [13] Кожевников, Е.Н. Доменная структура в слое нематического жидкого кристалла в низкочастотном потоке Куэтта / Е.Н. Кожевников // Кристаллография. — 2005. — Т.50 — №5. — С. 908–914.
- [14] Кожевников, Е.Н. К вопросу об использовании жидких кристаллов в акустооптических устройствах. / Е.Н. Кожевников, И.А. Чабан // Акустический журнал. — 1975. — Т.21. — №6. — С.900–907.

Поступила в редакцию 15/II/2009;
в окончательном варианте — 15/II/2009.

DEFORMATION OF NEMATIC STRUCTURE UNDER BINARY ACTION ON LIQUID CRYSTAL OF SHEAR AND PRESSURE

© 2009 E.N. Kozhevnikov, Y.V. Kucherenko³

The distortion of the nematic structure of NLC under binary action of periodic shear and pressure is theoretically described in wide range of frequencies. In the calculation of the effect under formulating the boundary conditions, the mobility at the normal of the upper plate and finite value of the orientation energy on the layer boundaries is taken into consideration. Nonlinear dependence of a nematic structure deformation on the shear amplitude is proved. The possibility of optical registration of structure deformation is analyzed.

Key words and phrases: nematic liquid crystal, periodic shear, directors oscillation, structure deformation, streams, transparency.

Paper received 15/II/2009.
Paper accepted 15/II /2009.

³Kozhevnikov Evgeniy Nikolaevich (kozhev@ssu.samara.ru), Kucherenko Yana Victorovna (yana20002@yandex.ru), Dept. of Mathematical modelling in the mechanic, Samara State University, Samara, 443011, Russia.