УДК 519.681

В.Н. Никишов, Л.А. Сараев*

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОТЕРЬ И УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК

В публикуемой статье предложена математическая модель управления рисками грузоперевозок, которая представляет собой обобщение классической транспортной задачи, учитывающей риски потери грузов во время их доставки. Рассмотрены рыночные ситуации превышения предложения над потребностями. Получен численный анализ результатов расчетов в виде зависимости решения от параметров задачи.

Ключевые слова: поставщик, потребитель, целевая функция, ограничения, стохастическая транспортная задача, управление рисками, бета-распределение.

Пусть некоторый груз, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i единиц $(i=1..m)$, необходимо доставить n потребителям B_j в количестве b_j $(j=1..n)$. Стоимость перевозки единицы груза c_{ij} от поставщика A_i к потребителю B_j известна. Очевидно, что при транспортировке груза вследствие различных факторов риска (например ДТП) возможны его потери. Эти потери при перевозке груза от A_i к B_j в размере x_{ij} можно представить в виде

$$z_{ij} = I_{ij} y_{ij} .$$

Здесь I_{ij} — индикаторная случайная величина, фиксирующая реализацию риска и принимающая значения 0 или 1, y_{ij} — размер убытка от гибели или повреждения груза.

$$P(I_{ij} = 1) = P(z_{ij} > 0) = q_{ij} , \; P(I_{ij} = 0) = 1 - P(z_{ij} > 0) = 1 - q_{ij} = p_{ij} , \tag{1}$$

где q_{ij} — вероятность реализации риска потери груза при перевозке от поставщика A_i к потребителю B_j.

Очевидно, что распределения величин z_{ij} и y_{ij} связаны соотношением

$$P(y_{ij} < t) = P(z_{ij} < t \,|\, z_{ij} > 0) . \tag{2}$$

В актуарной математике размер убытка y_{ij} выражается через степень ущерба χ_{ij} и стоимость перевозимого груза x_{ij} с помощью формулы $y_{ij}=\chi_{ij}\, x_{ij}$. При этом случайные величины I_{ij} и χ_{ij} являются независимыми, поскольку попадание в аварию зависит от одних факторов, а размер ущерба совершенно от других факторов [1; 2]. Степень ущерба χ_{ij} определяется отношением размера потерь к стоимости груза и удовлетворяет неравенству $0<\chi_{ij} \le 1$.

Никишов Виктор Николаевич (TSh-sea05@yandex.ru), *Сараев Леонид Александрович* (saraev@ssu.samara.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Будем считать, что степени ущерба не зависят от маршрута перевозки и имеют одинаковое бета-распределение [3].

$$P(\chi_{ij} < t) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^t \eta^a (1-\eta)^b d\eta \,; \; a > 0; b > 0 \,. \quad (3)$$

Для определения параметров a и b в законе распределения (3) нужно задать математическое ожидание

$$\chi_0 = E(\chi_{ij})$$

и дисперсию случайной величины степени ущерба χ_{ij}

$$D(\chi_{ij}) = \sigma^2(\chi_{ij}) = \sigma^2(\chi) \,.$$

Тогда параметры a и b определятся соотношениями

$$a = -\chi_0 + \chi_0^2(1-\chi_0)/\sigma^2(\chi) \,; \; b = (1-\chi_0)a/\chi_0 \,.$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины степени ущерба χ_{ij} можно определить по статистическим данным

$$\chi_0 = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} \chi_{ij}(k) \,; \sigma^2(\chi) = \frac{1}{l-1}\sum_{k=1}^{l-1} (\chi_{ij}(k) - \chi_0)^2 \,.$$

Здесь $\chi_{ij}(k)$ – фактически наблюдаемая реализация величины χ_{ij}, принимающая дискретный набор значений с вероятностями $P(\chi_{ij} = \chi(k)) = r(k)$. В этом случае математическое ожидание принимает вид

$$\chi_0 = E(\chi_{ij}) = \sum_{k=1}^{s} \chi(k) r(k) \,.$$

Доставка грузов от поставщика к потребителю осуществляется на основе контрактов, при этом условия перевозки зависят от того, кто несет риск случайной гибели, повреждения груза. В международной практике условия перехода риска от продавца к покупателю регламентируются условиями «Инкотермс». Здесь можно выделить несколько вариантов [4].

В первом варианте, наиболее распространенном на практике, покупатель оплачивает стоимость груза и самостоятельно вывозит его. В этом случае риск случайной гибели, утраты, повреждения груза возложен на потребителя, он также несет все последствия недопоставки груза или его излишнего завоза. Этот вариант перевозки приводит к задаче потребителя. Потребитель принимает весь риск на себя и минимизирует потери груза при транспортировке и потери, связанные с хранением излишне завезенной продукции.

Во втором варианте доставка поставщиком груза потребителю оплачивается только по факту доставленных грузов. Все убытки от потерь груза, его недопоставки и расходы по хранению невывезенной продукции несет поставщик. Этот вариант перевозки приводит к задаче поставщика. Поставщик в силу конкуренции вынужден доставить груз, принимает на себя его потери, штрафы за ненадлежащее исполнение обязательств по доставке и несет дополнительные расходы, связанные с хранением остатка продукции.

В третьем варианте доставка осуществляется транспортно-экспедиционной организацией, а перевозчик принимает на себя риск потери груза.

Потери груза при перевозке от поставщика от A_i к потребителю B_j в размере x_{ij} есть случайная величина

$$z_{ij} = I_{ij}\chi_{ij}x_{ij} .$$

Среднее значение и дисперсия величины потерь даются выражениями

$$E(z_{ij}) = E(I_{ij})E(\chi_{ij})x_{ij} = q_{ij}\chi_0 x_{ij} ; \; D(z_{ij}) = \chi_0^2 x_{ij}^2 (p_{ij} + \sigma^2(\chi)/\chi_0^2) .$$

В результате потерь от поставщика A_i в пункт B_j будет доставлен груз в размере

$$x_{ij} - z_{ij} = x_{ij}(1 - I_{ij}\chi_{ij}) .$$

Общие потери по всем перевозкам есть случайная величина

$$S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} I_{ij}\chi_{ij} . \tag{4}$$

В случае если окажется, что имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}(1 - I_{ij}\chi_{ij}) < b_j ,$$

то спрос потребителя не будет удовлетворен, а нанесенный потребителю ущерб будет пропорционален объему неудовлетворенного спроса

$$G_j^{(-)} = g_j^{(-)}\xi_j h(\xi_j), \; \xi_j = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}(1 - I_{ij}\chi_{ij}) . \tag{5}$$

Здесь $g_j^{(-)}$ — штраф за нехватку единицы продукта, $h(x)$ — функция Хевисайда.

Если будет иметь место неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}(1 - I_{ij}\chi_{ij}) > b_j ,$$

то возникнет необходимость в хранении избыточного продукта, а дополнительные затраты системы будут пропорциональны объему избыточного продукта

$$G_j^{(+)} = -g_j^{(+)} \xi_j h\left(-\xi_j\right), \tag{6}$$

где $g_j^{(+)}$ – затраты на хранение единицы.

Транспортные расходы в целом выражаются соотношением [5]

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ .$$

Здесь c_{ij} – транспортные расходы по перевозке единицы груза из пункта A_i в пункт B_j. Тогда общая величина расходов на транспорт с учетом потерь и штрафов составит величину

$$Q = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} (c_{ij} + I_{ij} \chi_{ij}) + G_j^{(-)} + G_j^{(+)} \right) \ . \tag{7}$$

Сведем задачу потребителя к задаче линейного программирования методом, аналогичным задаче случайного спроса, рассмотренного в работе [6].

Введем вспомогательную случайную величину дефицита

$$u_j^{(s)} = \xi_j^{(s)} h\left(\xi_j^{(s)}\right)$$

и вспомогательную случайную величину избыточного продукта

$$v_j^{(s)} = -\xi_j^{(s)} h\left(-\xi_j^{(s)}\right)$$

в пункте потребления с номером j. Величина потерь при перевозке грузов из всех пунктов в пункт потребления с номером j выражается формулой

$$w_j^{(s)} = \sum_{i=1}^{m} I_{ij} \chi_{ij} x_{ij} \ .$$

При этом имеет место очевидное соотношение

$$u_j^{(s)} - v_j^{(s)} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - b_j - w_j^{(s)} .$$

Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим случай, когда число поставщиков m=2, число потребителей n=3, а случайная величина χ_{ij} принимает три значения χ_{ij}=$\chi(k)$ с соответствующими вероятностями $r(k)$. В этом случае s пробегает значения от 0 до 9, и случайная величина

$$w_j^{(s)} = x_{1j} I_{1j} \chi_{1j} + x_{2j} I_{2j} \chi_{2j} = (x_{1j} I_{1j} + x_{2j} I_{2j}) \chi(k)$$

будет иметь следующее распределение

s	0	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9
$w_j^{(s)}$	0	$x_{1j}\chi(s)$	$x_{2j}\chi(s-3)$	$(x_{1j}+x_{2j})\chi(s-6)$
$P_j^{(s)}$	$p_{1j}p_{2j}$	$q_{1j}p_{2j}r(s)$	$p_{1j}q_{2j}r(s-3)$	$q_{1j}q_{2j}r(s-6)$

Целевая функция стохастической транспортной задачи записывается в виде

$$E(Q)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}+\sum_{j=1}^{3}\sum_{s=0}^{9}P_j^{(s)}w_j^{(s)}+\sum_{j=1}^{3}\sum_{s=0}^{9}P_j^{(s)}w_j^{(s)}+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}g_j^{(-)}\sum_{s=0}^{9}P_j^{(s)}u_j^{(s)}+\sum_{j=1}^{3}g_j^{(+)}\sum_{s=0}^{9}P_j^{(s)}v_j^{(s)}\to\min. \tag{8}$$

Ограничения для этой целевой функции имеют вид

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i;\ i=1..2;\\ \sum_{i=1}^{2}x_{ij}-b_j+u_j^{(s)}-v_j^{(s)}=w_j^{(s)};\ j=1..3; s=0..9;\\ \sum_{j=1}^{3}\sum_{s=0}^{9}\left(v_j^{(s)}-u_j^{(s)}+w_j^{(s)}\right)=\sum_{s=0}^{9}\sum_{j=0}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2}x_{ij})-b_j\right)=\sum_{s=0}^{9}\left(\sum_{i=1}^{2}a_i-\sum_{j=1}^{3}b_j\right);\\ x_{ij}\ge 0; u_{ij}\ge 0; v_{ij}\ge 0;\\ u_j^{(s)}\le b_j v_j^{(s)}\le\sum_{i=1}^{m}a_i-b_j; i=1..2;\ j=1..3; s=0..9.\end{cases} \tag{9}$$

Следует отметить, что если величины a_i превышают суммарные потребности потребителей, то первое ограничение из (9) следует удалить.

Если имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{2}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j\ ,$$

то правая часть третьего ограничения из (9) равна нулю. Если имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{2}a_i>\sum_{j=1}^{3}b_j\ ,$$

то третье ограничение их (9) следует удалить. Оно сохраняется только в том случае, если имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{2}a_i<\sum_{j=1}^{3}b_j\ .$$

Математическое ожидание стоимости доставленных грузов с учетом потерь будет даваться выражением

$$b_j^* = \sum_{i=1}^{2} x_{ij} - \sum_{s=0}^{9} w_j^{(s)} P_j^{(s)} . \tag{10}$$

Проведем численный сравнительный анализ классической и стохастической моделей. Два поставщика располагают продукцией в размере a_1=300; a_2=700. Потребности потребителей составляют b_1=250; b_1=350; b_1=400. Задана стоимостная матрица перевозок c_{ij}. Классическое решение транспортной задачи имеет вид

x_{ij}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j$	c_{ij}	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	250	0	50	300	$i=1$	0,05	0,1	0,15
$i=2$	0	350	350	700	$i=2$	0,15	0,08	0,2
Итого	250	350	400	1000				

Целевая функция (минимальная стоимость расходов на транспортировку) составляет

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 118 .$$

Рассмотрим теперь несколько вариантов решения этой задачи с помощью целевой функции (8) с ограничениями (9). Предположим сначала, что вероятности утраты груза равны нулю (q_{ij}=0). Тогда при нулевых штрафных санкциях

$$g_j^{(-)} = g_j^{(+)} = 0$$

решение будет иметь вид

x_{ij}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j$
$i=1$	300	0	0	300
$i=2$	0	700	0	700
Итого	300	700	0	1000

Целевая функция (9) и стоимость транспортных расходов C принимают одно и то же значение

$$E(Q) = C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 71 .$$

Для классической транспортной задачи полученные значения x_{ij} не являются решениями, поскольку не выполняется одно из основных условий

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j .$$

Эквивалентом этого условия в задаче (8), (9) является наличие штрафа за неполную поставку $g_j^{(-)} > 0$. Например, если $g_j^{(-)}=0,1$; $g_j^{(+)} = 0$, то стохастическое решение практически совпадает с классическим решением

$$E(Q) = C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 111 .$$

x_{ij}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j$
$i = 1$	250,05	0	49,95	300
$i = 2$	0	700	0	700
Итого	250,05	700	49,95	1000

При больших значениях $g_j^{(-)} > 0,1$; $g_j^{(+)} = 0$ стохастическое решение полностью совпадает с классическим решением

$$E(Q) = C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 118 .$$

Можно показать, что при наличии штрафов за излишне поставленную продукцию ($g_j^{(-)} = 0$; $g_j^{(+)} > 0,1$) или ($g_j^{(-)} > 0$; $g_j^{(+)} > 0$) стохастическое решение и классическое решение будут полностью совпадать.

Рассмотрим теперь задачу управления риском потери грузов. Утрата груза на маршрутах характеризуется значениями q_{ij} и $\chi_{ij} = \chi(k)$ с вероятностями $r(k)$, (k=1..3).

q_{ij}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$\chi_{ij} = \chi(k)$			
$i=1$	0	0	0,6	$\chi(k)$	0,25	0,5	0,75
$i=2$	0	0	0,6	$r(k)$	0,5	0,3	0,2

Решение системы (9) при $g_j^{(-)} = g_j^{(+)} = 0,2$ имеет вид

x_{ij}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j$
$i = 1$	300	0	0	300
$i = 2$	0	700	00	700
Итого	300	700	0	1000

Целевая функция $E(Q)$=231, все маршруты в третий пункт исключены, потери груза нулевые. Если же увеличить штраф за недоставку груза в третий пункт ($g_{1,2}^{(-)} = g_{1,2,3}^{(+)} = 0,2$; $g_3^{(-)} = 0,7$), то решение опять становится классическим (требование максимально обеспечить поставку), при этом расходы возрастут до величины $E(Q)$=291,4 за счет потери груза в размере 102 единиц.

Наконец, рассмотрим задачу управления риском в условиях избыточного предложения. В реальных рыночных условиях, как правило, предложение превышает спрос.

Пусть каждый из поставщиков располагает продукцией, достаточной для удовлетворения спроса всех потребителей (a_1 = 1200; a_2 = 1200), а потребности потребителей по-прежнему составляют значения (b_1 = 250; b_1 = 350; b_1 = 400). Параметры q_{ij}; $g_j^{(-)}$; $g_j^{(+)}$ примем те же, что и в предыдущей задаче. В этом случае первое и третье ограничения из (9) необходимо убрать. Решение будет иметь вид

x_{ij}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j$
i=1	250,00	0,00	400,00	650,00
i=2	0,00	350,00	0,00	350,00
Итого	250,00	350,00	400,00	1000,00

Целевая функция $E(Q)$=231, потери груза составляют 102 единицы. Все грузы в пункт B_3 доставлены из пункта A_1, поскольку эти транспортные расходы меньше, чем при доставке из пункта A_2.

Предложенная методика может быть использована в расширенном варианте для произвольных условий перевозки при наличии риска потерь и без применения классических условий соответствия запасов поставщиков потребностям потребителей.

Библиографический список

1. Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании. М.: Российский юридический издательский дом, 1994. 130 с.
2. Современная актуарная теория риска / Р. Каас [и др.]; пер. с англ. А.А. Новоселова; под ред. В.К. Малиновского. М.: Янус-К, 2007. 372 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
4. Инкотермс. Международные правила толкования торговых терминов. М.: Омега-Л, 2009. 80 с.
5. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. 384 с.
6. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Сов. радио, 1974. 400 с.

V.N. Nikishov, L.A. Saraev *

LOSS AND RISK MANAGEMENT OF CARGO FORECASTING

In the article a mathematical model of cargo transportation risk management is considered. This model is a generalization of the classical transportation problem, taking into account the risks of loss of goods during delivery. The market situation, the excess of supply over demand have been examined. The numerical analysis of the results of calculations is in the form of the solution depending on the parameters of the problem.

Key words: supplier, consumer, objective function, constraints, stochastic transportation problem, risk management, beta distribution.

---

* *Nikishov Viktor Nikolaevich* (TSh-sea05@yandex.ru), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev@ssu.samara.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.