УДК 517.51+517.98

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРОСТОТЫ ФРЕЙМОВ ПАРСЕВАЛЯ

© 2012 И.С. Рябцов[1]

В статье рассматриваются два непересекающихся класса фреймов, объединение которых образует множество фреймов Парсеваля: класс простых и класс составных фреймов Парсеваля. Основной целью работы является получение описания указанных классов. В работе найдены необходимые и достаточные условия принадлежности классу простых фреймов Парсеваля.

Ключевые слова: фреймы Парсеваля, эквивалентность фреймов, простые и составные фреймы.

1. Фреймы в конечномерных пространствах

Пусть ℓ_2^N — вещественное конечномерное векторное пространство, наделенное скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Определение. Набор элементов $\{f_i\}_{i=1}^M$ пространства ℓ_N^2 называется *фреймом*, если существуют константы $A, B > 0$ такие, что для всех x из ℓ_N^2 выполнено двойное неравенство

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} |\langle x, f_i \rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2 \,. \tag{1.1}$$

Числа A и B называются соответственно *нижней и верхней границами фрейма*. Они определяются неоднозначно, поскольку верхнюю границу B можно увеличивать, а нижнюю границу A — уменьшать. Поэтому инфинум множества всех верхних границ называют *оптимальной верхней границей фрейма*, а супремум множества всех нижних границ — *оптимальной нижней границей фрейма*.

Правая часть двойного неравенства (1.1) выполнена для любого конечного множества $\{f_i\}_{i=1}^M$ в силу неравенства Коши — Буняковского [1; 2]

$$\sum_{i=1}^{M} |\langle x, f_i \rangle|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{M} \|f_i\|^2 \right) \cdot \|x\|^2, \quad x \in \ell_2^N \,.$$

Для выполнения левой части двойного неравенства (1.1) необходимо, чтобы $\mathrm{span}\{f_i\}_{i=1}^M = \ell_2^N$. Это условие оказывается достаточным, так как любой набор векторов $\{f_i\}_{i=1}^M$ пространства ℓ_2^N является фреймом для $\mathrm{span}\{f_i\}_{i=1}^M$ [1; 2].

[1]Рябцов Игорь Сергеевич (tinnulion@gmail.com), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Определение. Назовем фрейм $\{f_i\}_{i=1}^M$ *жестким*, если можно выбрать границы фрейма так, что $A = B$

$$\forall x \in \ell_2^N, \quad \sum_{i=1}^M |\langle x, f_i\rangle|^2 = A\,\|x\|^2 . \tag{1.2}$$

Для жестких фреймов точное значение A называют фреймовой границей. В частности, если $A = 1$, то такие жесткие фреймы называют *фреймами Парсеваля*, для них выполнено

$$\forall x \in \ell_2^N, \quad \sum_{i=1}^M |\langle x, f_i\rangle|^2 = \|x\|^2 . \tag{1.3}$$

Обозначим множество фреймов Парсеваля пространства ℓ_2^N как $\mathbb{PF}(\ell_2^N)$.

2. Простые и составные фреймы Парсеваля

В дальнейшем будем полагать, что все рассматриваемые фреймы не содержат нулевых или коллинеарных векторов.

Определение. Назовем фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *составным* [3] (будем использовать обозначение $F \in \mathbb{CPF}(\ell_2^N)$), если существует набор констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что система векторов $F_\alpha = \{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$, существует номер $1 \leqslant k \leqslant M$ такой, что $\alpha_k = 0$.

Можно полагать, что все $\alpha_i \geqslant 0$, это никак не отразится на определении составного фрейма. Будем подразумевать наличие этого ограничения в дальнейшем.

Интерес к конструкциям подобного рода вызван конечномерными интерпретациями проблемы Кадисона — Зингера [5; 6].

Свойство. Если $F = \{f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{CPF}(\ell_2^N)$ с набором $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$, то

$$\alpha_{\max}^2 = \left(\max_{1\leqslant i\leqslant M} |\alpha_i|\right)^2 > 1 .$$

Доказательство. Пусть для некоторого номера $1 \leqslant k \leqslant M$ имеет место равенство $\alpha_k = 0$. Тогда доказываемое свойство следует из равенства Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^M |\langle\, x, \alpha_i f_i\rangle|^2 \leqslant \alpha_{\max}^2 \sum_{i=1,\, i\neq k}^M |\langle\, x, f_i\rangle|^2 = \alpha_{\max}^2 \left(\|x\|^2 - |\langle\, x, f_k\rangle|^2\right) ,$$

$$\alpha_{\max}^2 \geqslant 1 + \frac{|\langle\, x, f_k\rangle|^2}{\|x\|^2 - |\langle\, x, f_k\rangle|^2} .$$

Поскольку $\|x\|^2 \geqslant |\langle\, x, f_k\rangle|^2$, а также в силу произвольности выбора вектора x получаем ограничение снизу $\alpha_{\max}^2 > 1$, что и требовалось доказать.

Определение. Назовем фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *простым*, если он не является составным (будем использовать обозначение $F \in \mathbb{PPF}(\ell_2^N)$).

Свойство. Принадлежность фрейма Парсеваля $\{f_i\}_{i=1}^M$ к классу $\mathbb{PPF}(\ell_2^N)$ или $\mathbb{CPF}(\ell_2^N)$ является инвариантом относительно следующих преобразований:

1) перестановка векторов фрейма,

2) умножение векторов фрейма на -1,

3) ортогональное преобразование векторов фрейма.

Доказательство. Инвариантность относительно первых двух преобразований тривиальна и проверяется подстановкой в определение фрейма Парсеваля.

Рассмотрим произвольную ортогональную матрицу Q. Предположим, что $\{f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{PPF}(\ell_2^N)$, а $\{Qf_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{CPF}(\ell_2^N)$. Тогда, по определению, существует набор коэффициентов $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что фрейм $\{\alpha_i Q f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$, при этом какая-то из констант α_i равна нулю.

Тогда, согласно определению (1.3) фрейма Парсеваля, имеем

$$x = \sum_{i=1}^M \langle\, x, \alpha_i Q f_i \,\rangle\, \alpha_i Q f_i = Q \sum_{i=1}^M \langle\, QQ^T x, Q\alpha_i f_i \,\rangle\, \alpha_i f_i =$$

$$= Q \sum_{i=1}^M \langle\, Q^T x, \alpha_i f_i \,\rangle\, \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^M \langle\, x, \alpha_i f_i \,\rangle\, \alpha_i f_i\,.$$

Получаем, что система $\{f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{CPF}(\ell_2^N)$, что противоречит первоначальному предположению.

Достаточность получается из необходимости при помощи замены $\{f_i\}_{i=1}^M \to \to \left\{Q^{-1} f_i\right\}_{i=1}^M$. Свойство полностью доказано.

3. Необходимые и достаточные условия простоты

Лемма 3.1. Пусть $F = \{f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ — некоторый набор констант. Система векторов $F_\alpha = \{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^M |\langle\, f_k, \alpha_i f_i \rangle|^2 = \|f_k\|^2\,, \quad 1 \leqslant k \leqslant M\,.$$

Доказательство. Необходимость очевидна и сразу следует из равенства (1.3) для фрейма F_α при $x = f_1, \ldots, f_M$.

Докажем достаточность. Установим истинность равенства

$$\sum_{i=1}^M \|\alpha_i f_i\|^2 = N\,. \tag{3.1}$$

Поскольку исходный фрейм $F \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$, то выполнено равенство [1; 2]

$$\sum_{k=1}^M \|f_k\|^2 = N\,.$$

Распишем это равенство, используя условия теоремы

$$N = \sum_{k=1}^M \|f_k\|^2 = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^M |\langle\, f_k, \alpha_i f_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M |\langle\, f_k, \alpha_i f_i \rangle|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^M |\alpha_i|^2 \sum_{k=1}^M |\langle\, f_k, f_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^M |\alpha_i|^2\, \|f_i\|^2 = \sum_{i=1}^M \|\alpha_i f_i\|^2\,.$$

Вспомогательное равенство (3.1) доказано, воспользуемся фреймовым потенциалом [4]

$$\mathrm{FP}(F) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant M} |\langle f_i, f_j \rangle|^2\,.$$

Согласно работе [4], следующее равенство выполнено тогда и только тогда, когда система векторов F — жесткий фрейм

$$\mathrm{FP}(F) = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{M}\|f_i\|^2\right)^2 .$$

Рассмотрим фреймовый потенциал системы F_α

$$\mathrm{FP}(F_\alpha) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant M}|\langle \alpha_i f_i, \alpha_j f_j\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}|\langle \alpha_i f_i, \alpha_j f_j\rangle|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{M}|\alpha_i|^2\sum_{j=1}^{M}|\langle f_i, \alpha_j f_j\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{M}|\alpha_i|^2\|f_i\|^2 = \sum_{i=1}^{M}\|\alpha_i f_i\|^2 = N .$$

С другой стороны, согласно равенству (3.1)

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{M}\|\alpha_i f_i\|^2\right)^2 = \frac{1}{N}N^2 = N .$$

Таким образом, согласно свойствам фреймового потенциала, система векторов F_α является жестким фреймом. Но, по условию теоремы, его граница может быть равна только единице. Следовательно, система векторов F_α является фреймом Парсеваля, что и требовалось доказать.

Рассмотрим матрицу $V(F)$ для фрейма $F = \{f_i\}_{i=1}^M$, которая позволяет сформулировать критерий простоты фрейма F

$$V(F) = \begin{pmatrix} |\langle f_1, f_1\rangle|^2 & \dots & |\langle f_1, f_M\rangle|^2 \\ \vdots & & \vdots \\ |\langle f_M, f_1\rangle|^2 & \dots & |\langle f_M, f_M\rangle|^2 \end{pmatrix} .$$

Теорема 3.1. Следующие два утверждения эквивалентны:
1) $F = \{f_i\} \in \mathbb{PPF}(\ell_2^N)$,
2) $\det V(F) \neq 0$.

Доказательство. Докажем, что из первого утверждения следует второе. Рассмотрим следующую систему уравнений, которая является необходимым условием того, что $F = \{\alpha_i f_i\} \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M |\langle f_1, \alpha_i f_i\rangle|^2 & = \|f_1\|^2, \\ & \vdots \\ \sum_{i=1}^M |\langle f_1, \alpha_i f_i\rangle|^2 & = \|f_M\|^2. \end{cases}$$

Преобразуем равенства в систему линейных уравнений относительно неизвестных $|\alpha_i|^2$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M |\alpha_i|^2\,|\langle f_1, f_i\rangle|^2 & = \|f_1\|^2, \\ & \vdots \\ \sum_{i=1}^M |\alpha_i|^2\,|\langle f_1, f_i\rangle|^2 & = \|f_M\|^2. \end{cases}$$

Обозначим $x_i = \alpha_i^2$ и $b_i = \|f_1\|^2$ и получим следующую систему:

$$V(F)\,x = b\,. \tag{3.2}$$

Поскольку $F = \{f_i\} \in \mathbb{PPF}(\ell_2^N)$, то (3.2) имеет одно и только одно решение $\{1,\dots,1\}$. Действительно, если бы существовало второе решение $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$, то по лемме 3.1 фрейм $F = \{f_i\} \in \mathbb{CPF}(\ell_2^N)$, что противоречит первоначальному предположению. Откуда следует, что $\det V(F) \neq 0$.

Теперь докажем, что из второго утверждения теоремы 3.1 следует первое. Поскольку $\det V(F) \neq 0$, то система (3.2) имеет не более одного решения, и этим решением по условию теоремы является тривиальный набор $\{1, \ldots, 1\}$. Откуда необходимо следует, что $F = \{f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{PPF}(\ell_2^N)$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Матрицу V в формулировке предыдущей теоремы можно заменить на следующую матрицу:

$$V_*(F) = \begin{pmatrix} |\langle f_1^*, f_1^* \rangle|^2 & \ldots & |\langle f_1^*, f_M^* \rangle|^2 \\ \vdots & & \vdots \\ |\langle f_M^*, f_1^* \rangle|^2 & \ldots & |\langle f_M^*, f_M^* \rangle|^2 \end{pmatrix},$$

где

$$f_i^* = \frac{f_i}{\|f_i\|}.$$

Справедливость замены связана с тем, что определители матриц V и V_* связаны равенством

$$\det V_*(F) = \frac{\det V(F)}{\prod_{i=1}^M \|f_i\|^2}.$$

Докажем несколько достаточных условий простоты фреймов Парсеваля. Введем величину *взаимной когерентности* векторов фрейма $F = \{f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$ по формуле

$$\mu^*(F) = \max_{i \neq j} |\langle f_i^*, f_j^* \rangle|.$$

Теорема 3.2. Если для произвольного фрейма $F = \{f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$ выполнено неравенство

$$\mu^*(F) < \frac{1}{\sqrt{N}},$$

то фрейм $F \in \mathbb{PPF}(\ell_2^N)$.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены и $F = \{f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{CPF}(\ell_2^N)$. Тогда, по определению составного фрейма Парсеваля, существует набор констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что $F_\alpha = \{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$ и существует номер $1 \leqslant k \leqslant M$ такой, что $\alpha_k = 0$. Поскольку $F_\alpha \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$, то равенство Парсеваля выполнено для произвольного вектора $x \in \ell_2^N$. Рассмотрим частный случай $x = f_k^*$

$$\|f_k^*\|^2 = \sum_{i=1}^M |\langle f_k^*, \alpha_i f_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^M |\langle f_k^*, f_i^* \rangle|^2 \, \|\alpha_i f_i\|^2 <$$

$$< \mu^*(F)^2 \sum_{i=1}^M \|\alpha_i f_i\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \|\alpha_i f_i\|^2 = \frac{1}{N} N = 1.$$

Получаем ограничение сверху $\|f_k^*\|^2 < 1$, которое противоречит выбору $\|f_k^*\|^2 = 1$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. Если для произвольного фрейма $F = \{f_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{PF}(\ell_2^N)$ выполнено неравенство

$$\|f_i\| > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то фрейм $F \in \mathbb{PPF}(\ell_2^N)$.

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме, предположим, что условия теоремы выполнены и $F=\{f_i\}_{i=1}^{M}\in\mathbb{CPF}(\ell_2^N)$. Рассмотрим равенство Парсеваля для этого фрейма при $x=f_k^*$

$$\|f_k^*\|^2=\sum_{i=1}^{M}|\langle f_k^*,f_i\rangle|^2=|\langle f_k^*,f_k\rangle|^2+\sum_{1\leqslant i\leqslant M,i\neq k}|\langle f_k^*,f_i\rangle|^2\,.$$

Учитывая, что $\|f_k^*\|^2=1$, а $\|f_k\|^2>\frac{1}{2}$, получаем

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant M,i\neq k}|\langle f_k^*,f_i\rangle|^2<\frac{1}{2}\,.$$

Поскольку $F\in\mathbb{CPF}(\ell_2^N)$, то существует набор констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^{M}$ такой, что $F_\alpha=$ $=\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^{M}\in\mathbb{PF}(\ell_2^N)$, и существует номер $1\leqslant k\leqslant M$ такой, что $\alpha_k=0$. В силу условия $\|f_i\|>\frac{1}{\sqrt{2}}$ справедливо ограничение $\alpha_i<\sqrt{2}$ для всех $1\leqslant i\leqslant M$. Поскольку $F_\alpha\in\mathbb{PF}(\ell_2^N)$, то равенство Парсеваля выполняется для вектора $x=f_k^*$.

$$\|f_k^*\|^2=\sum_{i=1}^{M}|\langle f_k^*,\alpha_i f_i\rangle|^2=\sum_{1\leqslant i\leqslant M,i\neq k}|\langle f_k^*,\alpha_i f_i\rangle|^2=$$

$$=\sum_{1\leqslant i\leqslant M,i\neq k}|\alpha_i|^2\,|\langle f_k^*,f_i\rangle|^2<2\cdot\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant M,i\neq k}|\langle f_k^*,f_i\rangle|^2\right)<1\,.$$

Получаем ограничение сверху $\|f_k^*\|^2<1$, которое противоречит выбору $\|f_k^*\|^2=1$. Теорема доказана.

Литература

[1] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2002.

[2] Casazza P.G., Tremain J.C. A brief introduction to Hilbert space frame theory and its applications, Department of Mathematics. Columbia: University of Missouri, MO 65211–4100. URL: http://framerc.org.

[3] Рябцов И.С. Представление фреймов Парсеваля в гильбертовых пространствах // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2011. № 5(86). С. 60–70.

[4] Benedetto J.J., Fickus M. Finite normalized tight frames // Advances in Computational Mathematics. 2003. V. 18. P. 357—385.

[5] Casazza P.G.,Tremain J.C. The Kadison — Singer Problem in Mathematics and Engineering // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2006. V. 103. № 7. P. 2032–2039.

[6] Frames and the Kadison — Singer Problem / P.G. Casazza [et al.]. Preprint. URL: http://framerc.org.

Поступила в редакцию 15/*III*/2012;
в окончательном варианте — 15/*III*/2012.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR PRIME PARSEVAL FRAMES

 I.S. Ryabtsov[2]

In the article we consider two disjoint classes of frames, prime and composite Parseval frames, the union of which forms a set of Parseval frames. The main goal is to obtain a description of these two classes. In this article we prove necessary and sufficient conditions for the frame to be a prime Parseval frame.

Key words: Parseval frames, frame equivalence, prime and composite frames.

Paper received 15/*III*/2012.
Paper accepted 15/*III*/2012.

[2]Ryabtsov Igor Sergeevich (tinnulion@gmail.com), the Dept. of Functional Analysis and Function Theory, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.