УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СО СМЕЩЕНИЯМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

© 2011 Е.А. Уткина[1]

Для классического линейного гиперболического уравнения в прямоугольной характеристической области D рассматривается задача с условиями, связывающими значения искомой функции на противоположных сторонах границы D. Решение осуществляется редукцией к системе уравнений Фредгольма второго рода, разрешимость которой устанавливается на основе метода априорных оценок при дополнительных условиях на коэффициенты уравнения.

Ключевые слова: задача со смещениями, гиперболические уравнения, уравнения Фредгольма.

1. Предварительные сведения

Задачи со смещениями в граничных условиях, называемых еще нелокальными, являются в последние десятилетия для различных уравнений в частных производных предметом интенсивного изучения в работах многих авторов (см., например [1–8] и др.).

В статье [9] для уравнения

$$L\left(u\right) = u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = f\left(x, y\right) \tag{1}$$

в характеристическом прямоугольнике $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ рассмотрена задача об отыскании решения по условиям, связывающим значения искомой функции в 12 переменных точках, лежащих на границе и внутри D. В частности, указаны условия, обеспечивающие возможность редукции задачи к системе нагруженных уравнений Фредгольма, но сами эти интегральные уравнения не исследуются.

2. Основные результаты

В настоящей статье речь идет о частном случае из [9] для четырех граничных точек, когда удается получить условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

[1]Уткина Елена Анатольевна (eutkina1@yandex.ru), кафедра общей математики Казанского федерального университета, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

<u>**Задача**</u>: *Найти функцию* $u(x,y) \in C^{1,1}(D) \cap C^{0,0}(\overline{D})$ *такую, что* $\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1} u_x(x,y)\,u_y(x,y) = 0$, *являющуюся в области* D *решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям*

$$u(x_0,y) + \alpha_1(y)\,u(x_1,y) = \varphi_1(y)\,, u(x,y_0) + \beta_1(x)\,u(x,y_1) = \psi_1(x)\,. \qquad (2)$$

Считаем, что коэффициенты уравнения (1) принадлежат классам $a_{ij} \in C^{i,j}(\overline{D})$, $f \in C^{0,0}(\overline{D})$, где $C^{i,j}$ — *класс функций, непрерывных в* $\overline{D}$ *вместе с их производными* $\partial^{r_1+r_2}/\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}(r_1 = 0,...,i, r_2 = 0,...,j)$.

Здесь предлагается способ получения условий, обеспечивающих однозначную разрешимость данной задачи. При этом задача редуцируется к уравнениям Фредгольма, однозначная разрешимость которых выводится из доказываемой на основе априорных оценок теоремы единственности.

1. Сначала запишем решение задачи с условиями

$$u(x_0,y) = \varphi_0(y), \quad u(x,y_0) = \psi_0(x). \qquad (3)$$

Соотношения (3) представляют собой граничные значения Гурса, решение которой хорошо известно [10–12] и др. Мы будем использовать формулу (1.20) из [12]:

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & R(x,y_0,x,y)\psi_0(x) + R(x_0,y,x,y)\,\varphi_0(y) - R(x_0,y_0,x,y)\,\psi_0(x_0) + \\ & + \int\limits_{x_0}^{x}\left(b(\alpha,y_0)\,R(\alpha,y_0,x,y) - \tfrac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha,y_0,x,y)\right)\psi_0(\alpha)\,d\alpha + \\ & + \int\limits_{y_0}^{y}\left(a(x_0,\beta)\,R(x_0,\beta,x,y) - \tfrac{\partial}{\partial\beta}R(x_0,\beta,x,y)\right)\varphi_0(\beta)\,d\beta + \\ & + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} R(\alpha,\beta,x,y)\,f(\alpha,\beta)\,d\beta d\alpha, \end{aligned} \qquad (4)$$

где R — функция Римана.

Далее мы считаем (4) общим представлением искомого решения через φ_0, ψ_0. Подставляя в (4) аргументы точек (x,y_1), (x_1,y) и учитывая известные значения (2), приходим к системе интегральных уравнений, в которой искомыми функциями являются φ_0, ψ_0:

$$\begin{aligned} \tfrac{\psi_1(x)}{\beta_1(x)} = {} & (R(x,y_0,x,y_1) + \tfrac{1}{\beta_1(x)})\psi_0(x) + \tfrac{R(x_0,y_0,x,y_1)}{\beta_1(x_0)}\psi_1(x_0) + \\ & + (-\tfrac{R(x_0,y_1,x,y_1)}{\beta_1(x_0)} - R(x_0,y_0,x,y_1))\psi_0(x_0) + \\ & + \int\limits_{x_0}^{x}\left(b(\alpha,y_0)\,R(\alpha,y_0,x,y_1) - \tfrac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha,y_0,x,y_1)\right)\psi_0(\alpha)\,d\alpha + \\ & + \int\limits_{y_0}^{y_1}\left(a(x_0,\beta)\,R(x_0,\beta,x,y_1) - \tfrac{\partial}{\partial\beta}R(x_0,\beta,x,y_1)\right)\varphi_0(\beta)\,d\beta + \\ & + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1} R(\alpha,\beta,x,y_1)\,f(\alpha,\beta)\,d\beta d\alpha, \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\varphi_1(y)}{\alpha_1(y)} = {} & (R(x_0,y,x_1,y) + \tfrac{1}{\alpha_1(y)})\varphi_0(y) + R(x_1,y_0,x_1,y)\,\tfrac{\varphi_1(y_0)}{\alpha_1(y_0)} + \\ & + (-\tfrac{R(x_1,y_0,x_1,y)}{\alpha_1(y_0)} - R(x_0,y_0,x_1,y))\psi_0(x_0) + \\ & + \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(b(\alpha,y_0)\,R(\alpha,y_0,x_1,y) - \tfrac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha,y_0,x_1,y)\right)\psi_0(\alpha)\,d\alpha + \\ & + \int\limits_{y_0}^{y}\left(a(x_0,\beta)\,R(x_0,\beta,x_1,y) - \tfrac{\partial}{\partial\beta}R(x_0,\beta,x_1,y)\right)\varphi_0(\beta)\,d\beta + \\ & + \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y} R(\alpha,\beta,x_1,y)\,f(\alpha,\beta)\,d\beta d\alpha, \end{aligned}$$

$$\psi_0(x_0) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1(y_0)\beta_1(x_1)} + \frac{R(x_1,y_0,x_1,y_1)}{\alpha_1(y_0)} + \frac{R(x_0,y_1,x_1,y_1)}{\beta_1(x_0)} + R(x_0,y_0,x_1,y_1)\right)}\Big(-\frac{\psi_1(x_1)}{\beta_1(x_1)} +$$
$$+ \Big(R(x_1,y_0,x_1,y_1) + \frac{1}{\beta_1(x_1)}\Big)\frac{\varphi_1(y_0)}{\alpha_1(y_0)} + R(x_0,y_1,x_1,y_1)\,\psi_1(x_0) +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x_1} \big(b(\alpha,y_0)\,R(\alpha,y_0,x_1,y_1) - \frac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha,y_0,x_1,y_1)\big)\,\psi_0(\alpha)\,d\alpha +$$
$$+ \int\limits_{y_0}^{y_1} \Big(a(x_0,\beta)\,R(x_0,\beta,x_1,y_1) - \frac{\partial}{\partial\beta}R(x_0,\beta,x_1,y_1)\Big)\,\varphi_0(\beta)\,d\beta +$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1} R(\alpha,\beta,x_1,y_1)\,f(\alpha,\beta)\,d\beta d\alpha\Big).$$

Таким образом, для нахождения каждой из функций φ_0, ψ_0 получим уравнения фредгольмовского типа. Здесь требуем, естественно, неравенства нулю выражения $\frac{1}{\alpha_1(y_0)\beta_1(x_1)} + \frac{\exp\int\limits_{y_0}^{y_1} a_{10}(x_1,y)dy}{\alpha_1(y_0)} + \frac{\exp\int\limits_{x_0}^{x_1} a_{01}(x,y_1)dx}{\beta_1(x_0)} + R(x_0,y_0,x_1,y_1)$.

2. Теперь займемся доказательством единственности решения задачи (1), (2). Для этого проверим, что при однородных условиях (2) однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение. Доказательство осуществляем методом априорной оценки с помощью энергетического неравенства [13].

Воспользовавшись понятиями скалярного произведения и нормы в пространстве $L_2[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]\,(u,v) = \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1} u(x,y)\,v(x,y)\,dydx$, $\|u\|^2 = \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1} u^2(x,y)\,dydx$, вычислим скалярное произведение

$$(L(u),u) = (u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u, u) =$$
$$= \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} (u_{xy}u + a_{10}u_xu + a_{01}u_yu + a_{00}uu)(x,y)\,dydx.$$

Далее проинтегрируем выражение по частям и выпишем значения получившихся в результате преобразований слагаемых:

$$(u_{xy},u) = \frac{u^2(x_1,y_1)}{2}\Big(1 - \alpha_1^2(y_1) - \beta_1^2(x_1) + \frac{\beta_1^2(x_0)\alpha_1^2(y_1) + \beta_1^2(x_1)\alpha_1^2(y_0)}{2}\Big) -$$
$$- \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1}(u_xu_y)(x,y)dydx;$$
$$(u_xa_{10},u) = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{y_0}^{y_1}(a_{10}(x_1,y) - a_{10}(x_0,y)\,\alpha_1^2(y))u^2(x_1,y)\,dy -$$
$$- \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1} a_{10x}u^2dydx\Big);$$
$$(u_ya_{01},u) = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{x_0}^{x_1}(a_{01}(x,y_1) - a_{01}(x,y_0)\,\beta_1^2(x))u^2(x,y_1)\,dx -$$
$$- \int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1} a_{01y}u^2dydx\Big); (ua_{00},u) = \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{00}(x,y)\,u^2(x,y)dydx.$$

Тогда

$$(L(u),u)=\frac{u^2(x_1,y_1)}{2}\left(1-\alpha_1^2(y_1)-\beta_1^2(x_1)+\frac{\beta_1^2(x_0)\alpha_1^2(y_1)+\beta_1^2(x_1)\alpha_1^2(y_0)}{2}\right)-$$
$$-\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1}(u_xu_y)(x,y)dydx+\frac{1}{2}(\int\limits_{y_0}^{y_1}(a_{10}\left(x_1,y\right)-a_{10}\left(x_0,y\right)\alpha_1^2\left(y\right))u^2\left(x_1,y\right)dy)+$$
$$+\frac{1}{2}(\int\limits_{x_0}^{x_1}(a_{01}\left(x,y_1\right)-a_{01}\left(x,y_0\right)\beta_1^2\left(x\right))u^2\left(x,y_1\right)dx)+$$
$$+\int\limits_{0}^{x_1}\int\limits_{0}^{y_1}(-\frac{a_{10x}}{2}-\frac{a_{01y}}{2}+a_{00})\left(x,y\right)u^2(x,y)dydx.$$

Так как функции $a_{ij}\left(x,y\right)$ являются непрерывными на компакте, то они достигают своих точных верхних и точных нижних граней. Введем обозначения $\sup\limits_{(x,y)\in D}a_{ij}\left(x,y\right)=sa_{ij}$, $\inf\limits_{(x,y)\in D}a_{ij}\left(x,y\right)=ia_{ij}$, а если фиксируем одну переменную $-$ $\inf\limits_{x\in[x_0,x_1]}a_{ij}\left(x,y\right)=i_xa_{ij}\left(x,y\right)$, $\inf\limits_{y\in[y_0,y_1]}a_{ij}\left(x,y\right)=i_ya_{ij}\left(x,y\right)$. Получаем оценку

$$(L(u),u)\geqslant\frac{u^2(x_1,y_1)}{2}\left(1-\alpha_1^2(y_1)-\beta_1^2(x_1)+\frac{\beta_1^2(x_0)\alpha_1^2(y_1)+\beta_1^2(x_1)\alpha_1^2(y_0)}{2}\right)-$$
$$-\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{y_0}^{y_1}(u_xu_y)(x,y)dydx+$$
$$+\frac{1}{2}i_y(a_{10}\left(x_1,y\right)-a_{10}\left(x_0,y\right)\alpha_1^2\left(y\right))\int\limits_{y_0}^{y_1}u^2\left(x_1,y\right)dy+$$
$$+\frac{1}{2}i_x(a_{01}\left(x,y_1\right)-a_{01}\left(x,y_0\right)\beta_1^2\left(x\right))\int\limits_{x_0}^{x_1}u^2\left(x,y_1\right)dx+i(-\frac{a_{10x}}{2}-$$
$$-\frac{a_{01y}}{2}+a_{00})\int\limits_{0}^{x_1}\int\limits_{0}^{y_1}u^2(x,y)dydx.$$

При этом

$$\left(L\left(u\right),u\right)=\left(f,u\right).$$

Обозначим $A_1=1-\alpha_1^2(y_1)-\beta_1^2(x_1)+\frac{\beta_1^2(x_0)\alpha_1^2(y_1)+\beta_1^2(x_1)\alpha_1^2(y_0)}{2}$,

$$A_2=i_y(a_{10}\left(x_1,y\right)-a_{10}\left(x_0,y\right)\alpha_1^2\left(y\right)),\quad A_3=i_x(a_{01}\left(x,y_1\right)-a_{01}\left(x,y_0\right)\beta_1^2\left(x\right)),$$

$$A_4=i(-\frac{a_{10x}}{2}-\frac{a_{01y}}{2}+a_{00}).$$

Потребуем неотрицательности коэффициентов A_k, $k=\overline{1,3}$ и положительности A_4. Полагаем теперь $f\equiv 0$, получим, что функция u может быть только нулевой.

При $f\equiv 0$, $\varphi_1\equiv\psi_1\equiv 0$ система уравнений (5) является тоже однородной. В силу доказанной единственности решения задачи эта система допускает в данном случае только нулевое решение. По теореме Фредгольма [14] это означает однозначную разрешимость неоднородной системы уравнений (5). Единственность решения исходной задачи доказана независимо от системы уравнений Фредгольма. Это использовано затем для доказательства единственности решения упомянутой системы, где неизвестными являются данные Гурса. Они в свою очередь позволяют записать решение исходной задачи. Поскольку решение системы уравнений единственно, это означает единственность решения исходной задачи.

Таким образом, имеет место

Теорема. *Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют неравенствам* $A_k\geqslant 0(k=\overline{1,3}),A_4>0,$ *то задача (1), (2) имеет единственное решение.*

Отметим, что все условия теоремы являются существенными. Подтверждением тому служат примеры.

1. Уравнение $u_{xy} - thy \cdot u_x = 0$ в области $D = (-1,1) \times (-1,1)$ с условиями $u\,(-1,y) = u\,(1,y)$ и $u\,(x,-1) = u\,(x,1)$. В нем $A_4 = a_{10x} = 0$. Решением, в чем можно убедиться непосредственно, является $u\,(x,y) = 4chx \cdot chy$, отличная от тождественного нуля в области D.

2. Уравнение $u_{xy} + u = 0$ в области $D = (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi)$ с условиями $u\,(-\pi,y) = u\,(\pi,y)$ и $u\,(x,-\pi) = u\,(x,\pi)$. В обсуждаемом уравнении коэффициент $a_{00} > 0$, и условия на все остальные коэффициенты, перечисленные в теореме, выполнены. Решением этой задачи является функция $u\,(x,y) = \sin(x+y)$, отличная от тождественного нуля в области D, а для нее $(u_x, u_y) = 2\pi^2 \neq 0$, что показывает существенность указанного условия.

3. Уравнение $u_{xy} + (x+1)(y-\pi)^2 u_y = 0$ в области $D = (0,\pi) \times (0,\pi)$ с условиями $u\,(0,y) + yu\,(\pi,y) = 0$, $u\,(x,0) + u\,(x,\pi) = 0$. Здесь $a_{01} = (x+1)(y-\pi)^2$ и для него $A_3 = i_x(a_{01}\,(x,\pi) - a_{01}\,(x,0)) < 0$ и $A_1 = 1 - \alpha_1^2(\pi) - 1 + \frac{\alpha_1^2(\pi) + \alpha_1^2(0)}{2} = -\frac{\pi^2}{2} < 0$. Решением, в чем можно убедиться непосредственно, является $u\,(x,y) = \sin x$, отличная от тождественного нуля в области D.

Еще один пример можно получить, если поменять в примере 3 ролями переменные x и y. Этим мы покажем существенность положительности A_2 и A_1 для единственности решения.

Литература

[1] Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Уч. зап. Казанск.ун-та. 1962. Т. 122. № 3. С. 3–16.

[2] Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 44–59.

[3] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.

[4] Скубачевский А.Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач // Матем. сб. 1982. Т. 117(159). № 3. С. 548–558.

[5] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 8. С. 139–156.

[6] Пулькина Л.С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2002. Т. 236. С. 298–303.

[7] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 547–552.

[8] Керефов А.А. Нелокальные граничные задачи для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 5. № 1. С. 74–78.

[9] Zhegalov V.I., Chabakaev R.R. Normal Cauchy-Goursat problem // World Scientific Publ.Co.-Serie in Pure Math. 1989. V. II. Topic in Mathematical analysis (A volum dedicated to the memory of A.L.Cauchy). P. 939–964.

[10] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
[11] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с.
[12] Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское мат. общество, 2001. 226 с.
[13] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
[14] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 528 с.

Поступила в редакцию 18/*XI*/2011;
в окончательном варианте — 9/*XII*/2011.

A PROBLEM WITH DISPLACEMENTS IN THE BOUNDARY CONDITIONS

 E.A. Utkina[2]

A problem with conditions relating to the values of an unknown function on the opposite sides of a rectangular characteristic domain D for a linear hyperbolic equations is considered. This problem is reduced to the system of Fredholm equations of the second kind. The proof of solvability is based on the a priori estimates of additional conditions on the coefficients of the equation.

Key words: problems with displacements, hyperbolic equation, Fredholm equations.

Paper received 18/*XI*/2011.
Paper accepted 9/*XII*/2011.

[2]Utkina Elena Anatolievna (`eutkina1@yandex.ru`), the Dept. of Common Mathematcs, Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russian Federation.