

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДОБЫВАЮЩИХ СКВАЖИН. 2. КОЭФФИЦИЕНТ ПРОДУКТИВНОСТИ

© 2011 В.И. Астафьев, П.В. Ротерс<sup>1</sup>

В статье исследуется вопрос о продуктивности двоякопериодических систем добывающих скважин. При использовании модели работы скважины с постоянной скоростью притока было получено аналитическое представление для коэффициента продуктивности скважины и проведен анализ его значений в зависимости от формы контура питания. Также было получено аналитическое представление для формфактора Дитца, которое хорошо согласуется с результатами численного вычисления при помощи метода мнимых источников.

**Ключевые слова:** фильтрация, нефтедобыча, коэффициент продуктивности.

### Введение

Коэффициент продуктивности  $PI$  играет важную роль в нефтедобыче и характеризует производительность скважины. Еще в начале нефтедобывающей эры было замечено, что если резервуар ограничен и достаточно истощен, то отношение скорости притока к перепаду (депрессии) давления<sup>2</sup> стабилизируется к постоянному значению [1]. Это значение зависит только от гидродинамических характеристик резервуара и расположения скважин в нем.

Определяется коэффициент продуктивности следующим образом [1]:

$$PI = \frac{Q}{\bar{p} - p_w}, \quad (1)$$

где  $Q$  — дебит скважины,  $\bar{p}$  — среднее давление в резервуаре и  $p_w$  — давление в стволе скважины. Чем выше значение  $PI$ , тем больше дебит нефти при данной депрессии давления и тем меньше скважин требуется для разработки месторождения. Исходя из наилучшего значения коэффициента продуктивности, инженер может корректно оценить число скважин, необходимых для разработки залежи.

Существует две идеализированные модели работы скважины, которые наиболее часто встречаются в инженерной практике: модель с постоянной скоростью

<sup>1</sup>Астафьев Владимир Иванович (vlast@ssu.samara.ru), Ротерс Павел Вячеславович (roters@ssu.samara.ru), кафедра безопасности информационных систем Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

<sup>2</sup>Перепад между средним давлением в резервуаре и давлением в стволе скважины.

притока  $Q$  или с постоянным забойным давлением  $p_w$ . Для ограниченного и истощенного резервуара в обоих случаях значение  $PI$  стабилизируется и будет оставаться постоянным в течение длительного времени.

Целью данной работы является создание строгого математического инструмента, позволяющего найти коэффициент продуктивности и проанализировать его зависимость от расположения скважин, установить оптимальное их расположение, соответствующее максимальному значению  $PI$ .

## 1. Вычисление среднего давления

Если давление представить в виде функции  $p = p(x, y)$ , то среднее давление в области питания скважины определяется интегралом:

$$\bar{p} = \frac{1}{\Delta} \int \int_{\Delta} p(x, y) dx dy, \quad (2)$$

где  $\Delta$  — область питания. Для нахождения  $\bar{p}$  будем использовать модель, описанную в первой части статьи [2]. Согласно этой модели давление задано в комплексной плоскости  $z = x + iy$  следующей функцией:

$$p(x, y) = \frac{Q}{2\pi\chi} \operatorname{Re} \left[ \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} \right] - \frac{\beta}{2} |z|^2 + C, \quad (3)$$

здесь  $\sigma$  — сигма-функция Вейерштрасса [3],  $\beta = \pi/\Delta$ ,  $\alpha = \beta - \zeta(\omega_1)/\omega_1$  при условии, что  $\omega_1$  вещественно [2],  $\zeta$  — дзета-функция Вейерштрасса,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  полу-периоды функций Вейерштрасса,  $C$  — константа интегрирования, определяемая из граничного условия  $p|_{r_w} = p_w$ , т. е.  $C = p_w - \frac{Q}{2\pi\chi} \ln r_w$  [2].

Функция (3) является двоякопериодической. На рис. 1 представлены линии тока для  $2\omega_1 = 1$ ,  $2\omega_2 = \operatorname{Exp}\left(\frac{i\pi}{4}\right)$ , где сплошной линией обозначены контуры питания скважин. В силу двоякопериодичности интегрирование по области питания скважины может быть заменено интегрированием по базовой ячейке. За базовую ячейку возьмем параллелограмм с вершинами  $\pm\omega_1, \pm\omega_2$ . На рис. 1 базовые ячейки обозначены пунктирной линией. Те части области питания, которые не попадают в ячейку, заменяются соответствующими частями из соседних областей.

Сделаем замену переменных:

$$z = x + iy = \xi\omega_1 + \eta\omega_2, \\ |\xi| \leq 1; |\eta| \leq 1,$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — вещественные. Тогда  $dx dy = J d\xi d\eta$ , при этом якобиан преобразования  $J = \operatorname{Im}(\bar{\omega}_1\omega) = \frac{1}{4}\Delta$ . Таким образом среднее давление можно вычислить по формуле:

$$\bar{p} = \frac{Q}{8\pi\chi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \operatorname{Re} \left[ \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} \right] - \frac{\beta}{2} |z|^2 \right) d\xi d\eta + C. \quad (4)$$

Рассмотрим в интеграле (4) две части  $\frac{\pi}{2\Delta} |z|^2$  и  $\operatorname{Re} \left[ \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} \right]$ . Для первой интеграл вычисляется следующим образом:

$$\frac{1}{2}\beta |z|^2 = \frac{1}{2}\beta (x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\beta (|\omega_1|^2 \xi^2 + |\omega_2|^2 \eta^2 + (\bar{\omega}_1\omega_2 + \omega_1\bar{\omega}_2) \xi\eta); \\ \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\beta |z|^2 d\xi d\eta = \frac{1}{8}\beta \left( \frac{4}{3} |\omega_1|^2 + \frac{4}{3} |\omega_2|^2 \right) = \frac{1}{6}\beta (|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2).$$

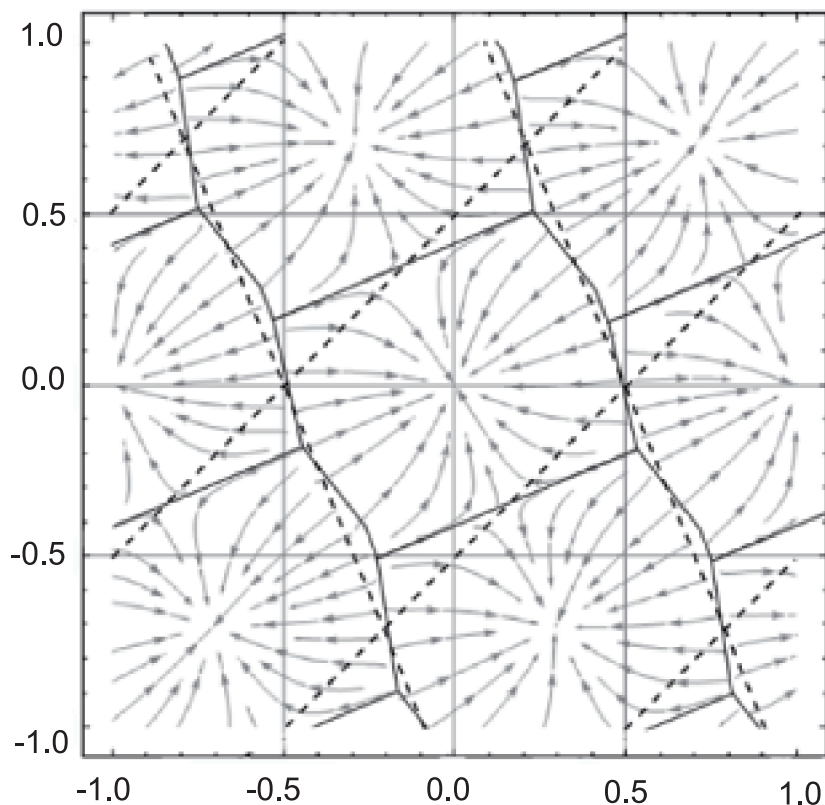


Рис. 1. Соотношение между контуром питания и ячейками решетки

Вычисляя вторую часть, введем потенциал для  $\ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2}$ :

$$G_0(z) = \int \left( \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} \right) dz, \quad (5)$$

где  $\ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} = \int \zeta_0(z) dz$ , а  $\zeta_0(z) = \zeta(z) + \alpha z$ .

При  $z \rightarrow 0$ ,  $\zeta_0(z) = \zeta(z) = \frac{1}{z} + O(z)$ ;  $\ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} = \ln \sigma(z) + O(z^2)$  и  $G_0(z) = z \ln z - z + O(z^3)$ . Таким образом,

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} \right) d\xi d\eta = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G'_0(z) d\xi d\eta = \quad (6)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 G'_0(z) d\xi \right) d\eta = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 G'_0(z) \frac{dz}{\omega_1} \right) d\eta. \quad (7)$$

Переход к правой части (7) легко объясняется, если учесть, что в случае замены  $z = \xi\omega_1 + \eta\omega_2$  при  $\eta = \text{const}$   $dz = \omega_1 d\xi$ .

Функция  $G'_0(z) = \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2}$  имеет особенность в нуле, поэтому  $\int_{-1}^1 G'_0(z) dz$

нужно понимать в смысле главного значения Коши:

$$\frac{2}{4} \int_{-1}^1 \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 G'_0(z) \frac{dz}{\omega_1} \right) d\eta = \frac{1}{2\omega_1} \int_{-1}^1 \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [G_0(\omega_1 + \eta\omega_2) - G_0(\varepsilon\omega_1 + \eta\omega_2)] \right) d\eta. \quad (8)$$

Обозначим  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} G_0(\varepsilon\omega_1 + \eta\omega_2) = G_0^+(\eta\omega_2)$ , тогда (8) запишется как:

$$\frac{1}{2\omega_1} \int_{-1}^1 [G_0(\omega_1 + \eta\omega_2) - G_0^+(\eta\omega_2)] d\eta.$$

Для вычисления  $\int_{-1}^1 G_0(\omega_1 + \eta\omega_2) d\eta$  разложим  $G_0(\omega_1 + \eta\omega_2)$  в ряд в окрестности  $\omega_1$ :

$$G_0(\omega_1 + \eta\omega_2) = G_0(\omega_1) + G'_0(\omega_1)\eta\omega_2 + \frac{1}{2}G''_0(\omega_1)\eta^2\omega_2^2 + \dots,$$

тогда

$$\int_{-1}^1 G_0(\omega_1 + \eta\omega_2) d\eta = 2 \left( G_0(\omega_1) + \frac{1}{6}G''_0(\omega_1)\omega_2^2 + \dots \right). \quad (9)$$

Учитывая (5),  $G''_0(z) = \left( \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} \right)' = \zeta_0(z)$ ,  $G'''_0(z) = \zeta'_0(z) = \zeta'(z) + \alpha = \alpha - \wp(z)$ ,  $G''_0(z) = -\wp'(z)$  и т. д. Здесь  $\wp$  — функция Вейерштрасса. Так как  $\wp(z)$  является четной и двоякопериодической, то для всех ее нечетных производных справедливы равенства [3]:  $\wp'(\omega_1) = \wp'''(\omega_1) = \dots = 0$ . Поэтому

$$\frac{1}{2\omega_1} \int_{-1}^1 G_0(\omega_1 + \eta\omega_2) d\eta = \frac{G_0(\omega_1)}{\omega_1} + \frac{1}{6} \frac{\zeta_0(\omega_1)}{\omega_1} \omega_2^2. \quad (10)$$

Для нахождения  $G_0(z)$  воспользуемся следующими представлениями  $\zeta_0(z)$  [4]:

$$\zeta_0(z) = \frac{\beta\bar{\omega}_1}{\omega_1} z + \frac{\pi}{2\omega_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin \frac{\pi n z}{\omega_1},$$

$$\zeta_0(z) = \frac{\beta\bar{\omega}_2}{\omega_2} z + \frac{\pi}{2\omega_2} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2\omega_2} + \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1^{2n}}{1 - q_1^{2n}} \sin \frac{\pi n z}{\omega_2},$$

где  $q = e^{i\pi\tau}$  и  $q_1 = e^{-i\pi/\tau}$  — основной и дополнительный параметры Якоби,  $\tau = \omega_2/\omega_1 = \lambda e^{i\theta}$  — параметры решетки. Тогда

$$\ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} = \frac{\beta\bar{\omega}_1}{\omega_1} \frac{z^2}{2} + \ln \sin \frac{\pi z}{2\omega_1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos \frac{\pi n z}{\omega_1} + C_1,$$

$$\ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} = \frac{\beta\bar{\omega}_2}{\omega_2} \frac{z^2}{2} + \ln \sin \frac{\pi z}{2\omega_2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q_1^{2n}}{1 - q_1^{2n}} \cos \frac{\pi n z}{\omega_2} + C_2.$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  найдем из условия  $\ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} = \ln z + O(z^2)$  при  $z \rightarrow 0$ , т. е.

$$C_1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} - \ln \frac{\pi}{2\omega_1},$$

$$C_2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q_1^{2n}}{1 - q_1^{2n}} - \ln \frac{\pi}{2\omega_2}.$$

Поэтому

$$G_0(z) = \frac{\beta \bar{\omega}_1 z^3}{\omega_1 6} + \int_0^z \ln \sin \frac{\pi \xi}{2\omega_1} d\xi - \frac{2\omega_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin \frac{\pi n z}{\omega_1} + C_1 z,$$

$$G_0(z) = \frac{\beta \bar{\omega}_2 z^3}{\omega_2 6} + \int_0^z \ln \sin \frac{\pi \xi}{2\omega_2} d\xi - \frac{2\omega_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{q_1^{2n}}{1-q_1^{2n}} \sin \frac{\pi n z}{\omega_2} + C_2 z.$$

Следовательно

$$G_0(\omega_1) = \frac{\beta \bar{\omega}_1 \omega_1^2}{6} + \int_0^{\omega_1} \ln \sin \frac{\pi z}{2\omega_1} dz + C_1 \omega_1. \quad (11)$$

Интеграл в (11) вычисляется следующим образом:

$$\int_0^{\omega_1} \ln \sin \frac{\pi z}{2\omega_1} dz = \frac{2\omega_1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \frac{2\omega_1}{\pi} \left( -\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) = -\omega_1 \ln 2.$$

Таким образом, получаем представление для (10):

$$\frac{G_0(\omega_1)}{\omega_1} + \frac{1}{6} \frac{\zeta_0(\omega_1)}{\omega_1} \omega_2^2 = \frac{1}{6} \beta |\omega_1|^2 \left( \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + 1 \right) - \ln 2 + C_1. \quad (12)$$

Теперь нужно вычислить

$$\frac{1}{2\omega_1} \int_{-1}^1 G_0^+(\eta \omega_2) d\eta = \frac{1}{2\omega_1 \omega_2} \int_{-\omega_2}^{\omega_2} G_0(z) dz.$$

Учитывая, что  $G_0(z) = z \ln z - z + O(z^3)$ , получим

$$\int G_0(z) dz = \frac{z^2}{2} \left( \ln z - \frac{3}{2} \right) + O(z^4).$$

Тогда

$$\frac{1}{2\omega_1 \omega_2} \int_{-\omega_2}^{\omega_2} G_0(z) dz = \frac{1}{4\omega_1 \omega_2} \left\{ z^2 \left( \ln z - \frac{3}{2} \right) + O(z^4) \right\} \Big|_{-\omega_2}^{\omega_2} = \frac{\pi i \omega_2}{4\omega_1}.$$

В результате

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} \right) d\xi d\eta &= \\ &= \frac{1}{2\omega_1} \int_{-1}^1 \{G_0(\omega_1 + \eta \omega_2) - G_0(\eta \omega_2)\} d\eta = \\ &= \frac{G_0(\omega_1)}{\omega_1} + \frac{1}{6} \frac{\zeta_0(\omega_1)}{\omega_1} \omega_2^2 - \frac{i\pi \omega_2}{4 \omega_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Заменяя  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ ,  $\omega_2 \rightarrow -\omega_1$  [4], выражение (13) можно записать также в виде:

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} \right) d\xi d\eta = \frac{G_0(\omega_2)}{\omega_2} + \frac{1}{6} \frac{\zeta_0(\omega_2)}{\omega_2} \omega_1^2 + \frac{i\pi \omega_1}{4 \omega_2}.$$

Поэтому вещественная часть (13) может быть представлена так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \operatorname{Re} \left\{ \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} \right\} d\xi d\eta = \\ & = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{G_0(\omega_1)}{\omega_1} + \frac{1}{6} \frac{\zeta_0(\omega_1)}{\omega_1} \omega_2^2 + \frac{G_0(\omega_2)}{\omega_2} + \frac{1}{6} \frac{\zeta_0(\omega_2)}{\omega_2} \omega_1^2 - \frac{i\pi}{4} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая (12), интеграл (4), определяющий среднее давление, равен следующему выражению:

$$\begin{aligned} \bar{p} = \frac{Q}{4\pi\chi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{6} \beta |\omega_1|^2 \left( \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1 \right) + \frac{1}{6} \beta |\omega_2|^2 \left( \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1 \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q_1^{2n}}{1 - q_1^{2n}} + \right. \\ \left. + \ln \frac{\omega_1}{\pi} + \ln \frac{\omega_2}{\pi} - \frac{i\pi}{4} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \right\} + C. \quad (14) \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\omega_2/\omega_1 = \tau$ ,  $\beta = \pi/\Delta$ ,  $\Delta = 4\operatorname{Im}(\bar{\omega}_1, \omega_2) = |\omega_1|^2 \operatorname{Im}\tau = |\omega_2|^2 \operatorname{Im}(1/\bar{\tau})$ , выражение (14), как функцию от  $\tau$ , представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\tau) = \frac{Q}{4\pi\chi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\pi}{24} \frac{\tau^2 - 1}{\operatorname{Im}\tau} + \frac{\pi}{24} \frac{1/\tau^2 - 1}{\operatorname{Im}(1/\bar{\tau})} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q_1^{2n}}{1 - q_1^{2n}} + \right. \\ \left. + \ln \left( \frac{\omega_1^2}{\pi^2} \tau \right) - \frac{i\pi}{4} \left( \tau - \frac{1}{\tau} \right) \right\} + C, \quad (15) \end{aligned}$$

где  $C = p_w - \frac{Q}{4\pi\chi} \ln r_w^2$ ,  $q = e^{i\pi\tau}$ ,  $q_1 = e^{-i\pi/\tau}$ .

## 2. Коэффициент продуктивности

Величину среднего давления  $\bar{p}$  в выражении (15) удобнее выражать через параметры Якоби  $q$  и  $q_1$ . Учитывая тождество

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} + \frac{q_1^{2n}}{1 - q_1^{2n}} \right] = -\ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 - q_1^{2n})^2,$$

а также то, что  $i\pi(\tau - 1/\tau) = \ln(qq_1)$ , выражение (15) представим в виде

$$\bar{p} = p_w - \frac{Q}{4\pi\chi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{6} \ln(qq_1) + \ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2k})^2 (1 - q_1^{2k})^2 - \ln \left( \frac{\omega_1^2}{\pi^2} \tau \right) + \ln r_w^2 \right\}. \quad (16)$$

Слагаемое  $\operatorname{Re} \ln(\omega_1^2 \tau / \pi^2) = \ln |\omega_1^2 \tau / \pi^2|$  в (16) можно выразить через площадь области питания  $\Delta = 4|\omega_1|^2 \operatorname{Im}\tau$  следующим образом:

$$\ln \left| \frac{\omega_1^2 \tau}{\pi^2} \right| = \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi^2 \operatorname{Im} \sqrt{\tau/\bar{\tau}}} \right) = \ln \left( \frac{\Delta}{4\pi^2 \sin \theta} \right).$$

Таким образом, выражение (16) примет вид

$$\bar{p} = p_w + \frac{Q}{2\pi\chi} \ln \frac{R}{r_w}, \quad (17)$$

где  $R = \Delta^{1/2} \left( 4\pi^2 \sin \theta \left| (q q_1)^{1/6} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 - q_1^{2n})^2 \right| \right)^{-1/2}$  — некоторый характерный размер области питания, зависящий от ее параметров  $\lambda$  и  $\theta$  и аналогичный радиусу круга питания в случае одиночной скважины.

Следовательно, коэффициент продуктивности системы скважин  $PI$  будет следующим:

$$PI = 2\pi\chi / \ln \frac{R}{r_w}. \quad (18)$$

В нефтяной инженерии резервуаров обычно используется формула, в которой среднее давление  $\bar{p}$  выражается через безразмерный коэффициент формы контура питания скважины  $C_A$  (Dietz shape factor) [1] следующим образом [5]:

$$\bar{p} - p_w = \frac{Q}{4\pi\chi} \ln \frac{4\Delta}{\gamma C_A r_w^2}, \quad (19)$$

где  $\gamma = e^c = 1,781$ ;  $c = 0,577$  — постоянная Эйлера.

Сравнивая (16) и (19), видим, что величина  $C_A$  выражается через  $R$  как  $\gamma C_A = 4\Delta/R^2$ , т. е.  $C_A$  зависит от параметров решетки  $\lambda$  и  $\theta$  следующим образом:

$$\gamma C_A = 16\pi^2 \sin \theta \left| (q q_1)^{1/6} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 - q_1^{2n})^2 \right|. \quad (20)$$

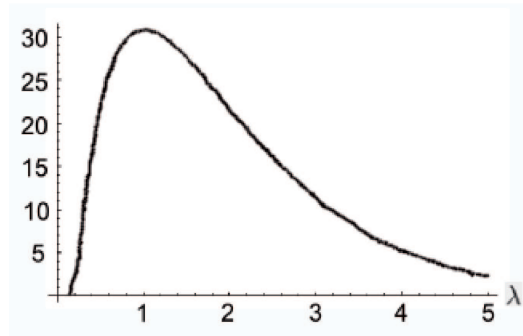


Рис. 2.  $C_A(\lambda)$  для прямоугольных решеток,  $\theta = \pi/2$

В случае прямоугольной решетки ( $\theta = \pi/2$ ) зависимость (20) можно представить через полные эллиптические интегралы первого рода, воспользовавшись известными тождествами для параметров Якоби  $q = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi K'/K}$ ,  $q_1 = e^{-i\pi/\tau} = e^{-\pi K/K'}$ :

$$\begin{aligned} & \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 - q_1^{2n})^2 = \\ & = \left[ \frac{4 k^2 (1 - k^2)}{q} \frac{1}{\pi^6} K^6(k) \right]^{\frac{1}{6}} \left[ \frac{4 k_1^2 (1 - k_1^2)}{q_1} \frac{1}{\pi^6} K^6(k_1) \right]^{\frac{1}{6}} = \end{aligned}$$

$$= \left[ \frac{4k^2(1-k^2)}{\sqrt{qq_1}} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{KK'}{\pi^2},$$

где  $K = K(k)$ ,  $K' = K(k_1)$  — полные эллиптические интегралы первого рода, а  $k$  и  $k_1 = \sqrt{1-k^2}$  — модуль и дополнительный модуль эллиптических интегралов. Таким образом, для прямоугольной решетки величина  $C_A$  может быть представлена как

$$\gamma C_A = 16KK'(2kk_1)^{2/3}. \tag{21}$$

Результаты вычислений  $C_A$  по формуле (21) представлены на графике (рис. 2) и в таблице вместе со значениями, вычисленными Дитцем [5] и Писманом [6] методом "мнимых источников".

Из рис. 2 видно, что квадратная решетка ( $\theta = \pi/2$ ,  $\lambda = 1$ ) является оптимальной при прямоугольном расположении добывающих скважин, т. к. она дает максимальное значение коэффициента формы  $C_A$ , а, следовательно, и максимальный коэффициент продуктивности решетки  $PI$ .

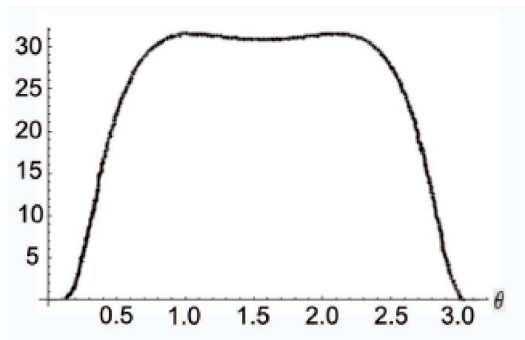


Рис. 3.  $C_A(\theta)$  для ромбических решеток,  $\lambda = 1$

Чтобы ответить на вопрос — нет ли других решеток, дающих больше, чем квадратная решетка, значения  $C_A$ , обратимся к представлению  $C_A$  в виде (20). Симметричная зависимость  $C_A$  от параметров Якоби  $q$  и  $q_1$ , позволяет утверждать, что максимум  $C_A$  нужно искать среди симметричных ромбических решеток, когда  $|q| = |q_1|$  (т. е. при  $|\tau| = 1$  или при  $\lambda = 1$ ). В этом случае

$$\gamma C_A = 16\pi^2 \sin \theta \left| q^{1/3} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^4 \right|, \tag{22}$$



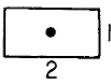
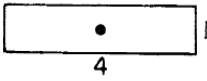
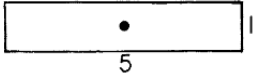
где  $q = e^{-\pi \sin \theta} (\cos(\pi \cos \theta) + i \sin(\pi \cos \theta))$ .

Результаты вычислений  $C_A$  по формуле (22) представлены на графике (рис. 3) и в таблице. Из рис. 3 видно, что максимальное значение  $C_A$  достигается при  $\theta = \pi/3$  и  $\theta = 2\pi/3$ , т. е. в случае правильной треугольной решетки.



Таблица

Формфактор  $C_A$  для прямоугольных контуров питания

Форма	$C_A$ , Дитц [5]	$C_A$ , Писман [6]	Полученный $C_A$
	30.9	30.88	30.88
	31.6	-	31.54
	22.6	21.84	21.84
	5.38	5.38	5.38
	2.36	2.36	2.36

## Литература

- [1] Дейк Л.П. Практический инжиниринг резервуаров. М.:Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. 668 с.
- [2] Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин // Вестник СамГУ. 2010. № 4(78). С. 5–11.
- [3] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
- [4] Ткаченко В.К. О вихревых решетках // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. № 6(12). С. 1875–1883.
- [5] Dietz D.N. Determination of Average Reservoir Pressure From Build-Up Surveys. Rijswijk, The Netherlands: SPE, 1965. P. 955–959.
- [6] Peaceman D.W. Recalculation of Dietz Shape Factor for Rectangles. 1990. SPE 21256.

Поступила в редакцию 22/IX/2011;  
в окончательном варианте — 22/IX/2011.

## MODELING OF DOUBLY PERIODIC SYSTEM OF PRODUCING WELLS. 2. PRODUCTIVITY INDEX

© 2011 V.I. Astafiev, P.V. Roters<sup>3</sup>

The question of productivity of doubly periodic systems of production wells is considered. Using the idealized production regime with a constant flow rate the analytical representation for the productivity index (*PI*) of the well was obtained and values depending on the drainage shapes were analyzed. Also an analytic representation for the Dietz's shape factor, which agrees with numerical calculations by the method of imaginary producing wells was obtained.

**Key words:** filtration, oil production, productivity index.

Paper received 22/IX/2011.

Paper accepted 22/IX/2011.

---

<sup>3</sup>Astafiev Vladimir Ivanovich ([vlast@ssu.samara.ru](mailto:vlast@ssu.samara.ru)), Roters Pavel Vyacheslavovich ([roters@ssu.samara.ru](mailto:roters@ssu.samara.ru)), the Dept. of Information Systems' Security, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.