УДК 539.3

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛАСТИНА НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ: АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

© 2011 А.А. Большаков[1]

Приближенное решение задачи о прямоугольной пластине на двухпараметрическом основании ищется в форме двойного ряда по балочным функциям. Построены балочные функции, удовлетворяющие краевым условиям упругого опирания. Предложены аналитические выражения для вычисления коэффициентов ряда.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, приближенное аналитическое решение, двухпараметрическое упругое основание, упругое опирание, балочные функции, двойной функциональный ряд.

Введение

Пластина на упругом основании является широко распространенной расчетной моделью конструктивных элементов объектов строительства, машиностроения, приборостроения, судостроения и т. д. Доминирующее место при решении задач в теории пластин в настоящее время занимают численные методы, альтернативу которым составляют аналитические методы, основанные на представлении решений в виде рядов.

Рассматривается задача о пластине, свободно лежащей на двухпараметрическом упругом основании и находящейся под действием распределенной произвольной нагрузки $q(x, y)$. Такой выбор задачи обусловлен тем, что если различные варианты решений в рядах для шарнирно-опертых или защемленных по контуру пластин широко представлены в литературе, то решений в рядах для прямоугольной пластинки с незакрепленными краями и двухпараметрическим упругим основанием найти не удалось. Поэтому разработка алгоритма построения решения названной задачи, при произвольном нагружении, в аналитической форме является актуальной проблемой.

Кроме того, алгоритмы расчета пластин, лежащих на двухпараметрическом основании, могут быть использованы для определения форм гармонических поперечных колебаний пластинок при учете прогибов, вызываемых деформациями сдвигов (пластина С.П. Тимошенко): уравнения, описывающие названные процессы, формально совпадают.

[1]Большаков Артем Александрович (info@project-center.ru), Пермский проектный институт реконструкции и строительства, 614000, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Орджоникидзе, 14.

1. Постановка задачи

Дифференциальное уравнение изгиба пластины, лежащей на двухпараметрическом упругом основании [1], имеет вид:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + c_1 w - c_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q(x, y). \tag{1.1}$$

Здесь первый коэффициент c_1 — коэффициент сжатия, связывающий интенсивность вертикального отпора упругого основания с его вертикальным смещением, Н/м^3; c_2 — независимый от c_1 коэффициент сдвига, связывающий интенсивность вертикальной силы сдвига и производную вертикального смещения в соответствующем направлении, Н/м.

Решение уравнения (1.1) представим в виде двойного ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} X_m(x) Y_n(y), \tag{1.2}$$

где w_{mn} — коэффициенты ряда, $X_m(x), Y_n(y)$ — фундаментальные балочные функции [2], представляющие собой частные решения уравнения поперечных колебаний балки.

Общее решение уравнения поперечных колебаний балки может быть представлено в форме:

$$X(x) = C_1 K_1(\alpha x) + C_2 K_2(\alpha x) + C_3 K_3(\alpha x) + C_4 K_4(\alpha x). \tag{1.3}$$

Здесь $K_1(\alpha x), K_2(\alpha x), K_3(\alpha x), K_4(\alpha x)$ — функции Крылова, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, которые определяются из краевых условий задачи свободных колебаний балки.

Как известно [1], при приложении к плите, свободно лежащей на упругом двухпараметрическом основании, вертикальной нагрузки, по периметру плиты возникают погонные поперечные силы переменной интенсивности, определяемой величиной вертикального перемещения точки контура.

Отнеся эти силы к полоске единичной ширины, получаем краевые условия для балочных функций:

$$\begin{gathered} kX(0) = -D \left. \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} \right|_{x=0}; kX(l) = D \left. \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} \right|_{x=l}; \\ D \left. \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; D \left. \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = 0 \right|_{x=l} = 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

2. Построение балочных функций

Введем обозначения $\lambda = \alpha l$ и $\beta = D\frac{\alpha^3}{k}$, $k = \sqrt{c_1 c_2}$, и подставим (1.3) в (1.4), тогда краевые условия запишутся в виде:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ C_1 + \beta C_4 = 0; \\ C_1 \left[K_1(\lambda) - \beta K_2(\lambda) \right] + C_2 \left[K_2(\lambda) - \beta K_3(\lambda) \right] + C_4 \left[K_4(\lambda) - \beta K_1(\lambda) \right] = 0; \\ C_1 K_3(\lambda) + C_2 K_4(\lambda) + C_4 K_2(\lambda) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Для получения отличных от нуля коэффициентов приравниваем нулю определитель полученной однородной системы уравнений. Подставив в (2.1) развернутые выражения функций Крылова [3] и проделав некоторые преобразования, придем к уравнению для определения характеристического числа:

$$4\,\mathrm{th}\,\lambda\sin\lambda+4\beta\,\mathrm{th}\,\lambda\cos\lambda-4\beta\sin\lambda-2\beta^2\cos\lambda+2\beta^2\frac{1}{\mathrm{ch}\,\lambda}=0. \tag{2.2}$$

При больших значениях λ:

$$\mathrm{tg}\,\lambda\approx\frac{\beta(\beta-2)}{2(1-\beta)}. \tag{2.3}$$

В соответствии с (2.1) коэффициенты C_1 и C_4, C_2 и C_4 связаны соотношениями:

$$\frac{C_1}{C_4}=-\beta,\frac{C_1}{C_4}=-\psi, \tag{2.4}$$

здесь ψ — вновь введенный параметр, определяемый выражением:

$$\psi=-\frac{K_2(\lambda)-\beta K_3(\lambda)}{K_4(\lambda)}=-\frac{\mathrm{sh}\,\lambda+\sin\lambda-\beta(\mathrm{ch}\,\lambda-\cos\lambda)}{\mathrm{sh}\,\lambda-\sin\lambda}. \tag{2.5}$$

Искомая балочная функция после нахождения корней λ из уравнений (2.2), (2.3) с учетом введенных обозначений (2.4), (2.5) примет вид:

$$X_i(x)=\frac{1}{2}\left[(1-\psi_i)\,\mathrm{sh}\,\alpha_i x-(1+\psi_i)\sin\alpha_i x-\beta_i\left(\mathrm{sh}\,\alpha_i x+\cos\alpha_i x\right)\right]. \tag{2.6}$$

Аналогично введя для фундаментальных балочных функций по оси y обозначения $\alpha_{yj},\beta_{yj},\lambda_{yj},\psi_{yj}$, получаем:

$$Y_j(y)=\frac{1}{2}\left[(1-\psi_{yj})\,\mathrm{sh}\,\alpha_{yj}y-(1+\psi_{yj})\sin\alpha_{yj}y-\beta_{yj}\left(\mathrm{sh}\,\alpha_{yj}y+\cos\alpha_{yj}y\right)\right]. \tag{2.7}$$

3. Определение коэффициентов ряда

Фундаментальные функции, определенные изложенным выше способом, ортогональны между собой и со своими четвертыми производными. Кроме того, балочные функции и их вторые производные обладают свойством «квазиортогональности» [2]. Для интегралов от фундаментальных балочных функций введем обозначения $a_{ii},b_{ii},c_{ii},d_{jj},e_{jj},f_{jj}$, определяемые соотношениями:

$$\begin{cases} a_{ii}=\int\limits_0^a X_i^2(x)dx;\\ b_{ii}=\int\limits_0^a X_i''(x)X_i(x);\\ c_{ii}=\alpha^4 a_{ii}; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} d_{jj}=\int\limits_0^b Y_j(y)^2dy;\\ e_{jj}=\int\limits_0^b Y_j''(y)Y_j(y);\\ f_{jj}={\alpha_y}^4 d_{jj}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Применение метода Галеркина [4] к поиску коэффициентов ряда (1.2) позволяет с учетом свойства «квазиортогональности» балочных функций определять коэффициенты w_{mn} независимо друг от друга:

$$w_{ij}\left[\alpha^4 D_1 + 2D_3\frac{b_{ii}}{a_{ii}}\frac{e_{jj}}{d_{jj}} + \beta^4 D_2 + c_1 - c_2\left(\frac{b_{ii}}{a_{ii}} + \frac{e_{jj}}{d_{jj}}\right)\right] = \\ = -\frac{\int\limits_0^b\int\limits_0^a q(x,y)X_i(x)Y_j(y)dxdy}{a_{ii}d_{jj}}. \tag{3.3}$$

Произведя вычисление интеграла a_{ii}, получим следующие формулы:

$$a_{ii} = Sl_1 + Sl_2 + Sl_3;$$
$$Sl_1 = \frac{(1-\psi)^2+\beta^2}{4\alpha}\operatorname{sh}2\lambda - \frac{2\beta(1-\psi)}{4\alpha}\operatorname{ch}2\lambda;$$
$$Sl_2 = \frac{(\psi^2-1)}{\alpha}(\sin\lambda\operatorname{ch}\lambda - cos\lambda\operatorname{sh}\lambda) + \frac{\beta^2}{\alpha}(\operatorname{sh}\lambda\cos\lambda + \operatorname{ch}\lambda\sin\lambda) - \\ -\frac{2\beta}{\alpha}(\operatorname{ch}\lambda\cos\lambda - \psi\operatorname{sh}\lambda\sin\lambda); \tag{3.4}$$
$$Sl_3 = \left(2\psi+\beta^2\right)\alpha - \frac{(1+\psi)^2-\beta^2}{4\alpha}\sin 2\lambda - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1+\psi}{2}\cos 2\lambda - 3\right).$$

Вычислим также интеграл b_{ii} в общем виде:

$$b_{ii} = \frac{\alpha}{16}\left[\operatorname{sh}\lambda\left((1-\psi)^2 + \beta^2 - 2\beta(1-\psi)\operatorname{cth}2\lambda\right) + \right. \\ \left. + \left((1+\psi)^2-\beta^2\right)\sin 2\lambda + 2\beta(1+\psi)\cos 2\lambda - 4\left(\left(1+\psi^2\right)\lambda + \beta\psi\right)\right]. \tag{3.5}$$

Однако, если определять функции $X_i(x)$ через (2.6), а функции $Y_j(y)$ — через (2.7) при ψ, ψ_y, вычисляемых по соотношению (2.5), то возникают проблемы с численной реализацией алгоритма. Приемлемая точность вычисления интегралов (3.1), (3.2) обеспечена при таких значениях i, j, для которых $\operatorname{sh}\lambda < 10^{18}, \operatorname{sh}\lambda_y < < 10^{18}$. При дальнейшем возрастании индексов i, j вычислительные погрешности приводят к обнулению коэффициентов w_{mn} ряда (1.2).

Найдем асимптотическую формулу, связывающую параметры ψ и β (индексы для простоты опущены) при неограниченном возрастании индексов i, j, для чего перепишем формулу (2.5) в виде:

$$\psi = \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\beta\operatorname{cth}\lambda) + (\sin\lambda - \cos\lambda)}{\operatorname{sh}\lambda - \sin\lambda}. \tag{3.6}$$

Учитывая, что с увеличением номера гармоники $\operatorname{th}\lambda \to 1, \operatorname{cth}\lambda \to 1$, и пренебрегая $\sin\lambda, \cos\lambda$ по сравнению с $\operatorname{sh}\lambda, \operatorname{ch}\lambda$, получаем из (3.6):

$$\psi = 1 - \beta. \tag{3.7}$$

Тогда, учитывая соотношения (3.6), (3.7), начиная с некоторых номеров i_α, j_α вместо (2.6), (2.7) имеем:

$$X_i(x) = \frac{\beta_i}{2}\left(\sin\alpha_i x - \cos\alpha_i x\right) - \sin\alpha_i x, i \geqslant i_\alpha; \tag{3.8}$$

$$Y_j(y) = \frac{\beta_{yj}}{2}\left(\sin\alpha_{yj}y - \cos\alpha_{yj}y\right) - \sin\alpha_{yj}y, j \geqslant j_\alpha. \tag{3.9}$$

Вычисляя интегралы a_{ii}, b_{ii}, при $i \geqslant i_\alpha$, получаем:

$$a_{ii} = \left((1-\beta)^2+1\right)a - \frac{1-\beta}{\alpha}\sin 2\lambda - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{2-\beta}{2}\cos 2\lambda - 3\right); \tag{3.10}$$

$$b_{ii} = \frac{\alpha}{16}\left[4(1-\beta)\sin 2\lambda + 2\beta(2-\beta)\cos 2\lambda + 4\left(1+(1-\beta)^2\right)\lambda + \beta(1-\beta)\right]. \tag{3.11}$$

Таким образом, при относительно небольших значениях $\lambda, (i < i_\alpha)$ для поиска a_{ii}, b_{ii} используются формулы (2.6), (2.7) и (3.4), (3.5), а при больших λ — формулы (3.8),(3.9) и (3.10), (3.11).

Выражения для поиска d_{jj} и e_{jj} имеют такой же вид, как и для a_{ii} и b_{ii}, естественно, со своими значениями β_y и λ_y. Интеграл в правой части (3.3) вычисляется либо аналитически, либо численно в зависимости от функции $q(x, y)$.

Скорость сходимости рядов вида

$$q(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} w_{ij}X_i(x)Y_j(y) \tag{3.12}$$

проверялась путем проведения вычислительных экспериментов.

Так, точность аппроксимации порядка 1 % при разложении в ряд (2.12) нагрузки $q_0 = const$, приложенной по области $x_1 \leqslant x \leqslant x_2, y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, достигалась при $i = 50,\ j = 50$.

Заметим, что при использовании метода Галеркина коэффициенты q_{ij} находятся независимо друг от друга, в силу ортогональности систем функций $X_i(x), Y_j(y)$.

Для улучшения сходимости рядов, представляющих производные от функции прогибов w(x,y), применяются множители Ланцоша [5].

Выводы

1. Предложен алгоритм построения приближенного аналитического решения задачи о пластинке, свободно лежащей на двухпараметрическом упругом основании, под действием произвольной распределенной поверхностной нагрузки.

2. Решение задачи построено в форме двойного ряда по балочным функциям, удовлетворяющим условиям упругого опирания концов балок. Коэффициенты ряда находятся независимо один от другого, что позволяет построить аппроксимацию решения с высокой точностью.

3. Алгоритмы, разработанные для пластин, лежащих на двухпараметрическом упругом основании, могут быть использованы для определения форм гармонических колебаний упругой пластины С.П. Тимошенко: уравнения, описывающие названные процессы, формально совпадают.

Литература

[1] Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Госстройиздат, 1954. 56 с.

[2] Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. М.: Высш. школа, 1972. 296 с.
[3] Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. школа, 1972. 416 с.
[4] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 296 с.
[5] Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

Поступила в редакцию 29/*XI*/2011;
в окончательном варианте — 29/*XI*/2011.

A RECTANGULAR PLATE ON A TWO-PARAMETER ELASTIC BASE: THE ANALYTICAL SOLUTION

© 2011 A.A. Bolshakov[2]

In the paper the approximate solution for a problem of a rectangular plate on a two-parameter elastic base is suggested. The double series of beam functions satisfying elastic support boundary conditions are constructed. The analytical expressions for series function coefficients are obtained.

Key words: rectangular plate, approximate analytical solution, two-parameter elastic base, elastic support, beam functions, double series of functions.

Paper received 29/*XI*/2011.
Paper accepted 29/*XI*/2011.

[2]Bolshakov Artem Alexandrovich (`info@project-center.ru`), Perm Project Institute of Reconstruction and Civil Engineering, Perm, 614000, Russian Federation.