УДК 517.9

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2011 А.Н. Лепилов[1]

Предложен метод приближенного вычисления предела максимального среднего для периодической функции, зависящей от времени и основных переменных, и дифференциального включения с постоянной правой частью.

Ключевые слова: предел максимального среднего, дифференциальное включение, периодическая функция.

Введение

Вычисление пределов максимальных средних возникает в задачах усреднения систем дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными. Если воспользоваться техникой опорных функций многозначных отображений, то усреднение опорных функций по быстрым переменным приводит к вычислениям подобного вида [1]. Отметим, что задача вычисления пределов максимальных средних решается, как правило, приближенными методами.

Будем говорить, что функция f принадлежит классу функций $\mathcal{F}$, если $f : D \to \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, $(t, y) \to f(t, y)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$; T-периодическая по любой переменной $t, y_1, \ldots, y_m$; $f \in \mathrm{C}^4(D, \mathbb{R})$.

Для функции $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим предел максимального среднего

$$M_f = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t, \gamma(t))\, dt, \tag{1}$$

где точная верхняя грань берется по всем решениям дифференциального включения

$$\dot\gamma \in G, \qquad \gamma(t_0) = y_0, \tag{2}$$

$G = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$ - брус, $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Множество всех решений задачи (2) в смысле Каратеодори, определенных на промежутке $[t_0, \infty)$, обозначим $\Gamma(t_0, y_0)$.

Предел максимального среднего (1) существует и не зависит от начальных условий, то есть можно считать $t_0 = 0$, более того существует и оптимальное решение задач (1), (2) [2, теорема 1].

[1]Лепилов Александр Николаевич (lepilov_aleksand@mail.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Рассмотрим также максимальное среднее на отрезке $[0, \Delta]$

$$M_f^{\Delta} = \sup_{y_0 \in K} \sup_{\gamma \in \Gamma(0, y_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(t, \gamma(t))\, dt, \tag{3}$$

где $K = K(0, T)$, $K(y_0, T) = [y_{01}, y_{01} + T] \times \ldots \times [y_{0m}, y_{0m} + T] \subset \mathbb{R}^m$ — брус.

Справедлива оценка предела максимального среднего (1) [2, теорема 2]

$$M_f^{\Delta} - \varepsilon_n \leqslant M_f \leqslant M_f^{\Delta}.$$

Здесь $\varepsilon_n = 2\tau_0 C_f/(nT)$, $nT = \Delta$, n — целое, постоянная $C_f > 0$ такая, что $f(t, y) \leqslant C_f$ для любых $(t, y) \in D$, $n \geqslant \tau_0/T$, $\tau_0 > 0$ такое, что $\tau_0 G$ содержит некоторый брус $K(z_0, T)$, $z_0 \in \mathbb{R}^m$ зависит от τ_0. Величина τ_0 находится из соотношения $\tau_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \{T/(b_i - a_i)\}$.

Таким образом, задача вычисления предела максимального среднего (1) с заданной точностью может быть заменена задачей вычисления максимального среднего (3). В данной работе приведен численный метод приближенного вычисления предела максимального среднего (1).

Численный метод

Для заданного $\varepsilon_n > 0$ зафиксируем $\Delta = nT$. В качестве n возьмем целую часть числа $2\tau_0 C_f/(T\varepsilon_n)$, увеличенную на 1. Обозначим через $\Gamma^{\Delta}(0, y_0)$ сужение множества всех решений $\Gamma(0, y_0)$ на отрезок $[0, \Delta]$. Как показано в [2], решение задачи (3) существует, то есть существует оптимальная пара $(y_0^{\max}, \gamma^{\max})$, $y_0^{\max} \in K$, $\gamma^{\max} \in \Gamma^{\Delta}(0, y_0^{\max})$, при которой достигается M_f^{Δ}.

Оптимальное решение задачи (3), согласно принципу максимума Понтрягина [3], является решением краевой задачи на отрезке $[0, \Delta]$

$$\begin{aligned} \dot{p}_j = -\frac{\partial}{\partial \gamma_j} f(t, \gamma), &\quad p(\Delta) = 0, \\ \dot{\gamma} \in G_0(p), &\quad \gamma(0) = y_0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $G_0(p) = \{u \in G \mid \max\limits_{v \in G} \langle p, v \rangle = \langle p, u \rangle\}$, $j = 1, \ldots, m$.

Решения краевой задачи (4) содержатся в классе решений следующей задачи Коши на отрезке $[0, \Delta]$:

$$\begin{aligned} \dot{p}_j = -\frac{\partial}{\partial \gamma_j} f(t, \gamma), &\quad p(\Delta) = 0, \\ \dot{\gamma} \in G_0(p), &\quad \gamma(\Delta) = y_{\Delta}, \quad j = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{5}$$

с начальными условиями при $t = \Delta$.

Для численного решения задач (3), (5) введем на отрезке $[0, \Delta]$ равномерную сетку $\Lambda_\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_Q\}$, $\Delta = t_0 > t_1 > \ldots > t_Q = 0$, $\tau = \Delta/Q$ — шаг сетки Λ_τ. Начальное условие y_{Δ} в (5) в силу T-периодичности функции f будем брать из бруса K, на котором также введем равномерную сетку $\Omega_h \subset K$ с шагом $h > 0$ по каждой из координат.

Приближенное решение задачи (3) будем искать следующим образом. Для каждого значения $y_{\Delta}^k \in \Omega_h$ находим решение задачи (5) $\gamma_5^k(t)$, $\gamma_5^k(0) = z_0^k$, определяя на каждом частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, Q-1$, управление $u^k(t) = \dot{\gamma}_5^k(t)$, и вычисляем в силу T-периодичности функции f начальное условие $y_0^k \in K$ в момент времени $t = 0$ из условия $y_0^k = z_0^k + lT \in K$, $l \in \mathbb{Z}^m$ — вектор констант, $k \in J$,

$J=\{1,2,\dots,(T/h+1)^m\}$. Далее определяем величину $I(y_0^k,\gamma^k)/\Delta$, которая является численным значением среднего $(\int_0^\Delta f(s,\gamma^k(s))\,ds)/\Delta$, где $\gamma^k(t)=y_0^k+\int_0^t u^k(s)\,ds$, $k\in J$. За приближенную величину максимального среднего (3) принимаем следующее значение:

$$S_f^\Delta=\max_{k\in J}\left\{\frac{1}{\Delta}I(y_0^k,\gamma^k(t))\right\}=\frac{1}{\Delta}I(y_0^s,\gamma^s(t)).$$

Интегрирование на каждом из отрезков $[t_i,t_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,Q-1$ можно производить методом Симпсона, при этом погрешность формулы Симпсона для $t\in[0,\Delta]$ составляет $\psi=\tau^4 nTM_4/2880$, $M_4=M_4(f)$ [4].

Далее для некоторого $\delta>0$ и $\forall\,\gamma(t)\in\Gamma^\Delta(0,y_0)$ определим множество $A_\delta=$ $=\{t\in[0,\Delta]:\exists j,\ 1\leqslant j\leqslant m$ такое, что $|p_j(t)|=|p_j(\Delta)+\int_\Delta^t\dot p_j(s)\,ds|=$ $=\int_\Delta^t(-\partial f(s,\gamma(s))/\partial\gamma_j)\,ds<\delta\}$.

Сформулируем условие на функцию f, которое используется в теореме об оценке погрешности приближенного вычисления предела максимального среднего (1).

Условие У. Существует целое N, $\forall\varkappa>0\ \exists\ \delta_0>0$ такое, что $\forall\delta\in(0,\delta_0]$, и $\forall\,\gamma(t)\in\Gamma^\Delta(0,y_0)$, существует конечная система интервалов (c_i,d_i), $i=1,2,\dots,N_1$, $N_1\leqslant N$, $\sum\limits_{i=1}^{N_1}(d_i-c_i)\leqslant\varkappa$, покрывающая множество A_δ.

Таким образом, получаем:

1) опорное множество гиперплоскости к брусу G с нормальным вектором p есть одноточечное множество для $t\in[0,\Delta]\setminus A_\delta$;

2) выбор управления $\dot\gamma$ для $t\in[0,\Delta]\setminus A_\delta$ в задаче (5) происходит из конечного набора управлений, то есть $G_0(p)\equiv v$, $v\in V$, V — множество допустимых скоростей, соответствующих вершинам бруса $G\subset\mathbb{R}^m$.

Перейдем к оценке погрешности приближенного вычисления предела максимального среднего M_f.

Обозначим $\varepsilon_1(n)=\varepsilon_n=2\tau_0C_f/(nT)$ — теоретическая погрешность, $\varepsilon_2(\tau)=\tau^4M_4/2880$ — погрешность интегрирования методом Симпсона, $\varepsilon_3(\varkappa,h)=L(h\sqrt{m}/2+U\varkappa)$ — погрешность, обусловленная введением сеток, $\max\limits_{t\in A_\delta}\|u(t)-u^s(t)\|\leqslant U=\sqrt{R}$, $R=\sum\limits_{i=1}^m(b_i-a_i)^2$, $u(t)=\dot\gamma^{\max}$, $u^s(t)=\dot\gamma^s$, $L=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\max\limits_{\gamma_i\in[0,T]}|f'_{\gamma_i}(t,\gamma)|$ — константа Липшица.

Теорема. Пусть функция $f\in\mathcal{F}$ и выполнено условие У. Тогда имеет место следующая оценка:

$$|M_f-S_f^\Delta|\leqslant\varepsilon_1(n)+\varepsilon_2(\tau)+\varepsilon_3(\varkappa,h).$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$|M_f-S_f^\Delta|\leqslant|M_f-M_f^\Delta|+|M_f^\Delta-S_f^\Delta|\leqslant|M_f-M_f^\Delta|+$$
$$+\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta|f(t,\gamma^{\max}(t))-f(t,\gamma^s(t))|\,dt+\frac{1}{\Delta}\left|\int_0^\Delta f(t,\gamma^s(t))dt-I(y_0^s,\gamma^s(t))\right|,\qquad(6)$$

где $M_f^\Delta=\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta f(t,\gamma^{\max}(t))\,dt$, $\gamma^{\max}(0)=y_0^{\max}$, $\gamma^s(0)=y_0^s$, причем $\gamma^{\max}(\Delta)=y_\Delta^{\max}$, $\gamma^s(\Delta)=y_\Delta^s$ и $\|y_\Delta^{\max}-y_\Delta^s\|\leqslant h\sqrt{m}/2$.

Оценим каждое слагаемое из правой части (6).

1. Первая разность в (6) $|M_f-M_f^\Delta|\leqslant\varepsilon_1(n)$.

2. Если значение интеграла $\int_0^\Delta f(t,\gamma^s(t))dt$ вычислять методом Симпсона, то последнее слагаемое оценивается

$$\frac{1}{\Delta}\left|\int_0^\Delta f(t,\gamma^s(t))\,dt - I(y_0^s,\gamma^s(t))\right| \leqslant \tau^4 M_4/2880 = \varepsilon_2(\tau).$$

3. Наконец оценим второе слагаемое в (6)

$$\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta |f(t,\gamma^{\max}(t)) - f(t,\gamma^s(t))|\,dt \leqslant \frac{L}{\Delta}\int_0^\Delta \|\gamma^{\max}(t)-\gamma^s(t)\|\,dt, \tag{7}$$

где $\dot\gamma^{\max} = u(t)$, $\dot\gamma^s = u^s(t)$, следовательно, по формуле Ньютона – Лейбница $\gamma^{\max}(t) = y_\Delta^{\max} + \int_\Delta^t u(\tau)\,d\tau$, $\gamma^s(t) = y_\Delta^s + \int_\Delta^t u^s(\tau)\,d\tau$. Отметим, что на множестве $[0,\Delta]\backslash A_\delta$ управления $u(t)$ и $u^s(t)$ совпадают.

В (7) разобъем интеграл по следующим отрезкам:

$$\int_0^\Delta \|\gamma^{\max}(t)-\gamma^s(t)\|\,dt \leqslant \int_0^{c_1}\left(\int_{c_1}^t \|u(\tau)-u^s(\tau)\|\,d\tau + \|\gamma^{\max}(c_1)-\gamma^s(c_1)\|\right)dt+$$

$$+\int_{d_{N_1}}^\Delta\left(\int_\Delta^t \|u(\tau)-u^s(\tau)\|\,d\tau + \|y_\Delta^{\max}-y_\Delta^s\|\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_1}\int_{c_i}^{d_i}\left(\int_{d_i}^t \|u(\tau)-u^s(\tau)\|\,d\tau + \|\gamma^{\max}(d_i)-\gamma^s(d_i)\|\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_1-1}\int_{d_i}^{c_{i+1}}\left(\int_{c_{i+1}}^t \|u(\tau)-u^s(\tau)\|\,d\tau + \|\gamma^{\max}(c_{i+1})-\gamma^s(c_{i+1})\|\right)dt.$$

Видим, что разность между начальными условиями будет увеличиваться только на промежутках $(c_i,d_i)\subset A_\delta$ на величину $U_i(d_i-c_i)$, $U_i = \max\limits_{t\in(c_i,d_i)}\|u(t)-u^s(t)\|$, $i=1,2,\ldots,N_1$. Тогда разность между начальными условиями в момент времени $t=0$ достигнет

$$\|\gamma^{\max}(0)-\gamma^s(0)\| \leqslant h\sqrt{m}/2 + \sum_{i=1}^{N_1} U_i(d_i-c_i) \leqslant h\sqrt{m}/2 + U\varkappa, \quad \max_{i=1,2,\ldots,N_1}\{U_i\}\leqslant U.$$

Получаем оценку правой части (7)

$$\frac{L}{\Delta}\int_0^\Delta \|\gamma^{\max}(t)-\gamma^s(t)\|\,dt \leqslant L(h\sqrt{m}/2 + U\varkappa) = \varepsilon_3(\varkappa,h).$$

Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что при решении задачи Коши (5) требуется достаточно точно находить функции $p(t)$ и $\gamma(t)$. Это диктуется теоретическим условием У.

Литература

[1] Филатов О.П. Усреднение дифференциальных включений и пределы максимальных средних. Самара: Издательство "Универс групп", 2009. 176 с.

[2] Филатов О.П. Вычисление пределов максимальных средних для периодических функций // Вестник СамГУ. 2011. № 2. С. 75–79.

[3] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 408 с.

[4] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

Поступила в редакцию 22/*IX*/2011;
в окончательном варианте — 22/*IX*/2011.

NUMERICAL METHOD OF AN EVALUATION OF LIMITS OF MAXIMAL MEANS FOR PERIODIC FUNCTIONS

© 2011 A.N. Lepilov[2]

The method of approximate calculation of limit of maximal mean for periodic function depending on the time and basic variables and differential inclusion with a constant right hand is offered.

Key words: limit of maximal mean, differential inclusion, periodic function.

Paper received 22/*IX*/2011.
Paper accepted 22/*IX*/2011.

[2]Lepilov Alexander Nikolaevich (lepilov_aleksand@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.