МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДЕННЫХ ВОЗМУЩЕННЫМИ САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

© 2013 С.И. Кадченко[1]

Разработан новый численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами по их спектральным характеристикам. Метод был апробирован на задачах для возмущенного оператора Штурма — Лиувилля. Результаты многочисленных расчетов показали его вычислительную эффективность. Найдены простые алгебраические формулы для нахождения собственных значений дискретных операторов. При этом вычисление собственных значений возмущенного самосопряженного оператора можно начинать с любого их номера независимо от того, известны ли собственные значения с предыдущими номерами или нет.

**Ключевые слова:** дискретные операторы, самосопряженные операторы, собственные значения, собственные функции, обратные спектральные задачи, интегральное уравнение Фредгольма первого рода, некорректно поставленные задачи, задача Штурма — Лиувилля.

## Введение

Интерес к обратным задачам все время возрастает в связи с широкой областью их приложения, например, к задачам сейсморазведки, идентификация композитных материалов, проблемам неразрушающего контроля, нелинейных эволюционных уравнений математической физики и др. В статье разработан численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами по их спектральным характеристикам. Получено интегральные уравнение Фредгольма первого рода, позволяющие восстановить значения возмущающего оператора в узловых точках дискретизации. На основе метода Бубнова – Галеркина найдены простые формулы для вычисления приближенных собственных значений возмущенных самосопряженных операторов.

[1]Кадченко Сергей Иванович (kadchenko@masu.ru), кафедра уравнений математической физики Южно-Уральского государственного университета (Национальный исследовательский университет), 454080, Российская Федерация, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.

# 1. Теоретические положения метода

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор $T$ и ограниченный оператор $P$, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$. Допустим, что известны собственные значения $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $T$, которые занумерованы в порядке невозрастания собственных значений $\mu_k$ по величине с учетом алгебраической кратности. Пусть $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – собственные значения оператора $T+P$, занумерованные в порядке невозрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Для нахождения собственных значений спектральной задачи

$$\Big(T+P\Big)\varphi=\beta\varphi \tag{1}$$

применим метод Бубнова – Галеркина.

Пусть система функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом пространства $H$. Следуя методу Бубнова – Галеркина, будем искать решение спектральной задачи (1) в виде

$$\varphi_n=\sum_{k=1}^{n}a_k(n)\omega_k. \tag{2}$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получим

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(n)(T+P)\omega_k=\widetilde{\beta}(n)\sum_{k=1}^{n}a_k(n)\omega_k.$$

Здесь $\widetilde{\beta}(n)$ – $n$-е приближения по Бубнову – Галеркину к соответствующим собственным числам $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $T+P$. Так как $T\omega_k=\mu_k\omega_k$, то

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(n)(\mu_k+P)\omega_k=\widetilde{\beta}(n)\sum_{k=1}^{n}a_k(n)\omega_k.$$

Коэффициенты $\{a_k(n)\}_{k=1}^{n}$ определяются из требования, чтобы левая часть последнего уравнения была ортогональна к функциям $\{\omega_l\}_{l=1}^{n}$. В результате получаем систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов $\{a_k(n)\}_{k=1}^{n}$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(n)\Big\{[\widetilde{\beta}(n)-\mu_k]\delta_{kl}-(P\omega_k,\omega_l)\Big\}=0,\ \ l=\overline{1,n}.$$

Приравняв определитель этой системы к нулю, приходим к уравнению

$$\det\|\widetilde{\beta}(n)\mathbf{E}-\mathbf{A}\|=0,$$

определяющему приближенные значения первых собственных значений $\{\widetilde{\beta_k}(n)\}_{k=1}^{n}$ оператора $T+P$. Здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица размера $n\times n$, $\mathbf{A}=\|a_{kl}\|_{k,l=1}^{n}$, $a_{kl}=\mu_k\delta_{kl}+(P\omega_k,\omega_l)$, $\delta_{kl}$ – символ Кронекера.

Известно [5], что для собственных значений $\{\widetilde{\beta}_k(n)\}_{k=1}^{n}$ матрицы $\mathbf{A}$ справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\beta}_k^p(n)=Sp\mathbf{A}^p,\quad p=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где $Sp\mathbf{A}^p$ – след $p$-й степени матрицы $\mathbf{A}$.

След $p$-й степени матрицы $\mathbf{A}$ вычисляется по формуле

$$Sp\mathbf{A}^p=\sum_{j_1,j_2,\dots,j_p=1}^{n}\prod_{s=1}^{p}a_{j_sj_r}. \tag{4}$$

Здесь $r = \begin{cases} s+1, & s \neq p, \\ 1, & s = p. \end{cases}$

Используя (3) и (4) при $p = 1$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\beta}_k(n) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Вводя обозначения $\varepsilon_k(n) = \beta_k - \widetilde{\beta}_k(n)$, найдем

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} [a_{kk} + \varepsilon_k(n)]. \tag{5}$$

Запишем уравнение (5) для $n-1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k = \sum_{k=1}^{n-1} [a_{kk} + \varepsilon_k(n-1)]. \tag{6}$$

Вычитая (5) из (6), имеем

$$\beta_k = \mu_k + (P\omega_k, \omega_k) + \eta_k(n), \quad \forall k \in N, \tag{7}$$

где

$$\eta_k(n) = \varepsilon_k(n) - \sum_{k=1}^{n-1} [\widetilde{\beta}_k(n) - \widetilde{\beta}_k(n-1)].$$

Если в (7) подставить $\varepsilon_k(n) = \beta_k - \widetilde{\beta}_k(n)$, то получим формулы для нахождения собственных значений оператора $T + P$, удобные для численных расчетов

$$\widetilde{\beta}_k(n) = \mu_k + (P\omega_k, \omega_k) - \sum_{k=1}^{n-1} [\widetilde{\beta}_k(n) - \widetilde{\beta}_k(n-1)], \;\; k = \overline{1, n}. \tag{8}$$

**Теорема 1.** *Пусть $T$ – дискретный полуограниченный снизу оператор, $P$ – ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$. Если оператор $T+P$ положительно определенный в $H$ и система координатных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом $H$, то метод Бубнова – Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных значений спектральной задачи (1), построенный на этой системе функций, сходится.*

**Доказательство.** Запишем уравнение (1) в виде

$$(T + P - \lambda E)\varphi = (\beta - \lambda)\varphi. \tag{9}$$

Для дискретного оператора $T + P$ существует резольвентный оператор $R_\lambda(T + P) = (T + P - \lambda E)^{-1}$, который вполне непрерывный в $H$ [3]. Действуя слева на обе части уравнения (9) оператором $R_\lambda(T + P)$, получим

$$\varphi = (\beta - \lambda) R_\lambda(T + P)\varphi.$$

На основании [4] метод Бубнова – Галеркина в применении к задаче об отыскании собственных значений (9), а следовательно и уравнения (1), сходится. □

Если операторы $T$ и $P$ удовлетворяют требованием теоремы 1, то метод Бубнова – Галеркина в применении к задаче для отыскания собственных значений спектральной задачи (1), построенный на системе функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходится. Поэтому с увеличением $n$ точность вычисления собственных значений $\{\widetilde{\beta}_k(n)\}_{k=1}^{n}$ оператора $T + P$ по формулам (8) возрастает.

Нахождение собственных значений возмущенного самосопряженного оператора по формулам (8) можно начинать с любого их номера независимо от того, известны ли собственные значения с предыдущими номерами или нет.

По формулам (8) особенно эффективно находить собственные значения возмущенного самосопряженного оператора с большим номером, что в случае применения метода Бубнова – Галеркина становится затруднительным.

## 2. Решение обратных спектральных задач

Пусть $T$ — дискретный полуограниченный снизу оператор, а $P$ — ограниченный оператор умножения на функцию $p(s)$, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[a,b]$, где $[a,b]$ — отрезок изменения переменной $s$. Допустим, что известны собственные значения $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и ортонормированные собственные функции $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $T$, которые занумерованы в порядке невозрастания собственных значений $\mu_k$ по величине с учетом их кратности. Предположим, что система функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2[a,b]$.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Ap \equiv \int_a^b K(x,s)p(s)ds = f(x), \quad c \leqslant x \leqslant d. \tag{10}$$

Функции $K(x,s)$ и $f(x)$ такие, что

$$K(x_k,s) = \omega_k^2(s), \;\; c \leqslant x_k \leqslant d,$$

$$f(x_k) = \beta_k - \mu_k.$$

Пусть ядро интегрального уравнения (10) $K(x,s)$ непрерывно и замкнуто в прямоугольнике $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, функции $p(s) \in W_2^1[a,b]$ и $f(x) \in L_2[c,d]$.

Допустим, что в узловых точках $x_k$ отрезка $[a,b]$ вместо точных значений функции $f(x_k)$ правой части уравнения (10) известны ее приближенные значения

$$\widetilde{f}(x_k) = \widetilde{\beta}_k(n) - \mu_k + \sum_{k=1}^{n-1}[\widetilde{\beta}_k(n) - \widetilde{\beta}_k(n-1)].$$

Задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (10) является некорректно поставленной. Ее приближенные решения могут быть найдены с помощью метода регуляризации Н.А. Тихонова [6].

Численное решение интегрального уравнения (10) определяет приближенные значения $\{\widetilde{p}_i(s)\}_{i=1}^{I}$ функции $p(s)$ в узловых точках $s_i$, $i=\overline{1,I}$, $a = s_1 < s_2 < ...$ $... < s_I = b$. Число узловых точек $I$ можно выбрать достаточно большим, чтобы получить необходимую точность при интерполяции функции $p(s)$.

## 3. Численный эксперимент

Проиллюстрируем метод нахождения значений возмущающего оператора $p(s)$ в узлах дискретизации, на спектральной задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} -u'' + p(s)\;\, u = \beta\;\, u, \quad a < s < b; \\ cos\alpha\;\, u'(a) + sin\alpha\;\, u(a) = 0; \\ cos\gamma\;\, u'(b) + sin\gamma\;\, u(b) = 0, \quad \alpha, \gamma\; \in R. \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим оператор $T\omega \equiv -\omega''$, причем функция $\omega$ удовлетворяет граничным условиям задачи (11). Нетрудно показать, что оператор $T$ самосопряженный, и его собственные значения являются решением трансцендентного уравнения

$$[\sin\alpha\sin(\sqrt{\mu}a)+\sqrt{\mu}\cos\alpha\cos(\sqrt{\mu}a)]\times$$
$$\times[\sin\gamma\cos(\sqrt{\mu}b)-\sqrt{\mu}\cos\gamma\sin(\sqrt{\mu}b)]+$$
$$+[\sqrt{\mu}\cos\alpha\sin(\sqrt{\mu}a)-\sin\alpha\cos(\sqrt{\mu}a)]\times$$
$$\times[\sin\gamma\sin(\sqrt{\mu}b)+\sqrt{\mu}\cos\gamma\cos(\sqrt{\mu}b)]=0,$$

а собственные функции имеют вид:

$$\omega_k(s)=C_k\{[\sin\alpha\sin(\sqrt{\mu_k}a)+\sqrt{\mu_k}\cos\alpha\cos(\sqrt{\mu_k}a)]\cos(\sqrt{\mu_k}s)+$$
$$+[\sqrt{\mu_k}\cos\alpha\sin(\sqrt{\mu_k}a)-\sin\alpha\cos(\sqrt{\mu_k}a)]\sin(\sqrt{\mu_k}s)\},\quad k=\overline{1,\infty}.$$

Здесь $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные значения оператора $T$. Постоянные $C_k$ находятся из условия нормировки.

Для проверки полученных формул (8) сравним величины собственных значений спектральной задачи Штурма – Лиувилля (11), найденные по формулам (8), которые обозначим $\widetilde{\beta}_k(n)$ и методом Бубнова – Галеркина, которые обозначим $\widehat{\beta}_k(n)$.

Таблица 1

| $k$ | $\widetilde{\beta}_k(31)$ | $\widehat{\beta}_k(31)$ | $\lvert\widetilde{\beta}_k(31)-\widehat{\beta}_k(31)\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $13,66134-2,55439i$ | $13,60139-2,57604i$ | $0,06375$ |
| 2 | $42,92974-2,63944i$ | $42,95887-2,62907i$ | $0,02997$ |
| 3 | $92,21746-2,65564i$ | $92,22718-2,65110i$ | $0,01035$ |
| 4 | $161,78283-2,66092i$ | $161,28901-2,65806i$ | $0,00554$ |
| 5 | $250,10059-2,66235i$ | $250,10377-2,66122i$ | $0,00338$ |
| 6 | $358,66101-2,66367i$ | $358,66318-2,66291i$ | $0,00230$ |
| 7 | $486,96272-2,66447i$ | $486,96429-2,66392i$ | $0,00166$ |
| 8 | $635,00474-2,66498i$ | $635,00593-2,66457i$ | $0,00126$ |
| 9 | $802,78662-2,66534i$ | $802,78755-2,66501i$ | $0,00099$ |
| 10 | $990,30810-2,66559i$ | $990,30885-2,66533i$ | $0,00080$ |
| 11 | $1197,56905-2,66578i$ | $1197,56967-2,66556i$ | $0,00066$ |
| ... | ... | ... | ... |
| 20 | $3951,18622-2,66640i$ | $3951,18641-2,66633i$ | $0,00020$ |
| 21 | $4355,83991-2,66642i$ | $4355,84007-2,66636i$ | $0,00018$ |
| 22 | $4780,23281-2,66644i$ | $4780,23296-2,66639i$ | $0,00016$ |
| 23 | $5224,36493-2,66646i$ | $5224,36507-2,66641i$ | $0,00015$ |
| 24 | $5688,23627-2,66648i$ | $5688,23640-2,66644i$ | $0,00014$ |
| 25 | $6171,84683-2,66649i$ | $6171,84695-2,66645i$ | $0,00013$ |
| 26 | $6675,19660-2,66651i$ | $6675,19671-2,66647i$ | $0,00012$ |
| 27 | $7198,28559-2,66652i$ | $7198,28569-2,66648i$ | $0,00011$ |
| 28 | $7741,11359-2,66653i$ | $7741,11389-2,66650i$ | $0,00010$ |
| 29 | $8303,68121-2,66754i$ | $8303,68130-2,66650i$ | $0,00011$ |
| 30 | $8885,98783-2,66655i$ | $8885,98793-2,66651i$ | $0,00010$ |
| 31 | $9488,03367-2,66656i$ | $9488,03607-2,66573i$ | $0,00254$ |

В табл. 1 приведен пример численных расчетов собственных значений задачи (11) при $a=0$, $b=1$, $\alpha=Pi/5$, $\gamma=Pi/7$, $p(s)=s^2+5s+1+(s^2-3)i$, $k=\overline{1,31}$. Расчеты проводились при условии, что $\widetilde{\beta}_k(n)-\widetilde{\beta}_k(n-1)=0$ для $k,n=\overline{1,31}$.

Из табл. 1 видно, что при увеличении порядкового номера $k$ приближенных собственных значений соответствующие величины $\lvert\widetilde{\beta}_k(31)-\widehat{\beta}_k(31)\rvert$ уменьшаются. Исключение составляет последняя строка ($k=31$). Если найти $\widehat{\beta}_{31}(61)$, то

$|\widetilde{\beta}_{31}(31)-\widehat{\beta}_{31}(61)|=0,00009$. Следовательно, увеличение значения $|\widetilde{\beta}_{31}(31)-\widehat{\beta}_{31}(31)|$ связано с погрешностями возникающими при применении метода Бубнова — Галеркина.

Проведенные многочисленные расчеты для различных значений параметров $a$, $b$, $c$, $d,\alpha$, $\beta$, $p(s)$ спектральной задачи (11) показали высокую точность и вычислительную эффективность полученных формул (8).

Изменим правую часть уравнения (11) и восстановим приближенные значения функции $p(s)$ в узловых точках $\{s_k\}_{k=1}^n$, $n=31$. В табл. 2 приведен пример расчетов при $a=0$, $b=1$, $\alpha=Pi/5$, $\gamma=Pi/7$, $\widetilde{f}(x_k)=\widetilde{\beta}_k-\mu_k-2-3i$, $k=\overline{1,31}$.

Таблица 2

| $k$ | $s_k$ | $\widetilde{p}(s_k)$ | $\zeta(s_k)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,00 | $-0,325-6,291i$ | 0,000017 |
| 2 | 0,03 | $-0,315-6,283i$ | 0,000082 |
| 3 | 0,07 | $-0,295-6,288i$ | 0,000020 |
| 4 | 0,10 | $-0,269-6,265i$ | 0,000057 |
| 5 | 0,13 | $-0,223-6,274i$ | 0,000021 |
| 6 | 0,17 | $-0,189-6,238i$ | 0,000085 |
| 7 | 0,20 | $-0,077-6,203i$ | 0,000062 |
| 8 | 0,23 | $0,063-6,160i$ | 0,000072 |
| 9 | 0,27 | $0,227-6,111i$ | 0,000055 |
| 10 | 0,30 | $0,413-6,055i$ | 0,000047 |
| 11 | 0,33 | $0,617-5,996i$ | 0,000094 |
| ... | ... | ... | |
| 21 | 0,67 | $2,949-5,344i$ | 0,000086 |
| 22 | 0,70 | $3,150-5,290i$ | 0,000022 |
| 23 | 0,73 | $3,400-5,240i$ | 0,000064 |
| 24 | 0,77 | $3,515-5,194i$ | 0,000081 |
| 25 | 0,80 | $3,677-5,153i$ | 0,000053 |
| 26 | 0,83 | $3,825-5,116i$ | 0,000003 |
| 27 | 0,87 | $3,960-5,083i$ | 0,000083 |
| 28 | 0,90 | $4,082-5,054i$ | 0,000018 |
| 29 | 0,93 | $4,192-5,028i$ | 0,000079 |
| 30 | 0,97 | $4,292-5,005i$ | 0,000008 |
| 31 | 1,00 | $4,364-4,991i$ | 0,000090 |

Здесь $\widetilde{p}(s_k)$ — приближенные значения функции $p(s)$ в узловых точках $s_k$.

Величины $\zeta_k=|\widetilde{f}(x_k)-\int_a^b K(x_k,s)\widetilde{p}(s)ds|$ определяют поточечную абсолютную погрешность решения. Невязка приближенного решения $\widetilde{p}(s_k)$, равна $||A\widetilde{p}-\widetilde{f}||=$ $=0,000094$. Параметр регуляризации $\alpha$ при численном решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода (11) методом регуляризации Тихонова вычислялся с помощью метода невязки. В нашем случае $\alpha=0,0000075$.

Значения поточечной абсолютной погрешности $\zeta_k$ и невязки $||A\widetilde{p}-\widetilde{f}||$ позволяют сделать вывод о хорошей точности нахождения приближенных значений функции $p(s)$ в узловых точках дискретизации $s_k$.

## Заключение

В работе разработан численный метод решения обратных спектральных задач для возмущенных самосопряженных операторов. Найдены простые формулы для вычисления собственных значений дискретных операторов. Результаты многочисленных расчетов показали вычислительную эффективность метода.

## Литература

[1] Кадченко С.И. Метод регуляризованных следов // Вестник Южно-Урал. гос. ун-та. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2009. № 37(170). Вып. 4. С. 4–23.

[2] Кадченко С.И., Рязанова Л.С. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов // Вестник Южно-Урал. гос. ун-та. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2011. № 17(234). Вып. 8. С. 46–51.

[3] Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Дрофа, 2004.

[4] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 510 с.

[5] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 659 с.

[6] Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1989. 156 с.

Поступила в редакцию $15/IX/2013$;
в окончательном варианте — $15/IX/2013$.

## NUMERICAL METHOD FOR SOLVING INVERSE SPECTRAL PROBLEMS GENERATED BY PERTURBED SELF-ADJOINT OPERATORS

 S.I. Kadchenko[2]

A new numerical method for solving inverse spectral problems generated by perturbed self-adjoint operators from their spectral characteristics is developed. The method was tested on the problems for perturbed Sturm – Liouville operator. The results of numerous calculations have shown its computational efficiency. The simple algebraic formulas for finding the eigenvalues of discrete operators was found. At that the calculation of eigenvalues of perturbed self-adjoint operator can start from any number, no matter known the eigenvalues from previous numbers or not.

**Key words:** discrete operators, self-adjoint operators, eigenvalues, eigenfunctions, inverse spectral problems, Fredholm integral equation of the first kind, improperly posed problems, Sturm – Liouville problem.

Paper received $15/IX/2013$.
Paper accepted $15/IX/2013$.

[2]Kadchenko Sergey Ivanovich (`kadchenko@masu.ru`), the Dept. of Mathematical Physics Equations, South-Ural State University, Chelyabinsk, 454080, Russian Federation.