

ОБ ОЦЕНКЕ РАЗМЕРА ЗОНЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹

© 2013 С.В. Пикулин²

В данной работе уточняется оценка размера зоны локализации носителя решения задачи Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения с измеримыми коэффициентами при росте константы, ограничивающей решение на границе области.

Ключевые слова: свободная граница, мертвая зона, локализация носителя решения, полулинейное эллиптическое уравнение, задача Дирихле, обобщенное решение.

Введение

Эффект "мертвой зоны" заключается в том, что решение дифференциального уравнения обращается в нуль на некотором непустом открытом подмножестве области определения. Например, для обыкновенного дифференциального уравнения $u'' - u^\sigma = 0$, $\sigma \in (0, 1)$ "мертвая зона" его решения

$$u(t) = \begin{cases} C t^{\frac{2}{1-\sigma}}, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{где } C = \left(\frac{2(1+\sigma)}{(1-\sigma)^2} \right)^{-\frac{1}{1-\sigma}} > 0,$$

есть луч $\{t \leq 0\}$. Решение полулинейного эллиптического уравнения вида

$$\Delta u - u^\sigma = 0 \tag{1}$$

может иметь "мертвую зону" при $\sigma \in (0, 1)$, тогда как при $\sigma \geq 1$ выполняется так называемый сильный принцип максимума [1; 2]: решение, равное нулю на непустом открытом множестве, должно быть тождественно нулевым.

Вопрос о наличии "мертвых зон" у решений полулинейных эллиптических и параболических уравнений представляет не только теоретический интерес, но мотивирован также приложениями к химической технологии [3; 4], биологии, физике. Краткий обзор таких приложений со ссылками на литературу можно найти в книге [5]. Изучению условий возникновения "мертвых зон", описанию геометрических свойств их границ, оценкам размеров зоны локализации носителя решения посвящено немало литературы. Отметим монографии [5–7], работы [2; 8; 9], а также

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00923) и программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

²Пикулин Сергей Владимирович (spikulin@gmail.com), сектор аналитико-численных методов, ВЦ РАН, 119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, 40.

статьи [10–13], в которых изучались полулинейные эллиптические уравнения и неравенства с измеримыми коэффициентами.

В данной работе рассматривается задача Дирихле для полулинейного уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x) |u|^{\sigma-1} u = 0 \quad (2)$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Коэффициент $a(x)$ — измеримая функция в Ω , причем $a(x) \geq a_0 = \text{const} > 0$, функции $a_{ij} \equiv a_{ji} \in L_\infty(\Omega)$ удовлетворяют условию равномерной эллиптичности: для некоторого $\lambda \geq 1$ (константы эллиптичности) и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\lambda^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2. \quad (3)$$

Известно [5], что если оператором в главной части уравнения (2) является лапласиан, то носитель решения сосредоточен в окрестности границы, размер R которой пропорционален степени константы M , ограничивающей по модулю решение на границе области

$$R \leq c M^{(1-\sigma)/2}. \quad (4)$$

В этом случае носитель решения, определенного во внешности компакта и ограниченного сверху, имеет конечные размеры в \mathbb{R}^n , то есть верен принцип компактности носителя. Выполнение этого принципа для определенного класса квазилинейных эллиптических уравнений показано в работе [2], в [13] рассмотрены условия выполнения принципа компактности для некоторых полулинейных эллиптических неравенств с измеримыми коэффициентами.

Теорема 1 настоящей работы утверждает справедливость оценки вида (4) размера носителя решения для общего случая дивергентного равномерно эллиптического оператора с измеримыми коэффициентами в главной части уравнения. Этот результат фактически был установлен, хотя и не сформулирован явно, в работе [14]. Основной результат настоящей работы (теорема 2) гласит, что показатель степени, с которой M входит в оценку размера носителя, может быть уменьшен до $(1-\sigma)/(n-(n-2)\sigma)$ при достаточно больших M и $n \geq 3$. Ключевую роль в рассуждениях играют результаты работ [14; 15]. Отметим, что применение аналогичных методов для уравнения (2) при $\sigma > 1$ позволило получить теоремы типа осреднения [16]. Результаты данной работы анонсированы в [17].

Основные обозначения:

Ω — область в \mathbb{R}^n с границей $\partial\Omega$;

$\text{mes } Q$ — мера Лебега множества $Q \subset \mathbb{R}^n$;

$L \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$ — линейный равномерно эллиптический оператор с измеримыми коэффициентами;

$B(x_0, R)$ — шар в \mathbb{R}^n с центром в x_0 радиуса R ;

$W_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций класса $L_2(\Omega)$, которые обладают обобщенными частными производными также из $L_2(\Omega)$, снабженное нормой $\|\cdot\|; W_2^1(\Omega)\|$:

$$\|u; W_2^1(\Omega)\|^2 \equiv \|u; L_2(\Omega)\|^2 + \sum_{i=1}^n \|\partial u / \partial x_i; L_2(\Omega)\|^2. \quad (5)$$

◦

$W_2^1(\Omega)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|; W_2^1(\Omega)\|$;

$W_{2,loc}^1(\Omega)$ — пространство таких функций u в Ω , что $(u|_Q) \in W_2^1(Q)$ для любой ограниченной подобласти $Q \subset \Omega$.

1. Задача Дирихле в ограниченной области

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — ограниченная область, удовлетворяющая следующему условию регулярности границы (*условие (А)*, [18]): существуют числа $r_0 > 0$, $\theta_0 \in (0, 1)$ такие, что для любой точки $x_0 \in \partial\Omega$ и $r \in (0, r_0)$ справедливо соотношение $\text{mes}(\Omega \cap B(x_0, r)) \leq \theta_0 \text{mes} B(x_0, r)$. Данному условию удовлетворяют, в частности, все ограниченные липшицевы области.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} Lu - a(x) |u|^{\sigma-1} u = 0 & \text{в } \Omega, \\ u = \varphi & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

для уравнения вида (2), где $\varphi \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $\sigma \in (0, 1)$, и выполняются указанные выше условия на коэффициенты $a(x), a_{ij}(x)$.

Определение 1. Функция $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ называется (обобщенным)

решением задачи (6), если справедливо включение $(u - \varphi) \in W_2^1(\Omega)$ и для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx + \int_\Omega a(x) |u|^{\sigma-1} u \psi dx = 0. \quad (7)$$

Известно [18], что обобщенное решение задачи (6) существует, единственно, непрерывно по Гельдеру внутри Ω и удовлетворяет (слабому) принципу максимума.

Пусть $\Gamma \subset \partial\Omega$ — такое замкнутое множество, что $\varphi = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$ и $|\varphi| \leq M = \text{const}$ на Γ . Это означает, что функция φ может быть аппроксимирована в норме пространства $W_2^1(\Omega)$ функциями из класса $C^\infty(\Omega)$, равными нулю в окрестности $\partial\Omega \setminus \Gamma$ и ограниченными по модулю числом M .

Теорема 1. Существует константа $c_1 > 0$, зависящая только от n, σ, λ, a_0 , такая, что $u = 0$ в Ω_0 , где

$$\Omega_0 := \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \Gamma) > c_1 M^{\frac{1-\sigma}{2}} \right\}. \quad (8)$$

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующего результата.

Теорема 1' ([14]). Пусть $u \in W_2^1(Q) \cap L_\infty(Q)$ — обобщенное решение уравнения (2) в области $Q \subset B(x_0, r)$ при $\sigma \in (0, 1)$, удовлетворяющее условию $u = 0$ на $\partial Q \cap B(x_0, r)$. Существует такое число $c'_1 > 0$, зависящее только от n, σ, λ и a_0 , что если $|u| \leq c'_1 r^{\frac{2}{1-\sigma}}$ на ∂Q , то $u(x_0) = 0$.

Замечание. Доказательство [14] теоремы 1' основано на аппроксимации обобщенного решения из класса $W_2^1(\Omega)$ решениями уравнений с гладкими коэффициентами. Выполнение условия (А) является достаточным для того, чтобы последовательность приближенных решений сходилась равномерно в Ω .

Доказательство теоремы 1. В силу принципа максимума $|u(x)| \leq M$ при $x \in \Omega$. Положим

$$R := (M/c'_1)^{\frac{1-\sigma}{2}} \equiv c_1 M^{\frac{1-\sigma}{2}},$$

где $c_1 = c'_1{}^{-\frac{2}{1-\sigma}}$, c'_1 — то же, что в теореме 1'.

Пусть $x_0 \in \Omega$ — такая точка, что $\text{dist}(x_0, \Gamma) > R$. Тогда к компоненте связности Q множества $(B(x_0, R) \cap \Omega)$, содержащей x_0 , применима теорема 1'. Следовательно, $u(x_0) = 0$. Теорема доказана.

2. Принцип компактности и размер носителя

Рассмотрим область (возможно, неограниченную) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, удовлетворяющую условию (А). Решение $u \in W_{2,loc}^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ задачи (6) в этом случае определяется так же, как и для ограниченной области (определение 1). Сохраним предположения предыдущего пункта: для замкнутого подмножества $\Gamma \subset \partial\Omega$ выполняются соотношения

$$|\varphi| \leq M \text{ на } \Gamma, \quad \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma. \quad (9)$$

Если участок Γ конечен, то из теоремы 1 следует, что носитель ограниченного решения компактен, и размер этого носителя есть величина порядка $O(M^{(1-\sigma)/2})$ при $M \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область (возможно, неограниченная), $n \geq 3$, $u \in W_{2,loc}^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ — решение задачи (6), выполнены соотношения (9), причем $\Gamma \subset B(0, d)$, $d > 0$.

Тогда существует такое число $c_2 > 0$, зависящее только от n, σ, λ, a_0 , что $(\text{supp } u) \subset B(0, R)$, где

$$R = \max \left\{ \alpha d; c_2 d^{1/\alpha} M^\gamma \right\},$$

$$\gamma = \frac{1-\sigma}{n-(n-2)\sigma} < \frac{1-\sigma}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{(n-2)\gamma} > 1.$$

Для доказательства теоремы потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Принцип максимума [15; 18]. Пусть $u \in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет условиям $Lu \geq 0$ в Ω , $u \leq 0$ на $\partial\Omega$. Тогда $u \leq 0$ в Ω .

Лемма 1. В условиях теоремы 2 справедлива оценка

$$|u(x)| \leq \beta M (|x|/d)^{2-n}, \quad x \in \Omega \setminus B(0, d),$$

где $\beta = \text{const} \geq 1$ зависит только от n и λ .

Доказательство. Согласно [15], существует положительное фундаментальное решение $G(x; y)$ оператора L с особенностью в точке $y \in \Omega$, причем для некоторого $\beta_1 \geq 1$, зависящего только от n, λ , выполняются оценки

$$\beta_1^{-1} |x-y|^{2-n} \leq G(x; y) \leq \beta_1 |x-y|^{2-n}, \quad x \in \Omega.$$

Зафиксируем произвольное число $\rho \geq d$. Положим

$$\Omega(\rho) := \Omega \setminus \overline{B(0, \rho)}, \quad \beta := \beta_1^2, \quad M_1 = M_1(\rho) := \beta M (\rho/d)^{2-n}.$$

Покажем, что

$$|u(x)| \leq M_1 \text{ при } x \in \Omega(\rho). \quad (10)$$

Предположим противное: пусть $x_0 \in \Omega(\rho)$ — такая точка, что $|u(x_0)| > M_1$. Без ограничения общности можно считать, что

$$u(x_0) > M_1, \quad (11)$$

поскольку функция $(-u)$ является решением уравнения и удовлетворяет условиям (9).

Положим $g(x) := G(x; 0)$. Пользуясь монотонным убыванием функции r^{2-n} при $r > 0$, получим

$$g(x_0) \leq \beta_1 \rho^{2-n}, \quad (12)$$

$$g(x) \geq \beta_1^{-1} d^{2-n}, \quad x \in \partial B(0, d). \quad (13)$$

Положим

$$h(x) := M_1 \frac{g(x)}{g(x_0)} > 0, \quad x \in \Omega(d). \quad (14)$$

Из (12), (13), с учетом (10) получаем

$$h(x) > M_1 \beta_1^{-2} d^{2-n} / \rho^{2-n} = M \quad \text{при } x \in \partial B(0, d), \quad (15)$$

$$h(x_0) = M_1 > 0. \quad (16)$$

Положим $v(x) := u(x) - h(x)$. Из (14)–(16) и (9) следует, что

$$v < 0 \quad \text{на } \partial\Omega(d), \quad (17)$$

$$v(x_0) = u(x_0) - M_1 > 0.$$

Пусть D — компонента связности множества $\{x \in \Omega : v(x) > 0\}$, содержащая x_0 . Пользуясь тем, что $Lh = 0$ в D , $u(x) > h(x) > 0$ при $x \in D$, покажем, что $Lv > 0$ в D :

$$Lv = Lu = u^\sigma > 0 \quad \text{в } D. \quad (18)$$

Из (17) следует, что $v \leq 0$ на ∂D . С учетом (18) это противоречит принципу максимума для функции v в D . Следовательно, предположение (11) неверно, что доказывает (10). Лемма доказана.

Лемма 2. Минимальное значение функции $f(\rho) = \rho + \epsilon(\rho/d)^{-k}$ на луче $\{\rho : \rho \geq d > 0\}$, где $\epsilon, d, k > 0$ — константы, равно

$$f_{\min} = \begin{cases} (1+k^{-1}) (\epsilon k)^{\frac{1}{k+1}} d^{\frac{k}{k+1}}, & \text{если } d \leq (\epsilon k), \\ d + \epsilon, & \text{если } d > (\epsilon k). \end{cases}$$

Доказательство. Вычислим и приравняем нулю производную $f(\rho)$:

$$f'(\rho) = 1 - \epsilon k (\rho/d)^{-k-1} / d, \quad 1 = \epsilon k (\rho_0/d)^{-k-1} / d, \\ \rho_0/d = (d/\epsilon k)^{-\frac{1}{k+1}}. \quad (19)$$

Найдем значение $f(x)$ в точке экстремума:

$$f(\rho_0) = d (d/\epsilon k)^{-\frac{1}{k+1}} + \epsilon (d/\epsilon k)^{\frac{k}{k+1}} = \epsilon^{\frac{1}{k+1}} d^{\frac{k}{k+1}} \left(k^{\frac{1}{k+1}} + k^{-\frac{k}{k+1}} \right). \quad (20)$$

Если $\rho_0 \geq d$, то $f_{\min} = f(\rho_0)$, в противном случае $f_{\min} = f(d) = d + \epsilon$. Условие $\rho_0 \geq d$ в силу (19) эквивалентно $d \leq (\epsilon k)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\rho \geq d$. Согласно лемме 1, справедливо неравенство

$$|u(x)| \leq \beta M (\rho/d)^{2-n} \quad \text{при } x \in \Omega(\rho).$$

Применяя теорему 1 к решению $u(x)$ в $\Omega(\rho)$, найдем, что $u = 0$ на множестве $\Omega(R(\rho))$, где

$$R(\rho) = \rho + c_1 \left(\beta M \left(\frac{\rho}{d} \right)^{2-n} \right)^{\frac{1-\sigma}{2}}.$$

Минимизируем функцию $R = R(\rho)$ на луче $\{\rho : \rho \geq d\}$ с помощью леммы 2 при следующих значениях параметров:

$$k = \frac{(n-2)(1-\sigma)}{2}, \quad \epsilon = c_1 (\beta M)^{\frac{1-\sigma}{2}}.$$

Предположим, $(\epsilon k) \geq d$. Минимум функции $R(\rho)$ достигается в этом случае при $\rho > d$:

$$R_{\min} = (1 + k^{-1}) (\epsilon k)^{\frac{1}{k+1}} d^{\frac{k}{k+1}} = \alpha (\epsilon k)^{\frac{2\gamma}{1-\sigma}} d^{1/\alpha} = c_2 M^\gamma d^{1/\alpha},$$

где $c_2 = \alpha \beta^\gamma (c_1 k)^{\frac{2\gamma}{1-\sigma}}$. При $(\epsilon k) < d$ имеем $R_{\min} = d + \epsilon < d(1 + k^{-1}) = \alpha d$. Теорема доказана.

Литература

- [1] Vázquez J.L. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations // Appl Math Optim. 1984. V. 12. № 3. P. 191–202.
- [2] Pucci P., Serrin J. The strong maximum principle revisited // J. Differential Equations. 2004. V. 196. P. 1–66.
- [3] Aris R. The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts. Oxford: Carleton Press, 1975.
- [4] Bandle C., Sperb R. P., Stakgold I. Diffusion and reaction with monotone kinetics // Nonlinear Anal. 1984. V. 8. № 4. P. 321–333.
- [5] Diaz J.I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries. V. 1: Elliptic equations. Research Notes in Mathematics, V. 106. Boston: Pitman, 1985.
- [6] Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S.I. Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and Fluid Mechanics // Series Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. V. 48. Boston: Birkhäuser, 2002.
- [7] Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский [и др.]. М.: Наука, 1987.
- [8] Diaz J.I., Herrero M.A. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and a parabolic problems // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 89-A. 1981. P. 249–258.
- [9] Антонцев С.Н., Шмарев С.И. О локализации решений эллиптических уравнений с неоднородным анизотропным вырождением // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46. № 5. С. 963–984.
- [10] Landis E. M. Some properties of the solution of degenerating semilinear elliptic inequalities // Russian J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 4. P. 483–494.
- [11] Ландис Е.М. О "мертвой зоне" для полулинейных вырождающихся эллиптических неравенств // Дифф. уравнения. 1993. Т. 29. № 3. С. 414–423.
- [12] Туваев М.В. Теорема о "мертвой зоне" для слабо вырожденного квазилинейного эллиптического уравнения // Диф. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 349–352.
- [13] Kon'kov A.A. Positive Solutions of Nonlinear Second-Order Elliptic Inequalities in Unbounded Domains // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 1. P. 119–122.

- [14] Кондратьев В.А., Ландис Е.М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сборник. 1988. Т. 135(177), № 3. С. 346–360.
- [15] Littmann W., Stampacchia G., Weinberger H. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). 1963. V. 17. № 1–2. P. 43–77.
- [16] Матевосян О.А., Пикулин С.В. Об усреднении полулинейных эллиптических операторов в перфорированных областях // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 3. С. 101–114.
- [17] Pikulin S.V. Behavior of solutions of semilinear elliptic equations in domains with complicated boundary // Russian J. Math. Phys. 2012. V. 19. № 3. P. 401–404.
- [18] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 30/IX/2013;
в окончательном варианте — 30/IX/2013.

ON ESTIMATE OF SIZE OF LOCALIZATION ZONE OF CARRIER OF SOLUTION TO A SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION

© 2013 S.V. Pikulin³

In this paper an estimate of size of localization zone of carrier of solution to the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation with measurable coefficients when the constant which limits the boundary conditions grows is defined more exactly.

Key words: free boundary, dead space, localization of carrier of solution, semilinear elliptic equation, Dirichlet problem, generalized solution.

Paper received 30/IX/2013.
Paper accepted 30/IX/2013.

³Pikulin Sergey Vladimirovich (spikulin@gmail.com), the Dept. of Analytical and Numerical Methods, Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, 119333, Russian Federation.