УДК 517.925+531.01

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ

© 2013 Н.В. Походня[1], М.В. Шамолин[2]

Изучаются некоторые общие условия интегрируемости в элементарных функциях для систем на касательных расслоениях двумерной сферы. При этом приводится интересный пример трехмерного фазового портрета системы маятникового типа, которая описывает движение сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды. Приводятся достаточные условия существования первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, для многопараметрических систем третьего порядка.

Ключевые слова: динамическая система с переменной диссипацией, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

1. Предварительные сведения

Для начала в качестве важного примера рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\begin{array}{c} \ddot{\theta} + b\dot{\theta}\cos\theta + \sin\theta\cos\theta - \dot{\psi}^2 \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0, \\ \ddot{\psi} + b\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}\left[\frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right] = 0 \end{array} \tag{1.1}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\theta, \psi\}$. Данная система описывает сферический маятник, помещенный в поток набегающей среды (см. также [1–3]. При этом в системе присутствует консервативный момент

$$\sin\theta\cos\theta, \tag{1.2}$$

а также момент силы, линейным образом зависящий от скорости с переменным коэффициентом:

$$b\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}\cos\theta. \tag{1.3}$$

Оставшиеся коэффициенты в уравнениях являются коэффициентами связности, а именно:

$$\Gamma^{\theta}_{\psi\psi} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \ \ \Gamma^{\psi}_{\theta\psi} = \frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}. \tag{1.4}$$

[1]Походня Наталья Витальевна (`shamolin@rambler.ru`), кафедра математики и физики Московского государственного гуманитарного университета им. М.А. Шолохова, 109240, Российская Федерация, г. Москва, ул. Верхняя Радищевская, 16–18.

[2]Шамолин Максим Владимирович (`shamolin@imec.msu.ru`), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

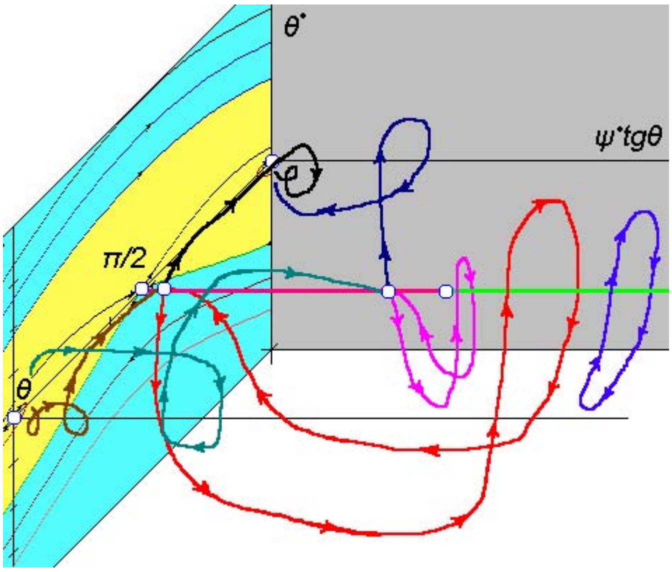

Рис. Относительно грубый фазовый портрет в трехмерной области

Система (1.1) фактически имеет порядок 3, поскольку переменная ψ является циклической, при этом в систему входит лишь производная $\dot{\psi}$.

Предложение 1. *Уравнение*

$$\dot{\psi} = 0 \tag{1.5}$$

задает семейство интегральных плоскостей для системы (1.1).

Более того, уравнение (1.5) редуцирует систему (1.1) к уравнению, описывающему цилиндрический маятник, находящийся в потоке набегающей среды (см. также [4]).

Предложение 2. *Система* (1.1) *эквивалентна следующей системе:*

$$\begin{gathered} \dot{\theta} = -z_2 + b\sin\theta, \\ \dot{z_2} = \sin\theta\cos\theta - z_1^2\tfrac{\cos\theta}{\sin\theta}, \\ \dot{z_1} = z_1 z_2 \tfrac{\cos\theta}{\sin\theta}, \\ \dot{\psi} = z_1\tfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{gathered} \tag{1.6}$$

на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_1, z_2, \theta, \psi\}$ *двумерной сферы* $\mathbf{S}^2\{\theta, \psi\}$.

Отделение четвертого уравнения системы (1.6) также произошло по причине цикличности переменной ψ.

О построении фазового портрета системы (1.1), изображенного на рисунке, см. [5; 6].

Пример 1. Исследуем систему, возникающую в пространственной ($3D-$) динамике твердого тела, взаимодействующего со средой (см. также [7; 8]):

$$\begin{gathered} \dot{\alpha} = -z_2 + b(z_1^2 + z_2^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \\ \dot{z_2} = \sin\alpha\cos\alpha + bz_2(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha - bz_2\sin^2\alpha\cos\alpha - z_1^2\tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot{z_1} = bz_1(z_1^2 + z_2^2)\cos\alpha - bz_1\sin^2\alpha\cos\alpha + z_1 z_2\tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

которая соответствует следующей системе с алгебраической правой частью:

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bz_2(z_1^2+z_2^2) - bz_2\tau^2 - z_1^2/\tau}{-z_2 + b\tau(z_1^2+z_2^2) + b\tau(1-\tau^2)}, \\ \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{bz_1(z_1^2+z_2^2) - bz_1\tau^2 + z_1 z_2/\tau}{-z_2 + b\tau(z_1^2+z_2^2) + b\tau(1-\tau^2)}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Итак, мы по-прежнему рассматриваем пару систем: первоначальную систему (1.7) и соответствующую ей алгебраическую систему (1.8).

Аналогичным образом производится переход к однородным координатам u_k, $k = 1, 2$ по формулам

$$z_k = u_k \tau. \tag{1.9}$$

Система (1.8) приводится с помощью замены (1.9) к виду

$$\begin{aligned} \tau \tfrac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \tfrac{\tau + bu_2\tau^3(u_1^2+u_2^2) - bu_2\tau^3 - u_1^2\tau}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2)}, \\ \tau \tfrac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \tfrac{bu_1\tau^3(u_1^2+u_2^2) - bu_1\tau^3 + u_1u_2\tau}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2+u_2^2) + b\tau(1-\tau^2)}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

который, в свою очередь, соответствует уравнению

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}. \tag{1.11}$$

Данное уравнение интегрируется в элементарных функциях, поскольку интегрируется тождество

$$d\left(\frac{1 - bu_2 + u_2^2}{u_1}\right) + du_1 = 0, \tag{1.12}$$

и имеет в координатах (τ, z_1, z_2) первый интеграл следующего вида (ср. с [9; 10]):

$$\frac{z_1^2 + z_2^2 - \beta z_2\tau + \tau^2}{z_1\tau} = \text{const}.$$

2. Некоторые обобщения

Зададим вопрос: каковы возможности интегрирования в элементарных функциях следующей системы более общего вида, включающей в себя рассмотренные выше системы, в трехмерных фазовых областях:

$$\begin{aligned} \tfrac{dz}{dx} &= \tfrac{ax+by+cz+c_1z^2/x+c_2zy/x+c_3y^2/x}{d_1x+ey+fz}, \\ \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{gx+hy+iz+i_1z^2/x+i_2zy/x+i_3y^2/x}{d_1x+ey+fz}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

имеющей особенность типа $1/x$?

Ранее уже был получен ряд результатов по данному вопросу (см. также [9]). Приведем краткое резюме по данным результатам, а также дополним материал оригинальными рассуждениями.

Вводя, как и ранее, подстановки

$$y = ux, \;\; z = vx, \tag{2.2}$$

получим, что система (2.1) приводится к следующей системе:

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{ax + bux + cvx + c_1v^2x + c_2vux + c_3u^2x}{d_1x + eux + fvx}, \tag{2.3}$$

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{gx + hux + ivx + i_1v^2x + i_2vux + i_3u^2x}{d_1x + eux + fvx}, \tag{2.4}$$

эквивалентной

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{ax + bux + (c - d_1)vx + (c_1 - f)v^2x + (c_2 - e)vux + c_3u^2x}{d_1x + eux + fvx}, \tag{2.5}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{gx + (h - d_1)ux + ivx + i_1v^2x + (i_2 - f)vux + (i_3 - e)u^2x}{d_1x + eux + fvx}, \tag{2.6}$$

которой сопоставим следующее неавтономное уравнение с алгебраической правой частью:

$$\frac{dv}{du} = \frac{a + bu + cv + c_1v^2 + c_2vu + c_3u^2 - v[d_1 + eu + fv]}{g + hu + iv + i_1v^2 + i_2vu + i_3u^2 - u[d_1 + eu + fv]}. \quad (2.7)$$

Интегрирование последнего уравнения сводится к интегрированию уравнения в полных дифференциалах:

$$[g + hu + iv + i_1v^2 + i_2vu + i_3u^2 - d_1u - eu^2 - fuv]dv =$$
$$= [a + bu + cv + c_1v^2 + c_2vu + c_3u^2 - d_1v - euv - fv^2]du. \quad (2.8)$$

Имеем, вообще говоря, 15-параметрическое семейство уравнений вида (2.8). Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества как однородного уравнения достаточно наложить 6 соотношений:

$$g = 0,\ \ i = 0,\ \ i_1 = 0,\ \ e = c_2,\ \ h = c,\ \ i_2 = 2c_1 - f. \quad (2.9)$$

Введем 9 параметров $\beta_1, \ldots, \beta_9$ и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\begin{gathered} \beta_1 = a,\ \ \beta_2 = b,\ \ \beta_3 = c,\ \ \beta_4 = c_1,\ \ \beta_5 = c_2, \\ \beta_6 = c_3,\ \ \beta_7 = d_1,\ \ \beta_8 = f,\ \ \beta_9 = i_3. \end{gathered} \quad (2.10)$$

Таким образом, уравнение (2.8) при выполнении групп условий (2.9), (2.10) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_1 + \beta_2u + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_8)v^2 + \beta_6u^2}{(\beta_3 - \beta_7)u + 2(\beta_4 - \beta_8)vu + (\beta_9 - \beta_5)u^2}, \quad (2.11)$$

а система (2.5), (2.6), соответственно, к виду

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{\beta_1 + \beta_2u + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_8)v^2 + \beta_6u^2}{\beta_7 + \beta_5u + \beta_8v}, \quad (2.12)$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{(\beta_3 - \beta_7)u + 2(\beta_4 - \beta_8)vu + (\beta_9 - \beta_5)u^2}{\beta_7 + \beta_5u + \beta_8v}, \quad (2.13)$$

после чего уравнение (2.11) интегрируется через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, интегрируя тождество (2.8), получаем следующее соотношение:

$$d\left[\frac{(\beta_3 - \beta_7)v}{u}\right] + d\left[\frac{(\beta_4 - \beta_8)v^2}{u}\right] + d[(\beta_9 - \beta_5)v] + d\left[\frac{\beta_1}{u}\right] -$$
$$-d[\beta_2 \ln|u|] - d[\beta_6u] = 0, \quad (2.14)$$

которое для начала позволяет получить инвариантное соотношение:

$$\frac{(\beta_3 - \beta_7)v}{u} + \frac{(\beta_4 - \beta_8)v^2}{u} + (\beta_9 - \beta_5)v + \frac{\beta_1}{u} -$$
$$-\beta_2 \ln|u| - \beta_6u = C_1 = \text{const}, \quad (2.15)$$

а затем в координатах (x, y, z) — первый интеграл в виде:

$$\frac{(\beta_4 - \beta_8)z^2 - \beta_6y^2 + (\beta_3 - \beta_7)zx + (\beta_9 - \beta_5)zy + \beta_1x^2}{yx} -$$
$$-\beta_2 \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \text{const}. \quad (2.16)$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы третьего порядка, зависящей от 9 параметров:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z+\beta_4 z^2/x+\beta_5 zy/x+\beta_6 y^2/x}{\beta_7 x+\beta_5 y+\beta_8 z}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\beta_3 y+(2\beta_4-\beta_8)zy/x+\beta_9 y^2/x}{\beta_7 x+\beta_5 y+\beta_8 z}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Следствие. Система третьего порядка на множестве

$$\mathbf{S}^1\{\alpha \mathrm{mod} 2\pi\}\backslash\{\alpha=0, \alpha=\pi\}\times\mathbf{R}^2\{z_1,z_2\}, \tag{2.18}$$

зависящая от 9 параметров

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= \beta_7\sin\alpha+\beta_5 z_1+\beta_8 z_2, \\ \dot z_2 &= \beta_1\sin\alpha\cos\alpha+\beta_2 z_1\cos\alpha+\beta_3 z_2\cos\alpha+ \\ &+\beta_4 z_2^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\beta_5 z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\beta_6 z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ \dot z_1 &= \beta_3 z_1\cos\alpha+(2\beta_4-\beta_8)z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\beta_9 z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

обладает, вообще говоря, трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$\frac{(\beta_4-\beta_8)z_2^2-\beta_6 z_1^2+(\beta_3-\beta_7)z_2\sin\alpha+(\beta_9-\beta_5)z_2 z_1+\beta_1\sin^2\alpha^2}{z_1\sin\alpha}-$$

$$-\beta_2\ln\left|\frac{z_1}{\sin\alpha}\right|=\mathrm{const}. \tag{2.20}$$

В частности, система (2.19) при $\beta_1=1$, $\beta_2=\beta_3=\beta_4=\beta_5=\beta_9=0$, $\beta_6= =\beta_8=-1$, $\beta_7=b$ имеет вид системы, составленной из первых трех уравнений формулы (1.6).

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (2.1) используется найденный первый интеграл (2.16), выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

Преобразуем для начала соотношение (2.15) следующим образом:

$$(\beta_4-\beta_8)v^2+[(\beta_9-\beta_5)u+(\beta_3-\beta_7)]\,v+f_1(u)=0, \tag{2.21}$$

где

$$f_1(u)=\beta_1-\beta_6 u^2-\beta_2 u\ln|u|-C_1 u.$$

При этом формально величину v можно найти из равенства

$$v_{1,2}(u)=\frac{1}{2(\beta_4-\beta_8)}\left\{(\beta_5-\beta_9)u+(\beta_7-\beta_3)\pm\sqrt{f_2(u)}\right\}, \tag{2.22}$$

где

$$f_2(u)=A_1+A_2 u+A_3 u^2+A_4 u\ln|u|,$$

$$A_1=(\beta_3-\beta_7)^2-4\beta_1(\beta_4-\beta_8),\ \ A_2=2(\beta_9-\beta_5)(\beta_3-\beta_7)+4C_1(\beta_4-\beta_8),$$

$$A_3=(\beta_9-\beta_5)^2+4\beta_6(\beta_4-\beta_8),\ \ A_4=4\beta_2(\beta_4-\beta_8).$$

Тогда искомая квадратура для поиска дополнительного, вообще говоря, трансцендентного первого интеграла (например, системы (2.12), (2.13) или (2.5), (2.6), при этом используется уравнение (2.13)) примет следующий вид:

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{[\beta_7+\beta_5 u+\beta_8 v_{1,2}(u)]du}{(\beta_3-\beta_7)u+(\beta_9-\beta_5)u^2+2(\beta_4-\beta_8)uv_{1,2}(u)}=$$

$$=\int\frac{[B_1+B_2 u+B_3\sqrt{f_2(u)}]du}{B_4 u\sqrt{f_2(u)}}, \tag{2.23}$$

$$B_k = \mathrm{const}, \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Искомая же квадратура для поиска дополнительного, вообще говоря, трансцендентного первого интеграла (например, системы (2.12), (2.13) или (2.5), (2.6), когда при этом используется уравнение (2.12)) примет следующий вид:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{[\beta_7 + \beta_5 u(v) + \beta_8 v]dv}{\beta_1 + \beta_2 u(v) + (\beta_3 - \beta_7)v + (\beta_4 - \beta_8)v^2 + \beta_6 u^2(v)}, \tag{2.24}$$

при этом функция $u(v)$ должна быть получена в результате разрешения неявного уравнения (2.15) относительно u (что в общем случае не всегда очевидно).

Достаточные условия выражения интегралов в (2.24) через конечную комбинацию элементарных функций дает следующая

Теорема 1. *При* $A_4 = 0$, *т. е. при*

$$\beta_2 = 0 \tag{2.25}$$

или при

$$\beta_4 = \beta_8 \tag{2.26}$$

неопределенный интеграл в (2.24) *выражается через конечную комбинацию элементарных функций.*

Следствие. *Система* (2.19) *при выполнении достаточных условий теоремы 1 (в данном случае выполнено свойство* (2.25)*), обладает полным набором первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.*

Рассматриваемые в данной работе динамические системы относятся к системам с переменной диссипацией с нулевым средним по имеющейся периодической координате [9]. Более того, такие системы часто обладают полным списком первых интегралов, выражающихся через элементарные функции.

Метод приведения исходных систем уравнений с правыми частями, содержащими полиномы от тригонометрических функций, к системам с полиномиальными правыми частями позволяет искать (или же доказывать их отсутствие) первые интегралы для систем более общего вида, а не только тех, которые обладают указанными симметриями (см. также [10; 11]).

Литература

[1] Шамолин М.В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. №1. С. 52–58.

[2] Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН. 1996. Т. 349. №2. С. 193–197.

[3] Шамолин М.В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. №4. С. 57–69.

[4] Шамолин М.В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. 1999. Т. 364. №5. С. 627–629.

[5] Шамолин М.В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. Вып. 3. С. 177–178.

[6] Шамолин М.В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. матем. и механ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 40–49.

[7] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // Journal of Mathematical Sciences. 2003. V. 114. №1. P. 919–975.

[8] Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. 2000. Т. 375. №3. С. 343–346.

[9] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // Journal of Mathematical Sciences. 2004. V. 122. №1. P. 2841–2915.

[10] Шамолин М.В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbb{R}^n$ // Успехи матем. наук. 2005. Т. 60. Вып. 6. С. 233–234.

[11] Походня Н.В., Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2012. № 9(100). С. 136–150.

Поступила в редакцию 18/*XI*/2013;
в окончательном варианте — 19/*XII*/2013.

CERTAIN CONDITIONS OF INTEGRABILITY OF DYNAMICAL SYSTEMS IN TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

© 2013 N.V. Pokhodnya,[3] M.V. Shamolin[4]

Certain general conditions of integrability in elementary functions for the systems on the tangent bundle of two-dimensional sphere are studied. At that an interesting example of three-dimensional phase pattern of pendulum-like system which describes the motion of spherical pendulum, placed in an over-run medium flow. Sufficient conditions of existence of the first integrals expressed through the finite combination of elementary functions, for multi-parametric third order systems are presented.

Key words: variable dissipation dynamic system, integrability, transcendental first integral.

Paper received 18/*XI*/2013.
Paper accepted 19/*XII*/2013.

[3]Pokhodnya Natalya Vitalievna (`shamolin@rambler.ru`), the Dept. of Mathematics and Physics, Sholokhov Moscow State University for the Humanities, Moscow, 109240, Russian Federation.

[4]Shamolin Maxim Vladimirovich (`shamolin@imec.msu.ru`), Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119899, Russian Federation.