УДК 517.986.22

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СВОБОДА ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ НОРМИРОВАННЫХ МОДУЛЕЙ

© 2013 С.М. Штейнер[1]

В работе рассматриваются вопросы, связанные с понятием топологической проективности. Показано, что такой тип проективности является частным случаем некоторой общекатегорной схемы, основанной на понятии оснащенной категории. Кроме того, описаны топологически свободные "классические" и квантовые нормированные модули. Аналогичные результаты получены для топологической инъективности.

Ключевые слова: топологическая свобода, топологическая косвобода, полулинейное нормированное пространство, квантовое нормированное пространство.

1. Классический случай

1.1. Категория полулинейных нормированных пространств

Определение 1.1.1. *Полулинейное пространство* V над полем K — это упорядоченная тройка $(V,\ K,\ \cdot)$, где

V — непустое множество, элементы которого называются *векторами*,

K — поле, элементы которого называются *скалярами*,

$\cdot : K \times V \to V$ — операция умножения векторов на скаляры, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x \ \forall \alpha,\ \beta \in K,\ x \in V$;

2) $1 \cdot x = x \ \forall x \in V$;

3) существует *нулевой* элемент $\theta \in V$ такой, что $0 \cdot x = \theta \ \forall x \in V$.

Пример 1.1.2. Рассмотрим букет пространств $\bigvee\{K_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, где K_λ представляют собой экземпляры поля K, пересекающиеся друг с другом по нулю, Λ — непустое множество, а умножение наследуется из поля. Аксиомы 1–3 легко проверяются. Такое полулинейное пространство будем обозначать K^Λ. Под $K^\emptyset$ будем понимать полулинейное пространство, состоящее из единственного элемента θ.

Определение 1.1.3. Отображение $\varphi : V \to W$ между полулинейными пространствами V и W называется *полулинейным оператором*, если $\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x)$ $\forall \alpha \in K,\ x \in V$.

Рассмотрим категорию Lin_0^K, объектами которой являются полулинейные пространства над полем K, а морфизмами — полулинейные операторы. Нетрудно получить полную классификацию объектов этой категории.

[1]Штейнер Сергей Михайлович (shteynerserg@yandex.ru), кафедра теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1.

Предложение 1.1.4. Всякое полулинейное пространство изоморфно в Lin_0^K пространству K^Λ для некоторого Λ.

Доказательство. Разобьем все ненулевые векторы полулинейного пространства на классы эквивалентности по отношению $\sim$: $x \sim y \iff \exists \alpha \in K,\ x = \alpha \cdot y$, $\alpha \neq 0$. Дальнейшее очевидно.

Определение 1.1.5. *Полулинейным нормированным пространством* называется пара $(V,\ \|\cdot\|\ )$, где

V — полулинейное пространство на полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел,

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ — отображение, которое мы будем называть нормой, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha|\|x\|$.

Пример 1.1.6. Введем норму на полулинейном пространстве $\mathbb{C}^\Lambda$, унаследовав стандартную норму пространства $\mathbb{C}$.

Определение 1.1.7. Пусть $C \in \mathbb{R}_+$. Полулинейный оператор $\varphi : V \to W$ между полулинейными нормированными пространствами V и W называется *C-ограниченным*, если $\|\varphi(x)\| \leqslant C\|x\|\ \forall x \in V$.

Определение 1.1.8. Полулинейный оператор $\varphi : V \to W$ между полулинейными нормированными пространствами V и W называется *ограниченным*, если он C-ограничен для некоторого $C \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь категорию Nor_0, объектами которой являются полулинейные нормированные пространства, а морфизмами — ограниченные полулинейные операторы. Нетрудно получить полную классификацию объектов и этой категории.

Предложение 1.1.9. Всякое полулинейное нормированное пространство в Nor_0 изоморфно пространству $\mathbb{C}^\Lambda$ для некоторого Λ.

1.2. Топологически свободные модули

Все необходимые определения, связанные с общекатегорным подходом к проективности, можно найти в работе [1].

Определение 1.2.1. Пусть A — произвольная нормированная алгебра. Нормированный A-модуль P называется *топологически проективным*, если для всякой пары нормированных A-модулей X, Y, ограниченного морфизма A-модулей $\varphi : P \to X$ и открытого ограниченного морфизма A-модулей $\tau : Y \to X$ существует ограниченный морфизм A-модулей $\psi : P \to Y$ такой, что $\varphi = \tau\psi$. В частности, мы вправе говорить о *топологически проективных* нормированных пространствах (как модулях над $\mathbb{C}$).

Определение 1.2.2. Пусть $C \in \mathbb{R}_+$. Ограниченный оператор φ между нормированными пространствами X и Y называется *C-открытым*, если $\forall y \in Y\ \exists x \in X :$ $\varphi(x) = y$ и $\|x\| \leqslant C\|y\|$.

Рассмотрим забывающий функтор $\square_0 : Nor \to Nor_0$, действующий очевидным образом (то есть забывающий про аддитивную структуру). Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующее

Предложение 1.2.3. Ограниченный оператор φ является C-открытым тогда и только тогда, когда $\Box_0(\varphi)$ обладает C-ограниченным правым обратным.

Доказательство. Пусть $\Box_0(\varphi)$ обладает C-ограниченным правым обратным, то есть существует ограниченный полулинейный оператор $\psi : \Box_0(Y) \to \Box_0(X)$, такой что $\Box_0(\varphi)\psi = 1_Y$. Покажем, что φ C-открыт. Действительно, $\|\psi(y)\| \leqslant C\|y\|$ $\forall y \in Y$. Осталось положить $x = \psi(y)$.

Пусть теперь φ C-открыт. Из каждого класса эквивалентности по отношению $\sim$ из предложения 1.1.4 выберем по вектору y единичной нормы, для каждого такого y построим x из определения 1.2.2, положим $\psi(y) = x$ и продолжим ψ по линейности; дальнейшее очевидно.

Пользуясь результатом [2, теорема 1.4.3], мгновенно получаем

Следствие 1.2.4. Допустимыми морфизмами для функтора $\Box_0$ являются в точности открытые отображения.

Предложение 1.2.5. Нормированное пространство является $\Box_0$-свободным с базой $\mathbb{C}^\Lambda$ тогда и только тогда, когда оно топологически изоморфно пространству $l_1^0(\Lambda)$ (то есть $c_{00}(\Lambda)$ с нормой, индуцированной из $l_1(\Lambda)$). Таким образом, оснащенная категория $(Nor,\ \Box_0)$ является свободолюбивой.

Доказательство. Пусть $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — канонический базис в $l_1^0(\Lambda)$. Положим $j(\mathbf{1}_\lambda) = e_\lambda$ (где $\mathbf{1}_\lambda$ — единица в $\mathbb{C}_\lambda$) и продолжим на все $\mathbb{C}^\Lambda$ по линейности. Ясно, что указанный морфизм является ограниченным. Возьмем произвольный ограниченный морфизм $\varphi : \mathbb{C}^\Lambda \to \Box_0(X)$, $\varphi(\mathbf{1}_\lambda) = x_\lambda$, $\|\varphi(e_\lambda)\| \leqslant C$. Нетрудно проверить, что существует единственный линейный оператор $\psi : l_1^0(\Lambda) \to X$ такой, что $\psi(e_\lambda) = x_\lambda$. Теперь заметим, что этот оператор ограничен: $\|\sum \alpha_\lambda x_\lambda\| \leqslant$ $\leqslant \sum |\alpha_\lambda|\|x_\lambda\| \leqslant C\sum|\alpha_\lambda| = C\|\sum \alpha_\lambda e_\lambda\|$, что и требовалось доказать.

Доказанное выше легко переносится и на модули. Сначала докажем следующее

Предложение 1.2.6. Пусть $\Box_{12} : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$, $\Box_{23} : \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_3$ — верные функторы. Обозначим $\Box_{13} = \Box_{23}\Box_{12}$. Пусть объект F_1 $\Box_{12}$-свободен с базой F_2 и универсальной стрелкой j_{12} в оснащенной категории $(\mathcal{K}_1, \Box_{12})$. Пусть в свою очередь объект F_2 $\Box_{23}$-свободен с базой F_3 и универсальной стрелкой j_{23} в оснащенной категории $(\mathcal{K}_2, \Box_{23})$. Тогда F_1 является $\Box_{13}$-свободным объектом с базой F_3 и универсальной стрелкой $\Box_{23}(j_{12})j_{23}$ в оснащенной категории $(\mathcal{K}_1, \Box_{13})$. Как следствие, если категории $(\mathcal{K}_1, \Box_{12})$ и $(\mathcal{K}_2, \Box_{23})$ свободолюбивы, то такова и категория $(\mathcal{K}_1, \Box_{13})$

Доказательство. Рассмотрим произвольный объект $X \in \mathcal{K}_1$ и морфизм $\varphi : F_3 \to \Box_{13}(X)$. Так как F_2 $\Box_{23}$-свободен, существует морфизм $\psi : F_2 \to \Box_{12}(X)$ такой, что $\varphi = \Box_{23}(\psi)j_{23}$. Далее, так как F_1 $\Box_{12}$-свободен, то существует морфизм $\chi : F_1 \to X$ такой, что $\psi = \Box_{12}(\chi)j_{12}$. Таким образом, $\varphi = \Box_{23}(\psi)j_{23} =$ $= \Box_{23}(\Box_{12}(\chi))\Box_{23}(j_{12})j_{23} = \Box_{13}(\chi)j_{13}$, где $j_{13} = \Box_{23}(j_{12})j_{23}$ — универсальная стрелка. Теперь докажем единственность морфизма χ. Предположим противное. Пусть найдутся два различных морфизма χ_1 и χ_2 таких, что $\varphi = \Box_{13}(\chi_1)j_{13} =$ $= \Box_{13}(\chi_2)j_{13}$. Тогда $\varphi = \Box_{23}(\Box_{12}(\chi_1)j_{12})j_{23} = \Box_{23}(\Box_{12}(\chi_2)j_{12})j_{23}$. Ясно, что морфизмы $\psi_1 = \Box_{12}(\chi_1)j_{12}$ и $\psi_2 = \Box_{12}(\chi_2)j_{12}$ различны. Получаем $\varphi = \Box_{23}(\psi_1)j_{23} =$ $= \Box_{23}(\psi_2)j_{23}$. Противоречие. Так как X и φ произвольны, то F_1 является $\Box_{13}$-свободным объектом с базой F_3.

Классической (так называемой относительной) проективности для модулей соответствует забывающий функтор $\Box_A : A\text{-}mod \to Nor$, действующий естественным образом. Легко понять, что топологической проективности для нормированных A-модулей соответствует композиция двух забывающих функторов $\Box_0\Box_A$.

Теорема 1.2.7. Нормированный A-модуль является $\Box_0\Box_A$-свободным с базой $\mathbb{C}^\Lambda$ тогда и только тогда, когда он топологически изоморфен A-модулю $A_+ \otimes_p l_1^0(\Lambda)$ (с естественной операцией внешнего умножения). Таким образом, оснащенная категория (A-mod, $\Box_0\Box_A$) является свободолюбивой.

Доказательство. Утверждение мгновенно следует из предложения 1.2.6.

Композицию $\Box_0\Box_A$ будем также обозначать $\Box_0$, что не вызовет путаницы. Условимся $\Box_0$-свободные модули называть *топологически свободными*.

Следствие 1.2.8. A-модуль P топологически проективен тогда и только тогда, когда он является ретрактом топологически свободного A-модуля (в категории A-mod).

1.3. Топологически косвободные модули

Определение 1.3.1. Пусть снова A — нормированная алгебра. Нормированный A-модуль J называется *топологически инъективным*, если для всякой пары нормированных A-модулей X, Y, ограниченного морфизма $\varphi : Y \to J$ и топологически инъективного морфизма $i : Y \to X$ левых A-модулей существует морфизм $\psi : X \to J$ такой, что $\varphi = \psi i$.

Рассмотрим забывающий функтор $\Box_0^* : A\text{-}mod \to Nor_0^o$ из категории A-модулей в категорию, дуальную категории полулинейных нормированных пространств, переводящий всякий модуль в его сопряженный. Допустимыми морфизмами при таком забвении будут в точности топологически инъективные морфизмы. Действительно, морфизм является топологически инъективным тогда и только тогда, когда его сопряженный сюръективен, а значит и топологически сюръективен [2, глава 2.5]. Но мы уже знаем, что при забывании в Nor_0 топологически сюръективные морфизмы, и только они, переходят в ретракции в Nor_0, а значит и в коретракции в Nor_0^o, откуда все следует. Опишем косвободные объекты в оснащенной категории (Nor, $\Box_0^*$). Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} A\text{-}mod^o \arrow[r, "\Box_0^{*o}"] \arrow[d, "*"'] & Nor_0 \arrow[d, "1"] \\ mod\text{-}A \arrow[r, "\Box_0"] & Nor_0 \end{tikzcd}$$

Верхняя стрелка соответствует функтору, описанному выше, но рассмотренному как функтор между дуальными категориями. Описание свободных объектов для такого функтора, очевидно, соответствует описанию косвободных для исходного. Так как функтор $*$ (и, разумеется, $\mathbf{1}$) самосопряжен, применяя теорему 1.2.7 и [1, предложение 4.5], немедленно получаем:

Теорема 1.3.2. A-модуль является $\Box_0^*$-косвободным с базой $\mathbb{C}^\Lambda$ тогда и только тогда, когда он топологически изоморфен модулю $B(A_+, l_\infty(\Lambda))$ (с естественной операцией внешнего умножения).

Условимся $\Box_0^*$-косвободные модули называть *топологически косвободными*.

Следствие 1.3.3. A-модуль J топологически инъективен тогда и только тогда, когда он является ретрактом топологически косвободного A-модуля (в категории A-mod).

2. Квантовый случай

2.1. Топологически свободные квантовые нормированные пространства

Мы переходим к изучению квантовых версий рассматриваемых понятий. В квантовом функциональном анализе приняты два равноправных подхода: матричный (см. [3]) и бескоординатный (см. [4]). Каждый раз мы будем использовать тот из них, который окажется более удобным в конкретной ситуации. Эквивалентность двух подходов показана в [5]. Итак, начнем с определения открытых морфизмов.

Определение 2.1.1. Пусть $C \in \mathbb{R}_+$. Вполне ограниченный оператор $\varphi : X \to Y$ между квантовыми нормированными пространствами X и Y называется *вполне C-открытым*, если все его размножения φ_n C-открыты.

Определение 2.1.2. Вполне ограниченный оператор $\varphi : X \to Y$ между квантовыми нормированными пространствами X и Y называется *вполне открытым*, если он является вполне C-открытым для некоторого $C \geqslant 0$.

Определение 2.1.3. Квантовое нормированное пространство P называется *топологически проективным*, если для всякой пары квантовых нормированных пространств X, Y, вполне ограниченного оператора $\varphi : P \to X$ и вполне открытого оператора $\tau : Y \to X$ существует вполне ограниченный оператор $\psi : P \to Y$ такой, что $\varphi = \tau\psi$.

Рассмотрим верный функтор

$$\square_0^Q : QNor \to Nor_0 : X \mapsto \bigoplus{}_\infty M_n(X) : n \in \mathbb{N}\} \quad \varphi \mapsto \bigoplus{}_\infty \{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\},$$

то есть квантовое нормированное пространство X отображается в $\bigoplus_\infty$-сумму своих размножений с забыванием аддитивной структуры.

Предложение 2.1.4. $\square_0^Q$-допустимыми эпиморфизмами являются в точности вполне открытые операторы.

Доказательство. Пусть $\varphi : X \to Y$ вполне открыт, то есть все его размножения φ_n C-открыты для некоторого $C \geqslant 0$. Тогда ясно, что каждый морфизм $\square_0(\varphi_n)$ обладает правым C-ограниченным полулинейным обратным ψ_n. Легко понять, что морфизм $\psi : \square_0^Q(Y) \to \square_0^Q(X)$, определяемый равенством $\psi(y_1, ..., y_n, ...) = (\psi^1(y_1), ..., \psi^n(y_n), ...)$, является C-ограниченным правым обратным к $\square_0^Q(\varphi)$.

Пусть теперь $\varphi : X \to Y$ таков, что $\square_0^Q(\varphi)$ обладает правым обратным, а значит C-ограниченным правым обратным для некоторого $C \geqslant 0$. Зададим морфизмы $\psi^n : \square_0(M_n(Y)) \to \square_0(M_n(X))$ равенством $\psi^n(x) = \square_0(p_n)\psi(\square_0(i_n)(x))$, где $p_n : \bigoplus_\infty M_k(X) \to M_n(X)$ — естественная проекция на n-ю координату, а $i_n : M_n(X) \to \bigoplus_\infty M_k(X)$ — естественное вложение. Нетрудно проверить, что всякое ψ^n является C-ограниченным правым обратным для φ^n. Дальше ясно.

Итак, рассмотренная выше оснащенная категория соответствует квантовой топологической проективности, поэтому $\square_0^Q$-свободные квантовые нормированные пространства будем называть *топологически свободными.* Напомним, что метрической проективности для квантовых нормированных пространств [1, определение 5.1] соответствует оснащенная категория с забывающим функтором $\square_1^Q$:

$QNor_1 \to Set$, сопоставляющим всякому квантовому нормированному пространству декартово произведение единичных шаров всех его этажей [1, определение 5.2]. В работе [1] $\square_1^Q$-свободные квантовые нормированные пространства называют *метрически свободными.* Сформулируем и докажем основное утверждение раздела.

Предложение 2.1.5. Пусть F — метрически свободное квантовое нормированное пространство с базой Λ. Тогда F является топологически свободным квантовым нормированным пространством с базой $\mathbb{C}^\Lambda$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму для метрической свободы:

$$\begin{tikzcd}
\square_1^Q(F) \arrow[dr, dashed, "\square_1^Q(\psi)"] & \\
\Lambda \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi"'] & \square_1^Q(X)
\end{tikzcd}$$

Определим полулинейный оператор $j' : \mathbb{C}^\Lambda \to \square_0^Q(F)$ соотношением $j'(\mathbf{1}_\lambda) = j(\lambda)$. Покажем, что морфизм j' является универсальной стрелкой для топологической свободы. Возьмем произвольный полулинейный оператор $\varphi : \mathbb{C}^\Lambda \to \square_0^Q(X)$, где X — произвольное квантовое нормированное пространство. Ясно, что для $\varphi/\|\varphi\|_{cb}$ существует морфизм $\psi^{'}$, делающий диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
\square_1^Q(F) \arrow[dr, dashed, "\square_1^Q(\psi^{'})"] & \\
\Lambda \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi/\|\varphi\|_{cb}"'] & \square_1^Q(Y)
\end{tikzcd}$$

Осталось рассмотреть морфизм $\|\varphi\|_{cb}\psi^{'}$.

Единственность ψ доказывается следующим образом. Пусть для морфизма φ есть два различных подходящих морфизма ψ_1 и ψ_2. Ясно, что морфизмы $\psi_1/\max\{\|\varphi\|_{cb}, \|\psi_1\|_{cb}, \|\psi_2\|_{cb}\}$ и $\psi_2/\max\{\|\varphi\|_{cb}, \|\psi_1\|_{cb}, \|\psi_2\|_{cb}\}$ подходят для следующей диаграммы, соответствующей квантовой метрической свободе:

$$\begin{tikzcd}
\square_1^Q(F) \arrow[dr, dashed, "?"] & \\
\Lambda \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi'"'] & \square_1^Q(X)
\end{tikzcd}$$

Здесь $\varphi' = \varphi/\max\{\|\varphi\|_{cb}, \|\psi_1\|_{cb}, \|\psi_2\|_{cb}\}$. Приходим к противоречию.

Оснащенная категория $(QNor, \square_1^Q)$ свободолюбива. Метрически свободным квантовым пространством с базой Λ является, с точностью до вполне изометрического изоморфизма, $\bigoplus_1^0$-сумма квантовых нормированных пространств $\mathcal{N}_\infty$, заиндексированных элементами Λ [1, теорема 5.9]. Используя результат предыдущего предложения, мгновенно получаем:

Предложение 2.1.6. Оснащенная категория $(QNor, \square_0^Q)$ свободолюбива. Квантовое нормированное пространство F является топологически свободным тогда и только тогда, когда оно вполне топологически изоморфно $\bigoplus_1^0$-сумме пространств $\mathcal{N}_\infty$, заиндексированных элементами некоторого множества Λ; базой такого свободного пространства будет нормированное полулинейное пространство $\mathbb{C}^\Lambda$.

Следствие 2.1.7. Квантовое нормированное пространство P топологически проективно тогда и только тогда, когда оно является ретрактом топологически свободного квантового нормированного пространства в категории $QNor$.

2.2. Топологически косвободные квантовые нормированные пространства

Определение 2.2.1. Вполне ограниченный оператор $\varphi : X \to Y$ между квантовыми нормированными пространствами называется *вполне топологически инъективным*, если $\exists C > 0\ \forall n \in N\ \forall x \in M_n(X)\ \ \|\varphi_n(x)\| \geqslant C\|x\|$.

В бескоординатной форме условие полной топологической инъективности допускает более простую формулировку: размножение оператора φ_∞ топологически инъективно. Ясно, что вполне ограниченный оператор вполне топологически инъективен тогда и только когда, когда он является композицией полного топологического изоморфизма и квантового вложения. Похожее утверждение справедливо и для вполне открытых операторов. Для его доказательства нам понадобится

Предложение 2.2.2. Пусть вполне открытый оператор φ представлен в виде композиции вполне коизометрического оператора и топологического изоморфизма. Тогда этот топологический изоморфизм является полным.

Доказательство. Итак, пусть $\varphi = \psi \circ pr : X \to Z$. Здесь оператор $pr : X \to Y$ является вполне коизометрическим, а $\psi : Y \to Z$ — топологическим изоморфизмом. Воспользуемся бескоординатным подходом. Проверим сначала, что ψ вполне ограничен. Действительно, $\forall \varepsilon > 0\ \forall y \in \mathcal{F}Y\ \ \exists x \in \mathcal{F}X$: $pr_\infty x = y$ и $\|y\| > \|x\| - \varepsilon$. Но тогда $\|\psi_\infty(y)\| = \|\varphi_\infty(x)\| \leqslant \|\varphi\|_\infty \|x\| \leqslant \|\varphi\|_\infty(\|y\| + \varepsilon)$, откуда все следует. Теперь убедимся, что вполне ограничен и оператор ψ^{-1}. Выберем произвольный $z \in \mathcal{F}Z$. Мы знаем о существовании такой константы $C > 0$, что всегда найдется $x \in \mathcal{F}X$: $\varphi_\infty(x) = z$ и $\|x\| \leqslant C\|z\|$. Но $\|\psi_\infty^{-1}(z)\| = \|pr_\infty(x)\| \leqslant \|x\| \leqslant C\|z\|$. Утверждение доказано.

Будучи открытым оператором между подлежащими пространствами, всякий вполне открытый оператор может быть представлен в виде композиции канонической проекции и топологического изоморфизма [2, предложение 1.5.4]. Поэтому справедливо

Предложение 2.2.3. Оператор вполне открыт тогда и только тогда, когда он является композицией естественной квантовой проекции и полного топологического изоморфизма.

Предложение 2.2.4. Сопряженный оператор φ^* вполне открыт тогда и только тогда, когда φ вполне топологически инъективен.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно: оператор, сопряженный к полной изометрии, — полная коизометрия [4, замечание 7.2.9], сопряженный к полному топологическому изоморфизму — полный топологический изоморфизм [4, предложение 7.2.7], и дальше работает предложение 2.2.3.

Обратно, $\varphi : X \to Z$ топологически инъективен как оператор между подлежащими пространствами [2, глава 2.5]. Но это значит, что он может быть представлен в виде композиции топологического изоморфизма $\psi : X \to Y$ и изометрического вложения $i : Y \to Z$. Квантуем Y так, чтобы это вложение стало вполне изометрическим (то есть рассматриваем Y как квантовое подпространство Z). Тогда $\varphi^* = \psi^* i^*$, причем i^* является вполне коизометрическим [4, замечанме 7.2.9], а ψ^* — топологическим изоморфизмом. Применив предложение 2.2.2, получим, что последний топологический изоморфизм является полным. Но, значит, и ψ является полным топологическим изоморфизмом (так как ψ^{**} вполне ограничен [4, предложение 7.2.7] и $\|\psi\|_\infty \leqslant \|\psi^{**}\|_\infty$, аналогично для ψ^{-1}). Утверждение полностью доказано.

Рассмотрим верный функтор $\square_0^{Q*} : QNor \to Nor_0^o$, $X \mapsto \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n(X^*)$. Из сказанного выше следует

Предложение 2.2.5. Допустимые морфизмы в оснащенной категории $(QNor,\ \square_0^{Q*})$ — это в точности вполне топологически инъективные операторы.

Далее, коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} QNor^o \arrow[r, "\square_0^{Q*o}"] \arrow[d, "*"'] & Nor_0 \arrow[d, "1"] \\ QNor \arrow[r, "\square_0^{Q}"] & Nor_0, \end{tikzcd}$$

где верхняя строчка отвечает за тип квантовой инъективности, который мы будем называть *топологическим*, а нижняя — за квантовую топологическую проективность, вместе с предложением [1, предложение 4.5] дает большой запас косвободных объектов (назовем их *топологически косвободными*) — это l_∞-суммы квантовых нормированных пространств $\mathcal{B}_\infty$, сопряженных к $\mathcal{N}_\infty$.

Теорема 2.2.6. Квантовое нормированное пространство является топологически косвободным тогда и только тогда, когда оно вполне топологически изоморфно l_∞-сумме пространств $\mathcal{B}_\infty$, заиндексированных элементами некоторого множества Λ.

Следствие 2.2.7. Квантовое нормированное пространство топологически инъективно тогда и только тогда, когда оно является ретрактом топологически косвободного квантового нормированного пространства в категории $QNor$.

Используя предложение 1.2.6, все полученные выше результаты можно легко обобщить с квантовых нормированных пространств на квантовые нормированные модули (см. [6]). Так, роль топологически свободных слабых (сильных) нормированных модулей над квантовой алгеброй A будут играть модули вида $A_+ \otimes_{op} F$ (соответственно, $A_+ \otimes_h F$), где F — топологически свободное квантовое нормированное пространство. Аналогично роль топологически косвободных слабых нормированных модулей над квантовой алгеброй A исполняют модули вида $\mathcal{CB}(A_+, F)$, где F — квантовое топологически косвободное нормированное пространство.

Литература

[1] Хелемский А.Я. Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 7. С. 127–158.

[2] Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.:МЦНМО, 2004.

[3] Blecher D.P., Le Merdy C. Operator algebras and their modules. Oxford: Clarendon Press, 2004.
[4] Хелемский А.Я. Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении. М.: МЦНМО, 2009.
[5] Pisier J. Introduction to operator space theory. Cambridge: Cam. Univ. Press, 2003.
[6] Хелемский А.Я. Проективные модули в классическом и квантовом функциональном анализе // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 7. С. 7–84.

Поступила в редакцию 18/*XI*/2013;
в окончательном варианте — 19/*XII*/2013.

TOPOLOGICAL FREEDOM FOR CLASSICAL AND QUANTUM NORMED MODULES

© 2013 S.M. Shteiner[2]

In the article questions, connected with the notion of topological projectivity are viewed. It is shown that this type of projectivity can be represented as a partial case of certain general-categorical scheme, based on a notion of framed category. Apart from that topologically free 'classical', as well as quantum normed modules are described. Analogous results were obtained for topological injectivity.

Key words: topological freedom, topological cofreedom, semilinear normed space, quantum normed space.

Paper received 18/*XI*/2013.
Paper accepted 19/*XII*/2013.

[2]Shteiner Sergey Mikhailovich (`shteynerserg@yandex.ru`), the Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation.