

ТОНКОСТЕННЫЕ ОБОЛОЧКИ С НЕСКВОЗНЫМИ ТРЕЩИНОВИДНЫМИ ДЕФЕКТАМИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ДАГДЕЙЛА

© 2013 А.С. Яковлев¹

В работе рассматривается определение области возможных предельных состояний тонкостенных оболочек из идеального упругопластичного материала с несквозным трещиновидным дефектом (царапиной). Рассматриваются области возможных предельных состояний для царапин переменной глубины. Приводится сопоставление экспериментальных и теоретических данных. Решается задача определения предельных размеров дефектов, которые при заданном уровне эксплуатационных нагрузок могут привести к катастрофическому разрушению всей конструкции.

Ключевые слова: тонкостенные оболочки, нагрузки, упругопластический материал, краевая задача, поверхностная трещина, сквозная трещина, модель Дагдейла, утечка перед разрушением.

На основании решения краевой задачи для поверхностной трещины (царапины) постоянной глубины в приближении Дагдейла [1] были установлены области предельных состояний тонкой пластины с такой царапиной и определена граница между ними. Однако в процессе эксплуатации на тонкостенные элементы конструкций действуют внешние нагрузки, циклически изменяющиеся около номинальных значений. Вследствие этого изначально прямолинейный фронт царапины искривляется и возникает усталостная царапина с переменной глубиной.

В случае плоского напряженного состояния можно считать, что длина царапины $2l$ много больше толщины пластины h ($2l \gg h$), и с достаточной степенью точности аппроксимировать глубину царапины кривой второго порядка:

$$z = b \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right), \quad |x| \leq l. \quad (1)$$

Тогда на контуре царапины $x \leq l$ будут действовать сжимающие усилия с интенсивностью

$$p(x) = -P + \sigma_s \left(1 - \frac{z}{h} \right), \quad (2)$$

а на берегах пластических зон $l \leq x \leq c$ — с интенсивностью $p(x) = \sigma_s$. Соответствующая краевая задача запишется следующим образом:

¹Яковлев Александр Степанович (Sash84_777@bk.ru), кафедра теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета (Национального исследовательского университета), 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34.

$$p(x) = \begin{cases} -P + \sigma_s \left(1 - \frac{b}{h} + \frac{b}{h} \cdot \frac{x^2}{l^2}\right), & |x| \leq l; \\ -P + \sigma_s, & l \leq |x| \leq c; \\ v(x) = 0, & |x| > c. \end{cases} \quad (3)$$

где P — внешняя нагрузка, $v(x)$ — раскрытие берегов царапины.

Очевидно, что к условиям (3) необходимо добавить условие, определяющее однозначность смещений:

$$\lim_{x \rightarrow c} v'(x) = 0. \quad (4)$$

Следуя результатам, полученным в задаче для царапины с постоянной глубиной, решение (3) запишется в виде

$$v(x) = -\frac{1}{\pi E} \left\{ (-P + \sigma_s) \int_{-c}^c \Gamma(c, x, \xi) d\xi - \sigma_s \frac{b}{h} \int_{-l}^l \Gamma(c, x, \xi) d\xi + \sigma_s \frac{b}{hl^2} \int_{-l}^l \Gamma(c, x, \xi) \cdot d\xi \right\}, \quad |x| \leq c. \quad (5)$$

Сделаем замену переменных $t = x/c$; $\varphi = \xi/c$; $\gamma = l/c$. Тогда:

$$v(t) = -\frac{\sigma_s l}{\pi E \gamma} \left\{ \left(1 - \frac{P}{\sigma_s}\right) \int_{-1}^1 \Gamma(1, t, \varphi) d\varphi - \frac{b}{h} \int_{-\gamma}^{\gamma} \Gamma(1, t, \varphi) d\varphi + \frac{b}{h\gamma^2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \varphi^2 \Gamma(1, t, \varphi) d\varphi \right\}, \quad |t| \leq 1. \quad (6)$$

Последний интеграл в этом выражении после интегрирования по частям сводится к табличным интегралам и берется в явном виде. Обозначим

$$J(t, \gamma) = \frac{1}{\gamma^2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \varphi^2 \Gamma(1, t, \varphi) d\varphi$$

и запишем уравнение (6) в виде

$$\frac{\pi E}{\sigma_s l} v(t) = - \left\{ \left(1 - \frac{P}{\sigma_s}\right) \int_{-1}^1 \Gamma(1, t, \varphi) d\varphi + \frac{b}{h} \left[J(t, \gamma) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \Gamma(1, t, \varphi) d\varphi \right] \right\}. \quad (7)$$

Взяв в (7) производную по t и приравняв ее нулю, получим выражение для определения неизвестного параметра γ :

$$\left(1 - \frac{P}{\sigma_s}\right) \int_{-1}^1 \frac{d}{dt} \Gamma(1, t, \varphi) d\varphi + \frac{b}{h} \left\{ \frac{d}{dt} J(t, \gamma) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{d}{dt} \Gamma(1, t, \varphi) d\varphi \right\} = 0. \quad (8)$$

Тогда предельное состояние для царапины (начальное состояние) определяется из условия $v(0) = v_*$ или

$$\frac{\pi E}{\sigma_s l} v_* = - \left\{ \left(1 - \frac{P}{\sigma_s}\right) \int_{-1}^1 \Gamma(1, 0, \varphi) d\varphi + \frac{b}{h} \left[J(0, \gamma) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \Gamma(1, 0, \varphi) d\varphi \right] \right\}. \quad (9)$$

Здесь v_* — предельное значение критического раскрытия берегов царапины.

Таким образом, уравнения (8) и (9) определяют начальное состояние пластины с царапиной переменной глубины. Конечное состояние определяется следующим выражением:

$$\gamma_k = \cos \frac{\pi P}{2 \sigma_s}. \quad (10)$$

На основании полученных результатов и при равенстве левых частей уравнений (9) и (10) строится вычислительная процедура. Численные результаты в виде зависимости представлены на рис. 1.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение полученных результатов для оценки несущей способности тонкостенного элемента конструкции. Пусть номинальная эксплуатационная нагрузка $P_0/\sigma_s = 0,4$, толщина элемента конструкции равна 1 мм. Материал — стареющий алюминиевый сплав Д16АТ, для которого параметр $\lambda = \sigma_T/E = 0,008$. Здесь E — модуль упругости. Необходимо сделать оценку критической длины повреждения, при котором наступает катастрофическое разрушение элемента конструкции. Примем, что предельная величина раскрытия v_* для Д16АТ равна 0,1 мм.

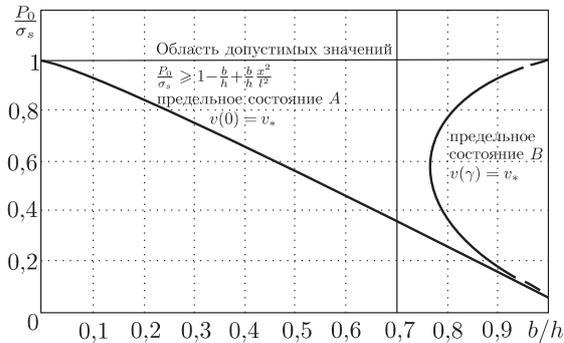


Рис. 1. Области определения предельного состояния пластины с царапиной: A — область разрушения, определяемая царапиной; B — область разрушения, определяемая трещиной

При анализе поставленной задачи возможны 2 случая: первый случай определяется возможностью оценки глубины несквозной трещины, во втором случае будем считать, что глубина неизвестна.

При известной глубине b/h по результатам, представленным на рис. 1, можно определить вид предельного состояния; пусть $b/h = 0,8$. В этом случае предельное состояние определяет сквозная трещина. По формулам для предельного состояния B определяем значение:

$$\gamma = \cos \frac{\pi P}{2 \sigma_s} = \cos 0,2\pi = 0,809.$$

Из формулы (10) определяем длину трещины, при которой наступает неустойчивое состояние элемента конструкции:

$$L = 2l = \frac{\pi v_*}{2\lambda \ln 1/\gamma_k} = 92,5 \text{ мм.}$$

Для второго случая принимаем запас несущей способности $b = h$ и проводим расчеты по формуле (10).

При введении замены переменных в уравнениях предельных состояний, полученных в [1]:

$$\frac{P_0}{\sigma_s} = y_0; \quad \frac{P_k}{\sigma_s} = y_k; \quad \frac{a}{h} = x; \quad \gamma_k = \cos \theta_k; \quad \gamma_0 = \cos \theta_0, \quad (11)$$

их можно преобразовать к следующему виду:

$$\arcsin \gamma_0 = \frac{\pi}{2} - \arccos \gamma_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0; \quad \delta_* = \frac{\pi \delta_c}{8\lambda l} = \frac{\pi I_c^2}{8\sigma_s^2 l}, \quad (12)$$

учитывая:

$$\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{1 - \sqrt{1 - \gamma_0^2}} = \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2})^2}{\gamma_0^2} = 2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{\gamma_0} = 2 \ln \frac{1 + \sin \theta_0}{\cos \theta_0}.$$

Тогда предельные кривые для поверхностной и сквозной трещины в безразмерных переменных можно записать в виде

$$1 - y_0 = x \left(1 - \frac{2}{\pi} \theta_0(x, \delta_*) \right),$$

где

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \frac{1 - e^{-\frac{\delta_*}{x}}}{1 + e^{-\frac{\delta_*}{x}}} = \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} \frac{\delta_*}{x} \right), \quad (13)$$

$$y_k = \frac{2}{\pi} \theta_k(\delta_*), \quad \cos \theta_k = e^{-\delta_*},$$

или

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_k}{2} = \frac{1 - e^{-\delta_*}}{1 + e^{-\delta_*}} = \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} \delta_* \right). \quad (14)$$

Графики функций $y_0(x, \delta_*)$ и $y_k(\delta_*)$ изображены на рис. 2

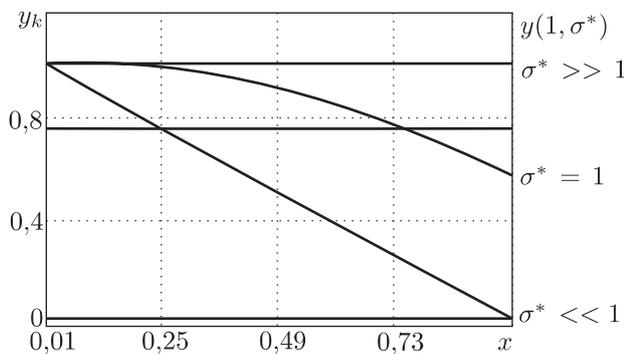


Рис. 2. Графики функций $y_0(x, \delta_*)$ и $y_k(\delta_*)$

Из соотношений (13) и (14) видно, что $y_0(1, \delta_*) = \frac{2}{\pi} \theta_0(1, \delta_*) < y_k(\delta_*) = \frac{2}{\pi} \theta_k(\delta_*)$, т. е. линия $y_0(x, \delta_*)$ при заданном δ_* обязательно пересечет линию $y_k(\delta_*)$ при каком-то \bar{x} :

$$1 - y_0(\bar{x}, \delta_*) = 1 - y_k(\bar{x}, \delta_*) \Rightarrow \bar{x} = \frac{1 - \frac{2}{\pi} \theta_k(\delta_k)}{1 - \frac{2}{\pi} \theta_k(\bar{x}, \delta_k)}. \quad (15)$$

Таким образом, при распространении полученных результатов с пластин на цилиндрические оболочки под внутренним давлением (с учетом поправки Фолиаса [2] на кривизну оболочки) можно сделать вывод, что при $x = a/h < \bar{x}$ проросшая на всю глубину поверхностная трещина далее не будет распространяться по всей длине стенки оболочки, находящейся под внутренним давлением (возникает "течь"), а при $x > \bar{x}$ продолжит свое развитие, что в итоге может привести к катастрофическому разрушению всей конструкции при напряжениях ниже предела текучести материала. Данное обстоятельство определяется критерием "утечка перед разрушением".

В трубопроводных системах наиболее часто встречаются несквозные поверхностные трещиноподобные дефекты, форма которых близка к полуэллиптической (рис. 3).

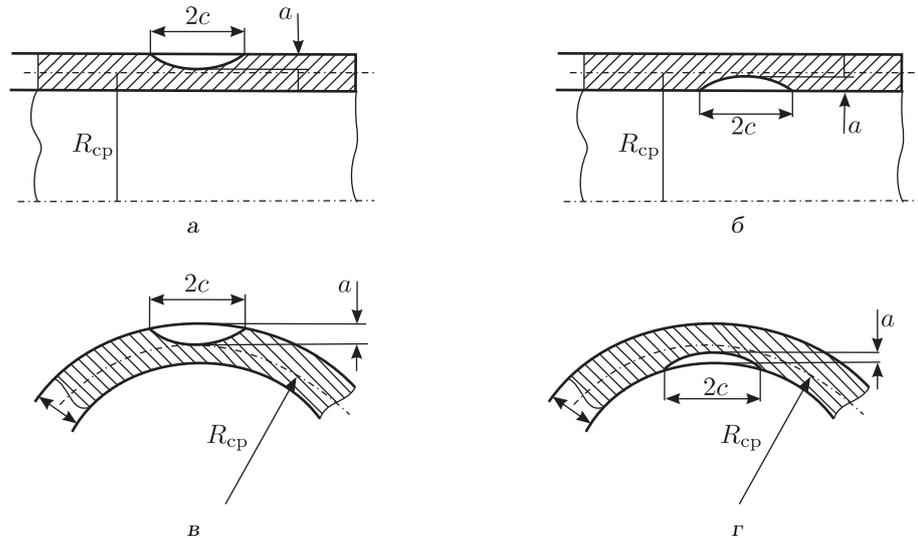


Рис. 3. Виды трещин в трубопроводах: а — осевая наружная трещина; б — осевая внутренняя трещина; в — окружная наружная трещина; г — окружная внутренняя трещина

Переход от пластин к оболочкам осуществляем с помощью следующего уравнения:

$$I = M_F \sigma \sqrt{\pi l} = \frac{pR}{h} \left[\left(1 + 1,61 \frac{l^2}{Rh} \right) \pi l \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

$$M_F = \sqrt{1 + 1,61 l^2 / (Rh)} \quad (17)$$

— поправка Фолиаса, где p — внутреннее давление в оболочке, R — радиус кривизны оболочки, l — длина трещины, h — толщина стенки оболочки.

Используя экспериментальные данные [3] испытаний труб диаметром 762 мм с толщиной стенки 9,5 мм при наличии поверхностных дефектов, полученные в работе (см. табл.), и перенося их на график, получим следующую картину.

Таблица

Экспериментальные данные А.Р. Даффи, Дж.М. Мак Клур и др.

Обозначение трубы	Длина трещины, мм (L)	Глубина трещины, мм (a)	Относительная глубина трещины ($x = a/h$)	Предел текучести (кг/мм^2) (σ_s)	P/σ_s	Интегральная безразмерная характеристика σ^*	Критерий
RR8	370,84	3,78	0,398	52,14	0,72	0,006	разрушение
	222,25		0,398		0,78	0,028	
	83,82		0,398		0,94	0,413	
RR5	369,82	5,69	0,599	50,17	0,50	0,007	
	219,2		0,599		0,57	0,031	
RR9	83,82		0,599	47,18	0,92	0,504	
RR7	370,84	7,72	0,813	49,66	0,22	0,007	
RR4	224,03		0,813	49,89	0,32	0,030	
RR7	86,36		0,813	50,66	0,77	0,405	
RR5	224,03	8,51	0,896	50,17	0,17	0,030	течь

Как видно из рис. 4, те значения функции, которые лежат выше кривой $\bar{x}(\delta)$, интерпретируются как "течь", т.е. поверхностная трещина проросла в сквозную и "остановилась" (есть время для оценки ситуации и принятия необходимых мер по восстановлению конструкции), а те значения функции, которые лежат ниже кривой, сигнализируют о том, что поверхностный дефект пророс в сквозной и продолжил рост на поверхности тонкостенной оболочки, что в результате привело к катастрофическому разрушению всей конструкции.

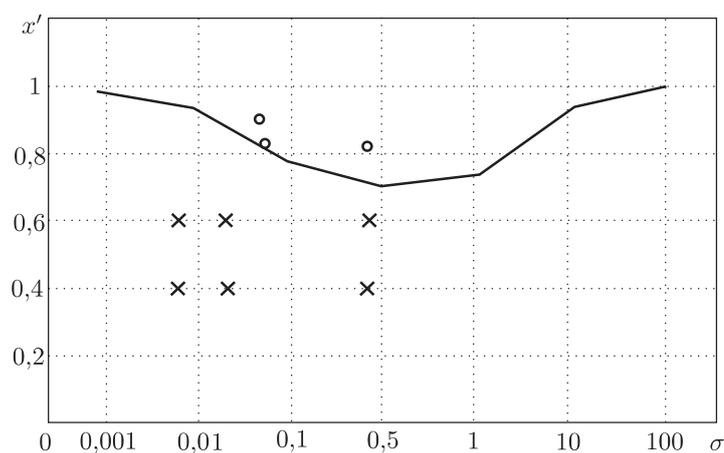


Рис. 4. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных: $x'(\sigma)$ — сплошная линия \times — разрушение, o — "течь"

Литература

- [1] Яковлев А.С. Оценка влияния несквозных трещин на прочность конструкций при проектировании летательных аппаратов // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2012. № 4(35). С. 193–196.

- [2] Folias E.S. A finite crack in a pressured cylindrical shell // *Int. J. Fract. Mech.* 1965. Vol. 1. P. 104–113.
- [3] Даффи А., Эйбер Р., Макси У. Практические примеры расчета на сопротивление хрупкому разрушению трубопроводов под давлением // *Разрушение. Расчет конструкций на хрупкую прочность*. Т. 5. М.: Машиностроение, 1977. С. 146–210

Поступила в редакцию 18/*XI*/2003;
в окончательном варианте — 19/*XII*/2003.

THIN-WALLED COVERS WITH SURFACE CRACK DEFECTS IN DUGDALE APPROXIMATION

© 2013 A.S. Yakovlev²

In the work definition of area of possible limiting conditions of thin-walled covers from an ideal elastoplastic material with not through blind fractured defect (scratch) is considered. Areas of possible limiting conditions for scratches of variable depth are considered. Comparison of experimental and theoretical data is given. The problem of determination of limiting extent of defects which at the set level of operational loadings can lead to catastrophic destruction of all construction is solved.

Key words: thin-walled covers, loadings, elastic-plastic material, boundary-value problem, surface crack, through crack, Dugdale model, leak before break.

Paper received 11/*VI*/2013.

Paper accepted 15/*VI*/2013.

²Yakovlev Alexander Stepanovich (sash84_777@bk.ru), the Dept. of Theoretical Mechanics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russian Federation.