УДК 517.938

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ МАЛЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2013 М.Г. Юмагулов[1] Д.А. Якшибаева[2]

В работе предлагается операторный метод для исследования эффекта возникновения малых автоколебаний в системах с последействием. Метод приводит к новым достаточным признакам бифуркации Андронова – Хопфа, а также позволяет получить приближенные формулы для возникающих решений. В качестве приложения рассмотрена задача о точках бифуркации уравнения Хатчинсона – Райта.

Ключевые слова: бифуркация, динамические системы, системы с запаздыванием, операторные уравнения, функционализация параметра, асимптотические формулы.

1. Постановка задачи

Многие теоретические и практические задачи приводят к дифференциальным уравнениям с последействием, в которых запаздывания зависят от некоторых параметров. В настоящей статье рассматривается функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_0^{r(\theta)} d_\tau Q(\tau,\theta)x(t-\tau) + \int\limits_0^{r(\theta)} d_\tau R(\tau,\theta)\Phi\left[\theta, x(t-\tau)\right] +$$
$$+\Psi\left[\theta, x(t), x(t-\upsilon_1(\theta)), ..., x(t-\upsilon_m(\theta))\right], \tag{1.1}$$

в котором значение r зависит от скалярного параметра θ. Здесь $r(\theta)$ положительная, непрерывно дифференцируемая функция, $\theta \in [a,b]$, $x \in R^N$, $0 \leqslant \upsilon_j(\theta) \leqslant r(\theta)$, $\upsilon_j(\theta)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, $j = 1,...,m$. $Q(t,\theta), R(t,\theta)$ — квадратные $N \times N$ матрицы, элементы которых при каждом θ являются функциями ограниченной вариации по t на любом конечном промежутке $[\alpha,\beta]$ и при каждом t непрерывно дифференцируемы по θ. Пусть $y = (y_1, y_2, ..., y_{m+1})$; предполагается, что вектор-функции $\Phi(\theta, x)$ и $\Psi(\theta, y)$ непре-

[1]Юмагулов Марат Гаязович (yum_mg@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета, 450008, Российская Федерация, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

[2]Якшибаева Дина Ахатовна (k_dina_a@mail.ru), кафедра прикладной математики и информационных технологий Сибайского института (филиала) Башкирского государственного университета, 453837, Российская Федерация, г. Сибай, ул. Белова, 21.

рывно дифференцируемы по совокупности переменных и равномерно по θ удовлетворяют условиям

$$\| \Phi(\theta, x) \| = O\left(\| x \|^2\right), \| x \| \to 0, \ \| \Psi(\theta, y) \| = O\left(\| y \|^2\right), \| y \| \to 0.$$

Здесь и всюду ниже через $\| \cdot \|$ обозначается евклидова норма векторов в пространствах R^N или R^{m+1}; интегралы в (1.1) понимаются в смысле Лебега – Стилтьеса. К уравнениям вида (1.1) могут быть сведены многие представляющие интерес уравнения с последействием (см., например, [1–4]).

Система (1.1) имеет решение $x(t) \equiv 0$ при всех значениях θ.

Вследствие изменения параметра θ у уравнения (1.1) могут возникать отличные от нулевого нестационарные периодические решения, имеющие малую амплитуду. В математической постановке такому явлению отвечает бифуркация Андронова – Хопфа [2]. Такая бифуркация хорошо изучена для систем, в которых запаздывание фиксированно, а параметры входят в коэффициенты уравнения. Меньше известно результатов для систем, когда параметром является значение запаздывания.

В настоящей работе приводятся новые достаточные признаки бифуркации Андронова – Хопфа для уравнения (1.1), позволяющие построить приближенные формулы для возникающих решений.

2. Переход к операторному уравнению

Наряду с (1.1) будем рассматривать линейное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_0^{r(\theta)} d_\tau Q(\tau, \theta) x(t - \tau),$$

а также соответствующий ему характеристический квазимногочлен

$$L(p, \theta) = \det\left(\int_0^{r(\theta)} d_\tau Q(\tau, \theta) e^{-p\tau} - pI\right).$$

Решение $x(t) = 0$ называют гиперболической точкой равновесия системы (1.1) при $\theta = \theta_0$, если квазимногочлен $L(p, \theta_0)$ не имеет чисто мнимых нулей. В противном случае $x = 0$ называют негиперболической точкой равновесия.

Пусть при некотором $\theta = \theta_0$ решение $x = 0$ является негиперболической точкой равновесия системы (1.1). В этом случае значение θ_0 называют точкой бифуркации уравнения (1.1).

Основные ситуации негиперболичности:

1^0. выполнено равенство $L(0, \theta_0) = 0$, и многочлен $L(p, \theta_0)$ не имеет других чисто мнимых корней,

2^0. при некотором $\omega_0 > 0$ выполнено равенство $L(\pm i\omega_0, \theta_0) = 0$, и многочлен $L(p, \theta_0)$ не имеет чисто мнимых корней вида $\pm k\omega_0 i$, где $k = 0, 2, 3, ...$

В настоящей работе изучается случай 2^0. Для $T > r(\theta_0)$ определим семейство матриц

$$V_k(T, \theta) = \frac{T}{2\pi k i} \int_0^{r(\theta)} \exp\left(-\frac{2\pi k i \tau}{T}\right) d_\tau Q(\tau, \theta), \quad k = \pm 1, \pm 2, ... \tag{2.1}$$

Простым подсчетом устанавливается, что верна

Лемма 1. Условие 2^0 равносильно тому, что, матрица $V_1(T_0,\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1, а матрицы $V_k(T_0,\theta_0), k=\pm 2,\pm 3,...$ не имеют собственного значения 1.

Рассматриваемый случай 2^0 приводит к бифуркации Андронова – Хопфа. Значение $\theta=\theta_0$ называют точкой бифуркации Андронова – Хопфа системы (1.1), если существуют $\theta_n\to\theta$ такие, что при $\theta=\theta_n$ уравнение (1.1) имеет нестационарное периодическое решение $x_n(t)$, причем $\max\limits_t\|x_n(t)\|\to 0$ при $n\to\infty$.

Отметим, что условие, указанное в случае 2^0 (или в лемме 1), еще не является достаточным признаком бифуркации Андронова – Хопфа. Достаточным признакам бифуркации посвящен ряд работ (см., например, [2; 3]). В настоящей работе предлагается использовать общий операторный метод исследования многопараметрических бифуркаций [5] позволяющий установить достаточные условия бифуркации Андронова – Хопфа. Указанный операторный метод позволяет получить и асимптотические формулы для бифурцирующих решений. Укажем основные этапы применения операторного метода.

На первом этапе осуществляется переход от уравнения (1.1) к операторному уравнению:

$$u(t)=B(T,\theta)u(t)+b(u(t),T,\theta), \tag{2.2}$$

где

$$B(T,\theta)u(t)=u(1)+T\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{r(\theta)}d_\tau Q(\tau,\theta)E\left(\frac{\tau}{T}\right)u(s)\right)ds\,,$$

$$b(u(t),T,\theta)=T\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{r(\theta)}d_\tau Q(\tau,\theta)E\left(\frac{\tau}{T}\right)\Phi\left[\theta,u(s)\right]\right)ds+$$

$$+T\int\limits_0^t\Psi\left[\theta,u(s),E\left(\frac{\vartheta_1}{T}\right)u(s),...,E\left(\frac{\vartheta_m}{T}\right)u(s)\right]ds\,;$$

здесь

$$E\left(\frac{\tau}{T}\right)u(s)=\begin{cases}u\left(s-\frac{\tau}{T}+1\right),0\leqslant s\leqslant\frac{\tau}{T},\\ \quad u\left(s-\frac{\tau}{T}\right),\frac{\tau}{T}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

Операторы $B(T,\theta)$ и $b(u(t),T,\theta)$ действуют и непрерывны в пространстве $L_2(0,1)$ при фиксированных θ и T.

Равенство $u(t)=x(t\cdot T)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между T-периодическими решениями $x(t)$ уравнения (1.1) и решениями $u(t)$ уравнения (2.2). Поэтому задача исследования T-периодических решений уравнения (1.1) равносильна задаче о решениях операторного уравнения (2.2).

Лемма 2. Если выполнено условие 2^0, то оператор $B(T_0,\theta_0)\,:\,L_2(0,1)\to L_2(0,1)$ имеет собственное значение 1 кратности 2.

Доказывается лемма несложными вычислениями. Отсюда $e(t)$ и $g(t)$ — линейно независимые функции оператора $B(T_0,\theta_0)$, соответствующие собственному значению 1. Сопряженный оператор $B^*(T_0,\theta_0)\,:\,L_2(0,1)\to L_2(0,1)$ также имеет собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собственные функции $e^*(t)$ и $g^*(t)$. Эти функции можно выбрать исходя из соотношений $(e,e^*)=(g,g^*)\neq 0$, $(e,g^*)=(g,e^*)=0$; здесь $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2(0,1)$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 2^0 и соотношение

$$\det\begin{bmatrix} (B'_\theta(T_0,\theta_0)e,e^*) & (B'_T(T_0,\theta_0)e,e^*) \\ (B'_\theta(T_0,\theta_0)e,g^*) & (B'_T(T_0,\theta_0)e,g^*) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{2.3}$$

Тогда значение θ_0 параметра θ является точкой бифуркации Андронова – Хопфа уравнения (1.1).

Здесь B'_θ и B'_T — операторы, полученные дифференцированием оператора $B(\theta,T)$ по θ и T соответственно.

3. Пример: исследование уравнения Хатчинсона – Райта

Данный пункт носит характер приложений приведенной выше схемы к исследованию следующей модификации уравнения Хатчинсона – Райта

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\pi}{2}x(t-\theta)[1+x(t)], \quad \theta \geqslant 0\,, \tag{3.1}$$

играющее важную роль в приложениях, в частности, при моделировании динамики биологических популяций [4].

В рассматриваемом примере имеем

$$r(\theta)=\theta\,, \quad Q(t,\theta) = -\frac{\pi}{2}H(t-\theta)\,,\ \text{где}\ H(t)\ \text{— функция Хевисайда}\,,$$

$$\Phi(\theta,x)=0, \quad \Psi\left[x(t),x(t-\upsilon_1(\theta))\right] = -\frac{\pi}{2}x(t)x(t-\theta)\,.$$

В рассматриваемом примере матрица (2.1) представляет собой скалярную функцию; тогда из леммы 1 получаем систему

$$\begin{cases} \int\limits_0^{\theta_0} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\tau\right) d_\tau H(\tau-\theta_0) = 0, \\ \int\limits_0^{\theta_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\tau\right) d_\tau H(\tau-\theta_0) = \frac{4}{T_0}, \end{cases}$$

которая имеет решение $\theta_0 = 1+4n$, $n \geqslant 0$, n — целое и $T_0 = 4$.

Для проверки указанного в теореме 1 достаточного условия, а также численного исследования бифуркации перейдем от (3.1) к операторному уравнению вида (2.2). Имеем:

$$B(T,\theta)u(t) = u(1) + T\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\theta \left(-\frac{\pi}{2}\right) E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s) d_\tau H(\tau-\theta)\right) ds,$$

$$b(u(t),T,\theta) = T\int\limits_0^t \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot u(s)\cdot E\left(\frac{\theta}{T}\right) u(s) ds.$$

Пусть $\theta_0 = 1$ и $T_0 = 4$. Тогда проверка соотношения (2.3) приводит к равенству

$$\det\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{16} \end{bmatrix} = \frac{\pi}{32}.$$

Таким образом, условия теоремы о бифуркации Андронова – Хопфа выполнены, и, следовательно, число $\theta_0 = 1$ является точкой бифуркации Андронова – Хопфа уравнения (3.1).

Применение схемы из [5] приводит к приближенным асимптотическим формулам:

$$\theta(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{10\pi} - \frac{1}{10} \right) + o(\varepsilon^3)\,, \quad T(\varepsilon) = 4 - \varepsilon^2 \frac{2}{5} + o(\varepsilon^3)\,,$$

$$y(t,\varepsilon) = \varepsilon \cos 2\pi t + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{5} \cos 4\pi t + \frac{1}{10} \sin 4\pi t \right) +$$

$$+\varepsilon^3 \left[\left(\frac{1}{5\pi} - \frac{1}{5} \right) \sin 2\pi t - \frac{4}{5} \cos 2\pi t + \frac{3}{40} \cos 6\pi t + \frac{3}{80} \sin 6\pi t \right] + o(\varepsilon^4),$$

где $\varepsilon \geqslant 0$ — вспомогательный малый параметр. Здесь $y(t) = x\,[t \cdot T(\varepsilon)]$.

Эти формулы означают, что при $\theta = \theta(\varepsilon)$ уравнение (3.1) имеет периодическое решение $x = x(t,\varepsilon)$.

Литература

[1] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.

[2] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

[3] Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.

[4] Малинецкий Г.Г. Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика. М.: Наука, 2000. 282 с.

[5] Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах / А.А. Вышинский [и др.] // Уфим. матем. журнал. 2010. Т. 2. №4. С. 3–26.

Поступила в редакцию 13/ V/2013;
в окончательном варианте — 13/ V/2013.

OPERATOR METHOD FOR THE STUDY OF SMALL OSCILLATIONS IN SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

© 2013 M.G. Yumagulov[3] D.A. Yakshibaeva[4]

This paper proposes operator method for the study of effect of appearence of small oscillations in systems with aftereffect.The method leads to new sufficient features of Andronov – Hopf bifurkation and allows to obtain approximate formulas for emerging decisions. As an application, we consider the problem of bifurcation points of Hutchinson – Wright equation.

Key words: bifurcation, dynamic systems, time-delay systems, operator equations, functionalization of parameter, asymptotic formulae.

Paper received 13/ V/2013;
Paper accepted 13/ V/2013.

[3]Yumagulov Marat Gayazovich (yum_mg@mail.ru), the Dept. of Differential Equations, Bashkir State University, Ufa, 450008, Russian Federation.

[4]Yakshibaeva Dina Akhatovna (k_dina_a@mail.ru), the Dept. of Applied Mathematics and Information Technology, Sibai Institute (branch) of Bashkir State University, Sibai, 453837, Russian Federation.