

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 519.681

*Е.Н. Барышева, В.Н. Никишов, А.Л. Сараев\**

## МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ

Фактическая динамика страховых показателей может значительно отличаться от теоретических результатов, получаемых на основе стандартных актуарных методов и моделей. В работе показано, что методы стохастической финансовой математики, применяемые для исследования показателей фондового рынка, и методы нелинейной динамики, применяемые для описания детерминированного хаоса, могут быть полезны для анализа динамических моделей страхования.

**Ключевые слова и фразы:** аппроксимация, перестрахование, убыток, убыточность, портфель рисков, гамма-распределение, предельное распределение.

### 1. Моделирование страхового фонда и его характеристика

При анализе страхового портфеля основной интерес представляет динамика страхового фонда  $u_t = u_0 + w_t - s_t$ , где  $u_0$  – начальный капитал;  $w_t$  – объем премии, поступившей к моменту времени  $t$ , и  $s_t$  – совокупный размер выплат к этому же моменту времени. Существует большое количество актуарных методов рассмотрения динамики  $u_t$ , с некоторыми из них можно ознакомиться в [1–3].

Изменение фонда подвержено влиянию множества факторов, так что несоответствие теоретической динамики с фактическими изменениями – скорее правило, чем исключение.

Логично дополнить анализ динамики страхового фонда методами финансового анализа поведения активов, где влияющих факторов и методов их учета не меньше.

---

\* © Барышева Е.Н., Никишов В.Н., Сараев А.Л., 2011

*Барышева Евгения Николаевна* (barisheva\_zh@hotmail.com), *Никишов Виктор Николаевич* (TSh-sea05@yandex.ru), *Сараев Александр Леонидович* (alex.saraev@gmail.com), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В связи с отсутствием фактического временного ряда достаточно длительной протяженности смоделируем динамику страхового фонда и предложим возможные методы его анализа на базе методов и моделей финансовой математики.

Рассмотрим коллективную модель страхования, в которой количество исков  $n(t)$ , поступивших к моменту времени  $t$ , задается распределением Пуассона (1):

$$P(n(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad (1)$$

Параметр процесса Пуассона  $\lambda$  считается заданным.

Капитал страховщика  $U(t)$  к моменту времени  $t$  складывается из начального капитала  $u_0$ , суммарного объема премии в размере  $w(t) = ct$ , поступившей к этому моменту времени, за вычетом произведенных выплат (2):

$$u(t) = u_0 + ct - \sum_{j=1}^{n(t)} Y_j. \quad (2)$$

Здесь  $c$  — интенсивность поступления премий;  $Y_j$  — размер требования о страховом возмещении с номером  $j$ .

Все  $Y_j$  являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами  $F(x) = P(Y_j < x)$ .

Выберем в качестве функции распределения убытков гамма-распределение (3):

$$F(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^x y^{a-1} \exp^{-by} dy. \quad (3)$$

Здесь  $E(Y) = \frac{a}{b}$ ;  $D(Y) = E(Y - E(Y))^2 = \frac{a}{b^2}$ ,  $\bar{Y} = E(Y)$  — математическое ожидание;  $D(Y) = \sigma^2(Y)$  — дисперсия.

$$\text{Таким образом, } a = \frac{\bar{Y}^2}{\sigma^2(Y)}, \quad b = \frac{\bar{Y}}{\sigma^2(Y)}.$$

На практике мы имеем дело с неоднородным страховым портфелем, что может учитываться разделением его на субпортфели, каждый со своим параметром Пуассона  $\lambda_i$  и своим распределением убытков  $F_i$  и дальнейшим применением составного распределения Пуассона [3] с параметром  $\lambda = \sum_i \lambda_i$  и распределением

$$F = \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i.$$

Также применительно к практике страхования модель коллективного риска должна учитывать расходы на ведение дела: расходы на заключение и сопровождение договоров страхования, что в принципе учитывается изменением параметра  $c$ , — и расходы по урегулированию убытков. Учесть случайный характер расходов по урегулированию убытков можно путем введения мультипликативного множителя, например, следующего вида:  $Y_j \rightarrow Y_j(1 + \chi)$ , где  $\chi$  — случайная величина, имеющая бета-распределение [4].

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad (4)$$

$$E(\chi) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad D(\chi) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \quad (5)$$

Параметры бета-распределения оцениваются методом моментов:

$$E(\chi) = \chi_0, \quad \alpha = -\chi_0 + \chi_0^2 \frac{1 - \chi_0}{\sigma^2(\chi)}, \quad \beta = \frac{1 - \chi_0}{\chi_0} a. \quad (6)$$

На первом этапе будем считать, что расходы на ведение дела фиксированные и учитываются параметрами гамма-распределения.

Организуем случайный точечный процесс следующим образом: зададим последовательность случайных величин  $z_k$ , имеющих одну и ту же экспоненциальную плотность вероятности  $p_k(z) = p(z) = \lambda \exp^{-\lambda z}, z \geq 0$ .

Расставим точки в моменты времени:

$$\begin{cases} t_1 = z_1, \\ t_2 = z_1 + z_2, \\ \dots \\ t_k = z_1 + z_2 + \dots + z_k. \end{cases} \quad (7)$$

Согласно результатам работы [5], полученные точки распределены по закону Пуассона с параметром  $\lambda = \frac{E(n(t))}{t}$ .

Капитал страховщика для случайного точечного процесса Пуассона вычисляется с помощью рекуррентного соотношения (8):

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + c(t_{k+1} - t_k) - Y(t_{k+1}). \quad (8)$$

При этом  $u(t_0 = 0) = u_0$ , а размер убытка  $Y(t_k)$  моделируется случайным образом на основе гамма-распределения с заданными параметрами.

В качестве примера рассмотрим портфель автотранспортного страхования размером  $N = 1000$  единиц транспортных средств (ТС). Положим  $q = 0,4$  на одно ТС в год, или 400 требований в год. Здесь не учитываются повторные обращения, что соответствует коллективной модели риска. Таким образом,  $\lambda \approx \frac{qN}{365} \approx 1,06$ . Положим средний размер убытка  $\bar{Y}$  равным 50 тыс. руб., тогда  $\frac{\sigma(Y)}{\bar{Y}} = 0,5$ . Это соответствует параметрам гамма-распределения  $a = 4, b = 0,08$ . Установим начальный капитал на портфель страхования ТС  $u_0 = 5$  млн руб. и  $c = 55$  тыс. руб. в день.

Вычислим капитал по рекуррентной формуле, ограничиваясь значением длительности капитала  $K = 5000$ .

Перейдем от абсолютных значений капитала  $u_k$  к логарифмическим отношениям вида  $R_k = \ln \frac{u_k}{u_{k-1}}$ . Данный переход в финансовом анализе означает переход

от стоимости активов, значений индекса и т. п. к соответствующей доходности актива, поскольку инвесторов интересует прежде всего доходность. В данном случае мы осуществили подобный переход по тем же соображениям: в каждый момент времени нас интересует изменение капитала в целях принятия возможных мер, например изменения ставки страхового тарифа, пополнения капитала, учета расходов на урегулирование убытков и прочее. В целях удобства изложения материала будем называть данное отношение доходностью капитала. В распределении доходности капитала  $R_k = R(t_k)$  среднее значение  $E(R) = -1,315 \cdot 10^{-5}$ , а стандартное отклонение  $\sigma(R) = 0,01041$ .

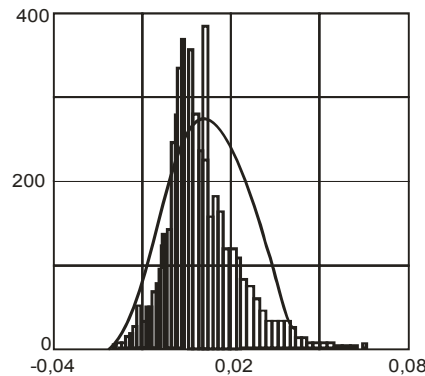


Рис. 1

На рис. 1. приведена гистограмма доходности капитала  $R_k = R(t_k)$  с наложением на нее нормального распределения (среднее значение  $E(R) = -1,315 \cdot 10^{-5}$ , стандартное отклонение  $\sigma(R) = 0,01041$ ).

Оценки первых четырех кумулянтов: среднего значения  $m = E(r)$ , стандартного отклонения  $\sigma = \sqrt{E((r-m)^2)}$ , коэффициентов асимметрии  $\gamma_a = \frac{E((r-m)^3)}{\sigma^3}$  и эксцесса  $\gamma_s = \frac{E((r-m)^4)}{\sigma^4} - 3$ , а также минимальные и максимальные значения доходности капитала приведены в таблице 1.

Таблица 1

## Оценки кумулянтов

$m, \%$	$\sigma, \%$	$\gamma_a$	$\gamma_s$	max, %	min, %
$-1,315 \cdot 10^{-3}$	1,041%	1,405	7,494	8,438	3,269

Следует отметить, что приведенные асимметрия и эксцесс характерны для доходности индекса *PTC* [6].

На рис. 2 изображена автокорреляционная функция доходности капитала для значений лага от 1 до 80.

На рис. 3. приведена автокорреляционная функция квадратов доходности капитала  $corr(R_j^2, R_{j+k}^2)$ . Значения автокорреляционных функций (АКФ) для первых шести лагов величин  $R_t$  и  $R_t^2$  содержатся в табл. 2.

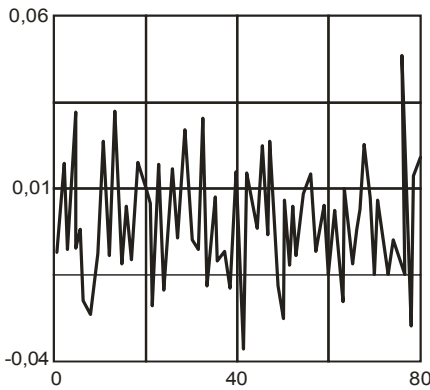


Рис. 2

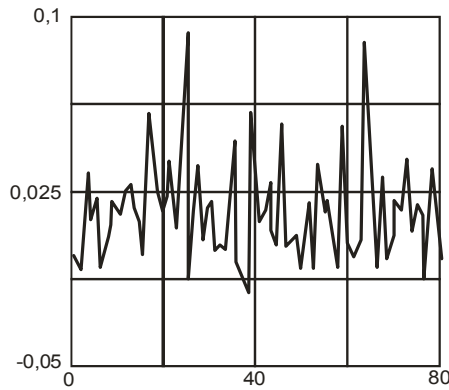


Рис. 3

Таблица 2

Значения автокорреляционных функций

№	1	2	3	4	5	6
$R_t$	-0,01164	0,011912	-0,01268	0,032106	-0,00419	-0,00295
$R_t^2$	0,001653	-0,01079	0,011542	0,03389	0,018319	0,021474

Как можно видеть, для квадратов доходности характерно более медленное убывание (долгая память), в то же время значения первых АКФ (по модулю), за исключением 1-го лага, близки, но для доходности  $R_t$  имеем отрицательную коррелированность соседних лагов. Отметим, что такое поведение АКФ в общем не является характерным для финансовых рядов [6], для которых привычнее нелинейная корреляция практически при полном отсутствии линейной корреляции в доходности, в то же время по характеристике глубины памяти для  $R_t^2$  есть определенное сходство.

## 2. RS-анализ

Выполним RS-анализ ряда доходности капитала длительностью  $K$  согласно методике, изложенной в работах [6; 7]. Рассмотрим статистику:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_n = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \left( \sum_{j=1}^k (R_{i,j} - e_i) \right) - \min_{1 \leq k \leq n} \left( \sum_{j=1}^k (R_{i,j} - e_i) \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (R_{i,j} - e_i)^2}}. \quad (9)$$

Здесь  $n$  – длина временного интервала разбиения;  $i$  – порядковый номер интервала разбиения;  $I$  – общее количество временных интервалов разбиения;  $R_{i,j} = R_{(i-1)n+j}$  – значение величины  $R$  с номером  $j$  на интервале разбиения с номером  $i$ , включающем  $n$  значений;  $In = K$ ,  $e_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_{i,j}$  – среднее значение по временному интервалу с номером  $i$  длины  $n$ .

Показатель Харста равен тангенсу угла наклона графика зависимости  $\ln\left(\frac{R}{S}\right)_n$  от  $\ln n$ .

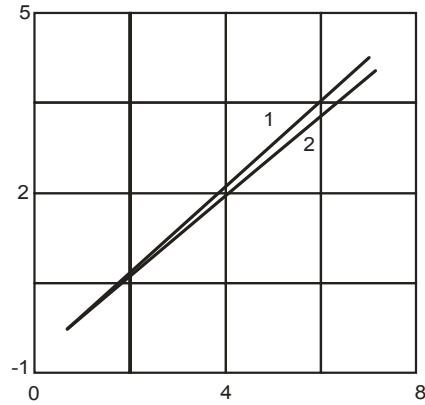


Рис. 4

На рис. 4 приведены графики  $RS$ -статистики. Цифра 1 соответствует кривой доходности капитала, цифра 2 — кривой стандартного белого шума с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

Показатель Харста для доходности капитала равен  $H_R = 0,516$  и для белого шума  $H_\varepsilon = 0,527$ , что близко к теоретическому значению  $H_\varepsilon = 0,5$ . Значение  $H > 0,5$  характерно для рядов, обладающих сохранением тенденции (персистентность — черный или коричневый шум); значение  $H < 0,5$  означает более быструю изменчивость по сравнению с белым шумом (антиперсистентность, или розовый шум). Следовательно, доходность данного ряда обладает свойствами белого шума. Значение показателя Харста фиксирует соответствующую автомодельность выборочной функции распределения и связанных с ней показателей.

Случайный процесс  $X_t$  называется автомодельным (самоподобным) или удовлетворяющим свойству статистической автомодельности, если для каждого  $a > 0$  можно найти такое  $b > 0$ , что  $Law(X_{at}, t \geq 0) = Law(bX_t, t \geq 0)$ . Здесь  $Law$  означает совокупность всех конечномерных распределений.

Значит, с наглядной точки зрения изменение временной шкалы  $t \rightarrow at$  приводит к тому же самому результату, что и изменение фазовой шкалы  $x \rightarrow bx$ .

Если для любого  $a > 0$  параметр  $b = a^H$ , то случайный процесс называется автомодельным процессом с показателем Харста  $H$ . Величина  $H \in (0,1)$  — это константа (параметр) Харста. Показатель Харста  $H$  и размерность по Хаусдорфу  $D$  связаны соотношением  $D = 2 - H$  [7].

### 3. Фильтрация

С целью выяснения порядка модели  $ARIMA(p, q)$  рассмотрим поведение частных автокорреляционных функций (ЧАКФ) для  $R_t$ . Пусть

$$R_t = \varphi_{01} + \varphi_{11}R_{t-1} + v_t, \quad R_t = \varphi_{20} + \varphi_{21}R_{t-1} + \varphi_{22}R_{t-2} + v_t, \dots \quad (10)$$

есть последовательность авторегрессионных моделей возрастающего порядка. Коэффициенты  $\varphi_{kk}$  называются частными автокорреляционными функциями порядка  $k$ . Частная автокорреляционная функция первого порядка  $\varphi_{11}$  показывает, какую часть вносит  $R_{t-1}$  в величину  $R_t$ ; частная автокорреляционная функция второго порядка  $\varphi_{22}$  показывает, какую часть вносит  $R_{t-2}$  в величину  $R_t$ , и т. д. Таким образом, для модели  $AR(p)$  частная автокорреляционная функция  $\varphi_{pp}$  должна быть отлична от нуля, иначе порядок модели можно понизить, в то же время частная автокорреляционная функция порядка  $p+1$  должна быть равна нулю, иначе порядок модели можно увеличить.

Таблица 3

**Частные автокорреляционные функции**

$k$	1	2	3	4	5	6
$R_t$	-0,01284	0,012512	-0,0132	0,032295	-0,00333	-0,00394
$R_t^2$	0,001659	-0,01082	0,011639	0,033856	0,018513	0,022178

В таблице 3 приведены частные автокорреляционные функции доходности капитала  $R_t$  и квадрата доходности  $R_t^2$  в зависимости от номера лага, вычисленные методом наименьших квадратов [4; 8; 9].

Для определения параметров  $p, q$  можно применять МНК, метод максимального правдоподобия, метод Бокса – Дженкинса с дальнейшим применением критериев  $AIC$ , Бокса – Льюнга [8–10]. Практически во всех методах добавление параметров по сравнению с  $AR(1)$  несущественно, что достаточно очевидно из анализа  $AK\Phi$  и  $ЧАК\Phi$ . Например, применение метода Бокса – Дженкинса для  $ARIMA(1,1)$  дает

$$R_t = 0,000108 + 0,50000 \cdot R_{t-1} + 0,011932\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (11)$$

При этом остаточная дисперсия равна  $6,31372 \cdot 10^{-5}$ , что хуже, чем в случае применения простейшей авторегрессии  $AR(1)$ , для которой остаточная дисперсия порядка  $2,88 \cdot 10^{-8}$ . В связи с этим можно в качестве линейного фильтра для  $R_t$  остановиться на модели  $AR(1)$ :

$$R_t = c_0 + c_1 R_{t-1} + v_t = -0,01284 + 0,000107 R_{t-1} + v_t. \quad (12)$$

Для проверки временного ряда доходности капитала на независимость доходности, одинаковое распределение и проверку  $AR$  остатков на нелинейность применяется  $BDS$ -статистика. В случае выявления нелинейности дальнейший анализ возможен как на базе стохастических эконометрических моделей семейства  $ARCH$ ,  $GARCH$ , так моделей и методов нелинейной хаотичной динамики.

**4. BDS-статистика и корреляционная размерность**

$BDS$ -статистика была предложена в результате анализа финансовых рынков экономистами Броком, Дечертом и Шейнкманом (B. Brock, W. Dechert, J. Scheinkman) в 1987 г. и представляет собой в настоящее время один из основных методов выявления зависимостей во временных рядах [11].

Цель теста состоит в том, чтобы различить данные *I.I.D.* (независимые, одинаково распределенные случайные величины) и любой вид зависимости, то есть проверить нулевую гипотезу о независимости и тождественном распределении значений временного ряда, используя критерий значимости. Также данный тест может выявить и нелинейность (нелинейный детерминизм) при условии, что линейная зависимость была удалена из данных. При нулевой гипотезе случайного блуждания *BDS*-статистика имеет стандартное нормальное распределение.

В настоящее время существуют два основных подхода к нелинейной динамике поведения доходности: стохастический и хаотический. Стохастический подход исходит из наличия внешних случайных воздействий, в то время как хаотический объясняет нелинейность внутренними свойствами динамической системы. В первом случае применяются нелинейные эконометрические модели типа модели условной гетероскедастичности *ARCH*, *GARCH* и их многочисленных модификаций [12; 13]. В рамках представления о хаотическом характере поведения доходности изменения объясняются внутренними свойствами модели, что предполагает определение размерности системы и ее построение.

Возможность восстановления характеристик динамической системы на основе одномерного временного ряда базируется на теореме Такенса, согласно которой вместо последовательности, состоящей из  $m$  переменных  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ , можно рассматривать последовательность, образованную одной переменной [14]:

$$x_1(t+T), x_1(t+2T), \dots, x_1(t+(m-1)T). \quad (13)$$

При анализе динамических систем основной вопрос – это определение размерности системы, то есть количества переменных, необходимых для описания. В соответствии с теоремой Такенса возможно описание системы на основе многомерных векторов задержек, составленных из последовательных отрезков временного ряда. Они заменяют реальные переменные системы, которые чаще всего неизвестны и образуют так называемое фазовое пространство. На основании теоремы Такенса производится «вложение» временного ряда в  $m$ -мерное псевдофазовое пространство, элементами которого являются точки  $x_i^{(m)} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m})$ , заданные  $m$ -последовательными значениями исходного временного ряда. Корреляционный интеграл определяет частоту попадания произвольной пары точек фазового пространства в гиперсферы радиуса  $d$ . Для оценки размерности динамической системы наиболее часто используется алгоритм Грассбергера – Прокачиа [15].

Для ряда  $x_t$  формируется последовательность последовательных векторов размерности  $m$   $a_i, i=1..N-m$ . Компоненты вектора  $a_{i,j} = x_{(i-1)m+j}, j=1,2..m$ .

Корреляционный интеграл дается выражением (14)

$$C(m, N, d) = \frac{2}{(N-m)(N-m+1)} \sum_{i=1}^{N-m} \sum_{j=i+1}^{N-m+1} \theta \left( d - \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} (x_{(i-1)+k} - x_{(j-1)+k})^2} \right). \quad (14)$$

Здесь  $\theta(x)$  – функция Хевисайда,  $\theta(x) = 0$ , если  $x < 0$ , и  $\theta(x) = 1$ , если  $x \geq 0$ .

Сравнивается расстояние между всеми парами векторов, если это расстояние меньше заданного  $r$ , то значение  $\theta = 1$ .

Отметим, что кроме евклидова расстояния можно применять и другие, в частности, производить покомпонентное сравнение, то есть считать, что расстояние между векторами меньше, чем  $r$ , если по каждой компоненте меньше;



если расстояние между векторами хотя бы одной компоненты выше, то считается, что расстояние превышено, в этом случае имеем (15):

$$C(m, N, d) = \frac{2}{(N-m)(N-m+1)} \sum_{i=1}^{N-m} \sum_{j=i+1}^{N-m+1} \prod_{k=0}^{m-1} \theta(d - |x_{(i-1)+k} - x_{(j-1)+k}|). \quad (15)$$

Изменяя размерность вложения  $m$ , вычисляем зависимость корреляционного интеграла от  $d$ ; если начиная с некоторого  $m$  наклон графиков перестает меняться, то это и есть размерность динамической системы, а тангенс наклона дает значение  $D_C$  корреляционной размерности  $\ln C(m, d) = a + D_C \ln d$ .

Отметим, что представляет интерес только обнаружение низких размерах хаоса  $m < 4$  или  $m < 5$ , так как при больших размерностях  $m$  фактически невозможно отличать стохастичность от хаотичности.

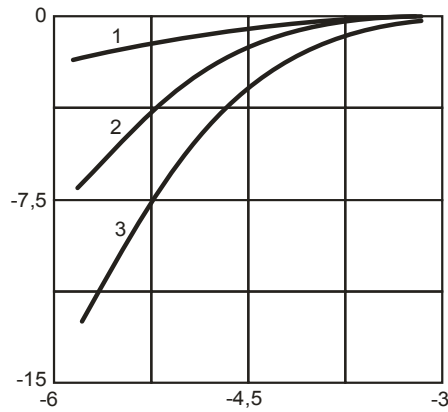


Рис. 5

На рис. 5. приведены графики зависимости корреляционного интеграла для доходности при разных значениях размерности  $m$  в логарифмических координатах. Цифры у кривых – значения размерности  $m$ .

Можно отметить отсутствие низкоразмерного хаоса, по крайней мере, до размерности  $m \leq 10$ .

Значения корреляционной размерности  $D_C$  в зависимости от размерности вложения  $m$  отражены в таблице 4.

Таблица 4

**Значения корреляционной размерности**

$m$	2	4	6	8	10
$D_C(m)$	1,771	3,512	5,242	6,817	7,086

Как можно видеть из таблицы, поведение корреляционной размерности в зависимости от размера пространства «вложения»  $m$  характерно для стохастической системы. Действительно, стохастическая система заполняет в конечном счете все пространство более или менее равномерно, в то время как для хаотической нелинейной системы характерным является группирование (концентрация) точек вблизи каких-либо предельных траекторий, в результате чего размерность для хаотических систем намного меньше.

### 5. BDS-статистика для тестирования доходности на I.I.D. и остатков на нелинейность

Цель теста состоит в том, чтобы различить данные I.I.D. (независимые, одинаково распределенные случайные величины) и любой вид зависимости, то есть проверить нулевую гипотезу о независимости и тождественном распределении значений временного ряда, используя критерий значимости.

На I.I.D. проверяется доходность капитала, AR(1)-остатки от доходности проверяются на нелинейность.

BDS-тест основан на статистической величине (BDS-статистике) (16):

$$w_{m,N}(r) = \sqrt{N-m+1} \frac{C_{m,N}(r) - (C_{1,N-m}(r))^m}{\sigma_{m,N}(r)}. \quad (16)$$

Здесь в числителе приведены корреляционные интегралы  $C_{m,N}(r)$ ,  $C_{1,N-m}(r)$ , а знаменатель  $\sigma_{m,N}(r)$  – среднеквадратическое отклонение числителя.

Зависимость корреляционного интеграла  $C_{m,N}(r)$  от  $r$  имеет степенной вид:  $C_{m,N}(r) \sim r^{D_C}$ , где  $D_C$  – корреляционная размерность временного ряда.

Брок показал, что  $C_{m,N}(r) \Rightarrow (C_{1,N}(r))^m$  с единичной вероятностью при  $N \rightarrow \infty$ , а  $(C_{m,N}(r) - (C_{1,N-m}(r))^m) \sqrt{N-m+1}$  является случайной асимптотически нормально распределенной величиной с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_{m,N}(r)$ , которое определяется выражением (17)

$$\sigma_{m,N}^2 = 4 \left( k^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} k^{m-j} (C_{1,N}(r))^{2j} + (m-1)^2 (C_{1,N}(r))^{2m} - m^2 k (C_{1,N}(r))^{2m-2} \right) \quad (17)$$

$$\text{Здесь } k = \frac{1}{(N-1)(N-2)N} \left\{ \sum_{t=1}^N \left[ \sum_{s=1}^N \theta(r - |x_t - x_s|) \right]^2 - 3 \sum_{s=1}^N \sum_{t=s+1}^N \theta(r - |x_t - x_s| + 2N) \right\}.$$

BDS-статистика  $w_{m,N}(r)$  – нормально распределенная случайная величина при условии, что оценка  $\sigma_{m,N}(r)$  достаточно близка к ее теоретическому значению  $\sigma_{m,N}(r)$ .

В качестве теста на достоверность гипотезы  $H_0$  об отсутствии в наблюдении хаотического процесса принимается выполнение неравенства  $|w_{m,N}(r)| \leq 1,96$  для значения статистики  $w_{m,N}(r)$ , что соответствует уровню значимости  $\alpha = 0,05$  (вероятности ошибки первого рода), тогда с 95 %-ной уверенностью можно принять гипотезу  $H_0$  (I.I.D.).

Критическая область состоит из двух бесконечных полуинтервалов  $(-\infty; 1,96)$ ;  $(1,96; +\infty)$ .

BDS-тест имеет два параметра: размерность вложения  $m$  и параметр масштаба  $d$ , который обычно изменяется от  $0,5\sigma$  до  $2\sigma$ , где  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение исходных данных доходности капитала.

В таблицах 5, 6 приведены значения BDS-теста для  $m = 2, 4, 6, 8, 10$  и для  $d = \sigma \approx 0,0078$  (стандартное отклонение для доходности капитала) и для доходности индекса РТС [16].

Таблица 5

Значения BDS-теста

$m$	2	4	6	8	10
BDS -доходность капитала $R_t$	2,57	2,957	2,978	2,727	2,426

Таблица 6

Значения BDS-теста

$m$	2	3	4	5
BDS -доходность индекса $PTC_t$	9,758	12,702	14,875	16,871

Для  $R_t$  все значения лежат вне интервала  $(-1,96; 1,96)$ , то есть гипотеза случайного блуждания должна быть отвергнута на 5 %-ном уровне значимости. Для доходности фондового индекса  $PTC$  значения BDS-статистики намного выше, что позволяет более уверенно отвергнуть гипотезу о  $I.I.D.$

**6. Применение BDS-статистики для тестирования AR(1)-остатков на нелинейность**

С помощью BDS-теста можно проверить гипотезу о линейности или нелинейности.

С этой целью к ряду доходностей применяется линейный фильтр, на выходе которого используются оцененные остатки в модели авторегрессии  $AR(p)$ .

В данном случае в качестве линейного фильтра для  $R_t$  можно остановиться на модели  $AR(1)$ :

$$R_t = c_0 + c_1 R_{t-1} + v_t = -0,01284 + 0,000107 R_{t-1} + v_t \tag{18}$$

Для остатков применение BDS-теста есть тест на нелинейность.

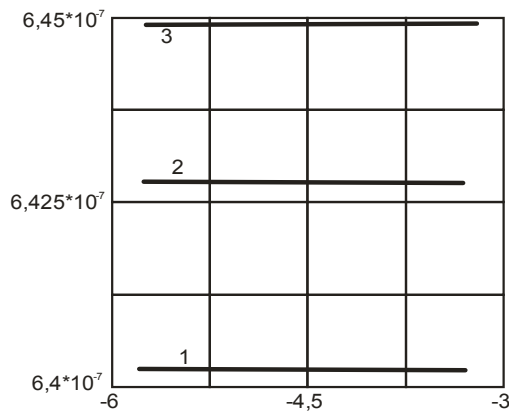


Рис. 6

На рис. 6 выстроены графики отсутствия зависимости корреляционного интеграла для  $AR$ -остатков от  $d$  для любой размерности пространства вложения. Цифры у кривых – значения размерности  $d$ .

В таблицах 7, 8 приведены значения  $BDS$ -теста для  $m=2,4,6,8,10$  для  $AR$ -остатков и для любого значения  $d$  (стандартное отклонения для  $AR$ -остатков составляет  $\sigma \approx 8,5 \cdot 10^{-7}$  доходности капитала) и для  $AR$ -остатков доходности индекса  $PTC$  [17].

Таблица 7

**Значения BDS-теста**

$m$	2	4	6	8	10
$BDS$ -доходность капитала $R_t$	-0,03	-0,024	-0,02	-0,018	-0,016

Таблица 8

**Значения BDS-теста**

$m$	2	3	4	5
$BDS$ -доходность индекса $PTC_t$	9,507	12,513	14,553	16,651

Как можно видеть, для  $AR$ -остатков тест опровергает гипотезу о наличии нелинейности, в то время как для  $AR$ -остатков доходности индекса  $PTC$  принимается гипотеза о нелинейности.

В том случае, если гипотеза о нелинейности принимается, дальнейший анализ чаще всего проводится на основе нелинейных эконометрических моделей типа семейства моделей условной гетероскедастичности  $GARCH$ , что позволяет улучшить качество анализа, например прогноза показателей за счет меньшей величины условной дисперсии временного ряда по сравнению с безусловной дисперсией.

В заключение можно отметить, что методы и модели хаотической динамики и нелинейные эконометрические модели могут служить дополнительным математическим аппаратом для создания современных технологий управления страховым риском.

**Библиографический список**

1. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007. 544 с.
2. Современная актуарная теория риска / Каас Р. [и др.]. М.: Янус-К, 2007. 376 с.
3. Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании. М.: Российский юридический издательский дом, 1994. 130 с.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1972. 648 с.
5. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 488 с.
6. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1: Факты и модели. М.: ФАЗИС, 1998. 512 с.
7. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-рейтинг, 2004. 304 с.
8. Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С. Математические методы финансового анализа. М.: Анкил, 2006. 400 с.

9. Чураков Е.П. Прогнозирование эконометрических временных рядов. М.: Финансы и статистика, 2008. 206 с.
10. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Т. 1. М.: Мир, 1974. 405 с.
11. Brock W.A., Dechert W.D., Scheinkman J.A. A test for independence based on the correlation dimension // Working paper. № 8702. Department of Economics, University of Wisconsin, 1987.
12. Росси Эдуардо. Одномерные *GARCH* -модели: обзор // Квантиль. 2010. № 8. С. 1–67.
13. Прохоров А. Нелинейная динамика и теория хаоса в экономической науке // Квантиль. 2008. № 4. С. 79–92.
14. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
15. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
16. Борусяк К.К. Анализ применимости моделей нелинейной динамики при управлении рисками на российском фондовом рынке // XI Международная конференция ВШЭ по проблемам развития экономики и общества. 6–8 апреля 2010 г. М., 2010.

*E.N. Barysheva, V.N. Nikishov, A.L. Saraev\**

#### **METHODS OF FINANCIAL ANALYSIS FOR THE RESEARCH OF ONE MODEL OF INSURANCE**

Actual dynamics of insurance parameters can differ considerably from the theoretical results received on the basis of standard actuarial methods and models. In the work it is shown, that the methods of stochastic financial mathematics applied for the research of parameters of the share market and methods of nonlinear dynamics, applied for the description of the determined chaos can be useful for the analysis of dynamic models of insurance.

**Key words:** approximation, reinsurance, loss, unprofitability, portfolio of risks, gamma distribution, limiting distribution.

---

\* *Barysheva Evgeniya Nikolaevna* (barisheva\_zh@hotmail.com), *Nikishov Viktor Nikolaevich* (Tsh-sea05@yandex.ru), *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.