УДК 519.681

Е.В. Михайлова, В.Н. Никишов, Л.А. Сараев*

ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ БЮЛЬМАНА – ШТРАУБА ДЛЯ ОЦЕНКИ УБЫТОЧНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОРТФЕЛЯ РИСКОВ

Проведено обобщение метода Бюльмана – Штрауба для динамического портфеля рисков. Применение метода рассмотрено на модельном портфеле предпринимательских рисков.

Ключевые слова: убыточность, портфель рисков, оценка параметров модели, модель Бюльмана – Штрауба.

1. Модель агрегированного портфеля рисков

Рассмотрим предприятие, которое поставляет товары или услуги потребителям и/или закупает материалы для производства на основе коммерческих контрактов. Совокупность контрактов предприятия N будем называть портфелем предпринимательских контрактов. Все договоры предприятия можно разделить на ячейки (i,j) с количеством договоров N_{ij}, обладающих одинаковыми свойствами относительно вероятности наступления убытков по ним и их фактического размера. В работах [1–3] рассмотрены рекуррентные методы оценки совокупного размера убытков по портфелю контрактов. Каждый договор внутри выделенной ячейки можно характеризовать стоимостью $C_{ij}(k)$ и убыточностью $X_{ij}(k)$, $k=1,2,\ldots N_{ij}$. На практике, как правило, доступны агрегированные данные по стоимости и убытках в ячейке, определяемые выражениями

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{N_{ij}}C_{ij}(k),\quad Y_{ij}=\sum_{k=1}^{N_{ij}}Y_{ij}(k),$$

с учетом которых убыточность по совокупности договоров с одинаковой вероятностью наступления убытков определяется выражением: $X_{ij}(k)=Y_{ij}(k)/C_{ij}(k)$.

Для получения оценок убыточности нет предположений об априорно задаваемых распределениях убытков. Все оценки основаны на фактических накопленных данных о размере Y_{it} и C_{it}, где i – номер группы, соответствующей виду деятельности предприятия, t – номер группы, соответствующий периоду времени. В этом случае применима модель Бюльмана – Штрауба, на основе которой в работах [4–7] получены оценки рентабельности для отдельных видов деятельности предприятия.

Однако возможно и другое представление агрегированных данных по портфелю предпринимательских контрактов. Например, в случае страхового портфеля

Михайлова Екатерина Владимировна (e.v.mihailova@yandex.ru), кафедра гражданского процессуального и предпринимательского права Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1. *Никишов Виктор Николаевич* (TSh-sea05@yandex.ru), *Сараев Леонид Александрович* (saraev@ssu.samara.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

известна общая страховая сумма $C_{ij}(t)$ по заключенным договорам страхования в подразделениях (филиалах) компании и по типам транспортных средств за отчетный период, а также сумма убытков $Y_{ij}(t)$ по этому классу договоров. В случае банковского портфеля потребительских кредитов известна общая сумма кредитов $C_{ij}(t)$, выданных тому или иному классу заемщиков, распределенных по нормативам кредитоспособности, за отчетный период и по типам кредитов (автомобильные кредиты, кредиты на приобретение бытовой техники, кредиты на образование и т. п.). При этом известна общая сумма убытков или списанной задолженности $Y_{ij}(t)$. В случае предпринимательской деятельности совокупность контрактов также может быть распределена по классам платежеспособности потребителей (поставщиков) и по типам контрактов на поставку (закупку) определенной продукции. Также известна общая сумма убытков (неисполнения или ненадлежащего исполнения) $Y_{ij}(t)$.

В данной работе рассматривается обобщение модели Бюльмана – Штрауба на случай группировки агрегированных данных по трем параметрам.

Таким образом, для анализа портфеля рисков в периоде t информацией служит $Y_{ij}(t)$ – совокупный размер убытков по всем действующим договорам ячейки под номером (i,j) и $C_{ij}(t)$ – стоимость контрактов, входящих в эту ячейку. Отметим, что если какой-либо контракт был действующим в этот период времени только на интервале времени τ, то стоимость данного контракта входит в $C_{ij}(t)$ с множителем $(\tau/\Delta t)$, где Δt – длительность периода.

Введем обозначения, используемые для моделирования убыточности в виде таблицы 1, по столбцам которой расположены показатели совокупного убытка, стоимости контрактов и убыточности, а по строкам – обозначения указанных показателей по отдельным элементам портфеля контрактов.

Таблица 1

Обозначения в модели

Показатель / *Часть портфеля*	*Совокупный убыток*	*Стоимость контрактов*	*Убыточность*
	В период t		
Ячейка	$Y_{ij}(t)$	$C_{ij}(t)$	$X_{ij}(t)=\dfrac{Y_{ij}(t)}{C_{ij}(t)}$
Строка	$Y_{i+}(t)=\sum\limits_{j=1}^{J}Y_{i+}(t)$	$C_{i+}(t)=\sum\limits_{j=1}^{J}C_{i+}(t)$	$X_{i+}(t)=\dfrac{Y_{i+}(t)}{P_{i+}(t)}$
Портфель в целом	$Y_{++}(t)=\sum\limits_{i=1}^{I}\sum\limits_{j=1}^{J}Y_{ij}(t)$	$C_{++}(t)=\sum\limits_{i=1}^{I}\sum\limits_{j=1}^{J}C_{ij}(t)$	$X_{++}(t)=\dfrac{Y_{++}(t)}{C_{++}(t)}$
	За все периоды		
Ячейка	$Y_{ij+}=\sum\limits_{t=1}^{T}Y_{ij}(t)$	$C_{ij+}=\sum\limits_{t=1}^{T}C_{ij}(t)$	$X_{ij+}=\dfrac{Y_{ij+}}{C_{ij+}}$
Портфель в целом	$Y_{+++}=\sum\limits_{i=1}^{I}\sum\limits_{j=1}^{J}Y_{ij+}$	$C_{+++}=\sum\limits_{i=1}^{I}\sum\limits_{j=1}^{J}C_{ij+}$	$X_{+++}=\dfrac{Y_{+++}}{C_{+++}}$

На основе данных за ряд периодов времени $t=\overline{1,T}$ требуется получить оценку убыточности $E\left(X_{ij}(T+1)\middle|\underline{X}\right)=X_{ij}^{T+1}$ на период времени $t=(T+1)$. Тогда при известных стоимостях контрактов на будущий период $C_{ij}(T+1)$ можно оценить размер убытков $Y_{ij}(T+1)=X_{ij}^{T+1}\cdot C_{ij}(T+1)$.

Отметим, что при наличии только одного влияющего фактора, то есть, когда $Y_{ij}(t),C_{ij}(t),X_{ij}(t)\to Y_i(t),C_i(t),X_i(t)$, модель будет соответствовать модели Бюльмана – Штрауба [5], если дополнительно $C_i(t)=C_i=const$, то модели Штрауба [6; 7].

2. Обобщенная модель Бюльмана – Штрауба

В обобщенной модели Бюльмана – Штрауба X_{ij} независимы, имеют нормальное распределение $N\left(m,s^2/C_{ij}(t)\right)$ и могут быть представлены в виде двухфакторной модели компонент дисперсии [8]:

$$X_{ij}(t)=m+\Omega_{ij}+\Omega_{ij}(t), \tag{1}$$

где $m=E\left(X_{ij}(t)\right)$ – среднее значение убыточности по всему портфелю контрактов; Ω_{ij} – случайное отклонение от среднего, характерное для ячейки (i,j); $\Omega_{ij}(t)$ – отклонения значений убыточности от долгосрочного среднего, которые описывают внутреннюю изменчивость убыточности отдельного риска или изменчивость убыточности во времени.

Величины Ω_{ij} и $\Omega_{ij}(t)$ – независимые случайные величины с математическим ожиданием $E\left(\Omega_{ij}\right)=0,$ $E\left(\Omega_{ij}(t)\right)=0$ и дисперсиями $D\left(\Omega_{ij}\right)=a,$ $D\left(\Omega_{ij}(t)\right)=s^2/C_{ij}(t)$. Из независимости случайных величин Ω_{ij} и $\Omega_{ij}(t)$ следует, что $E\left(\Omega_{ij}\cdot\Omega_{ij}(t)\right)=0.$ Также независимыми будем считать отклонения от среднего в различных группах, отклонения от долгосрочного среднего в различных годах. Следовательно, $cov\left(\Omega_{ij}(t)\Omega_{rs}(t')\right)=s^2\delta_{ir}\delta_{js}\delta_{tt'}/C_{rs}(t),$ $cov\left(\Omega_{ij}\Omega_{rs}\right)=a\delta_{ir}\delta_{js}$, где δ_{kl} – символ Кронекера-Капелли.

Задача состоит в определении оценок убыточности для каждой (r,s) $\left(r=\overline{1,I}\quad s=\overline{1,J}\right)$ группы, которые можно применять в качестве прогнозных на будущий период времени, с учетом данных для группы (r,s) и для других групп $\underline{X}=\left(X_{ij}(t),\ t=1,2,..T\right)$:

$$E(X_{rs}(T+1)\middle|\underline{X})=X_{rs}^{(T+1)}. \tag{2}$$

Предлагается прямая аппроксимация величины (2) линейной комбинацией наблюдаемых величин $X_{ij}(t)$ в виде модифицированной однородной или неоднородной модели, для применения которых необходимо получить оценки параметров модели m, a и s^2.

3. Оценки параметров

В качестве несмещенной оценки среднего значения убыточности по всему портфелю контрактов m примем выражение:

$$\widehat{m} = \frac{1}{C_{+++}} \sum_{i,j,t=1}^{I,J,T} C_{ij}(t) X_{ij}(t) = \frac{1}{C_{+++}} \sum_{i,j,t=1}^{I,J,T} Y_{ij}(t) = \frac{Y_{+++}}{C_{+++}} = X_{+++}. \quad (3)$$

В качестве несмещенной оценки параметра модели s^2, описывающего изменения убыточности во времени, примем выражение:

$$\widehat{s}^2 = \frac{1}{IJ(T-1)} \sum_{i,j,t=1}^{I,J,T} C_{ij}(t) \cdot \left(X_{ij}(t) - X_{ij+} \right)^2. \quad (4)$$

В качестве несмещенной оценки параметра a, описывающего изменение убыточности, характерное для ячейки (i,j), примем выражение:

$$\widehat{a} = \frac{W - V}{K}, \quad (5)$$

где $W = \frac{1}{IJT-1} \sum_{i,j,t=1}^{I,J,T} \frac{C_{ij}(t)}{C_{+++}} \left(X_{ij}(t) - X_{+++} \right)^2$, $V = \frac{1}{IJ(T-1)} \sum_{i,j,t=1}^{I,J,T} \frac{C_{ij}(t)}{C_{+++}} \left(X_{ij}(t) - X_{ij+} \right)^2$,

$$K = \frac{1}{(IJT-1)} \sum_{i,j=1}^{I,J} \frac{C_{ij+}}{C_{+++}} \left(1 - \frac{C_{ij+}}{C_{+++}} \right) = \frac{1}{IJT-1} \left(1 - \sum_{i,j=1}^{I,J} \left(\frac{C_{ij+}}{C_{+++}} \right)^2 \right).$$

Если оценка параметра $\widehat{a} < 0$, то полагают $\widehat{a} = 0$, так как в этом случае статистические данные подтверждают гипотезу о том, что классы рисков однородны.

4. Модифицированная однородная модель Бюльмана – Штрауба

Для модифицированной однородной модели Бюльмана – Штрауба величину (2) ищем в виде:

$$X_{rs}^{T+1} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} \alpha_{ij}^{(r,s)}(t) X_{ij}(t). \quad (6)$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_{ij}^{(r,s)}$ определяются из условия минимизации среднеквадратического отклонения:

$$E\left(E(X_{rs}(T+1) - \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} \alpha_{ij}^{(r,s)}(t) X_{ij}(t) \right)^2 \to min \quad (7)$$

с дополнительным условием несмещенности оценки:

$$E\left(\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} \alpha_{ij}^{(r,s)}(t) X_{ij}(t) \right) = m. \quad (8)$$

Используя свойство дисперсии и соответствующее свойство для условной дисперсии $E(X - h(Y)|Y)^2 = Var(X|Y) + (E(X|Y) - h(Y))^2$, где $h(Y)$ – произвольная функция случайной величины Y, выражение (6) примет вид:

$$D(X_{rs}(T+1)|\underline{X}) + E\left(X_{rs}^{T+1} - \sum_{i,j,t=1}^{I,J,T} \alpha_{it}^{(rs)} X_{it} \right)^2 \to min.$$

Запишем лагранжиан для однородной модели:

$$L = \frac{1}{2} D(X_{rs}(T+1)\big|\underline{X}) + \frac{1}{2} E\left(X_{rs}^{T+1} - \sum_{i,j,t=1}^{I,J,T} \alpha_{it}^{(rs)} X_{it} \right)^2 + \\ + \alpha_0^{(r,s)} E\left(m - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T} \alpha_{ij}^{(r,s)}(t) X_{ij}(t) \right). \tag{9}$$

Дифференцирование Лагранжа (9)) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} E\left(m - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T} \alpha_{ij}^{(r,s)} X_{ij}(t) \right) = 0, \\ E\left(X_{rs}^{T+1} X_{r's'}(t')\right) - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T} \alpha_{ij}^{(r,s)}(t) E\left(X_{ij}(t) X_{r's'}(t')\right) - \alpha_0^{(r,s)} \cdot E\left(X_{r's'}(t')\right) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Пусть

$$\alpha_{++}(+) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T} \alpha_{ij}^{(r,s)}(t). \tag{11}$$

Из первого уравнения системы (10) получим $\alpha_{++}(+) = 1$.

Вычислим математические ожидания во втором уравнении системы (10):

$$E\left(X_{rs}^{T+1} X_{r's'}(t')\right) = E\left((m + \Omega_{rs} + \Omega_{rs}(T+1))(m + \Omega_{r's''} + \Omega_{r's'}(t'))\right) = m^2 + a\delta_{rr'}\delta_{ss'} \\ E\left(X_{ij}(t) X_{r's'}(t')\right) = E\left((m + \Omega_{ij} + \Omega_{ij}(t))(m + \Omega_{r's''} + \Omega_{r's'}(t'))\right) = \\ = m^2 + a\delta_{ir'}\delta_{js'} + s^2 \delta_{ir'}\delta_{js'}\delta_{tt'} / C_{ij}(t). \tag{12}$$

Учитывая (12), второе уравнение системы (10) примет вид:

$$\delta_{rr'}\delta_{ss'} - \alpha_{r's'+}^{(r,s)} - \frac{s^2/a}{C_{r's'}(t')} \alpha_{r's'}^{(r,s)}(t') - \alpha_0^{(r,s)} \cdot m/a = 0, \tag{13}$$

где $\alpha_{r's'+}^{(r,s)} = \sum_{t'=1}^{T} \alpha_{r's'}^{(r,s)}(t')$.

Из (13) получаем выражения для расчета коэффициентов $\alpha_{r's'+}^{(r,s)}$:

$$\alpha_{r's'+}^{(r,s)} = \gamma_{r's'} \cdot \left(\delta_{r'r}\delta_{ss'} - \alpha_0^{(r,s)} \cdot a/m\right), \tag{14}$$

где

$$\gamma_{r's'} = \frac{C_{r's'+}}{C_{r's'+} + s^2/a}. \tag{15}$$

Суммируя данное выражение по r' и s' и учитывая (11), получим:

$$\alpha_0^{(r,s)} \cdot m/a = -\frac{1}{\gamma}(1 - \gamma_{rs}), \tag{16}$$

где $\gamma = \sum_{r=1}^{I}\sum_{s=1}^{J} \gamma_{rs}$. Подставляя полученные выражения для $\alpha_{r's'+}^{(r,s)}$ и $\alpha_0^{(r,s)} \cdot m/a$ в уравнение (16), находим

$$\alpha_{r's'}^{(r,s)}(t') = \frac{C_{r's'}(t')}{C_{r's'+}} \cdot \gamma_{r's'} \cdot \left(\delta_{r'r}\delta_{s's} + \frac{1}{\gamma}(1-\gamma_{rs}) \right). \tag{17}$$

С учетом данного представления для коэффициентов $\alpha_{r's'}^{(r,s)}(t')$ прогнозное значение может быть записано в виде:

$$E\left(X_{rs}(T+1)\middle|\underline{X}\right) = X_{rs}^{T+1} = \gamma_{rs}X_{rs+} + (1-\gamma_{rs})\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{\gamma_{rs}}{\gamma}X_{ij+}. \tag{18}$$

Если ввести обобщенное среднее в целом по портфелю в виде:

$$X_0 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{\gamma_{rs}}{\gamma}X_{ij+}, \tag{19}$$

то однородная оценка для X_{rs}^{T+1} может быть записана как

$$X_{rs}^{T+1} = \gamma_{rs}X_{rs+} + (1-\gamma_{rs})X_0. \tag{20}$$

Содержательно это означает взвешенное среднее с коэффициентом γ_{rs}, выражающим долю собственной статистики данной группы в виде среднего по группе X_{rs+}, за все время наблюдения и взвешенного среднего по портфелю X_0 за тот же период времени. Отметим, что взвешенная средняя убыточность по портфелю X_0 не равна обычному среднему $X_0 \neq X_{+++}$.

Отметим, что для однородной схемы справедливо равенство

$$\sum_{i,j=1}^{I,J} C_{ij+}X_{ij+} = Y_{+++} = \sum_{i,j=1}^{I,J} C_{ij+}X_{i,j}^{(T+1)}. \tag{21}$$

Таким образом, в случае применения однородной схемы в качестве прогнозных значений речь идет о перераспределении убытков и тем самым убыточности между группами.

5. Модифицированная неоднородная модель Бюльмана − Штрауба

Для модифицированной неоднородной модели Бюльмана − Штрауба величину (2) ищем в виде:

$$X_{rs}^{T+1} = \alpha_0^{(r,s)} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\alpha_{ij}^{(r,s)}(t)X_{ij}(t). \tag{22}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_0^{(r,s)}$ и $\alpha_{ij}^{(r,s)}$ определяются из условия минимизации среднеквадратического отклонения:

$$E\left(X_{rs}^{(T+1)} - \alpha_0^{(r,s)} - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\alpha_{ij}^{(r,s)}(t)X_{ij}(t) \right)^2 \to min. \tag{23}$$

Используя свойство дисперсии и соответствующее свойство для условной дисперсии $E(X-h(Y)|Y)^2 = Var(X|Y)+(E(X|Y)-h(Y))^2$, где $h(Y)$ – произвольная функция случайной величины Y, выражение (23) примет вид:

$$D(X_{rs}(T+1)|\underline{X})+E\left(X_{rs}^{T+1}-\alpha_0^{(rs)}-\sum_{i,j,t=1}^{I,J,T}\alpha_{it}^{(rs)}X_{it}\right)^2 \to min. \quad (24)$$

Запишем лагранжиан для неоднородной модели:

$$L=\frac{1}{2}D(X_{rs}(T+1)|\underline{X})+\frac{1}{2}E\left(X_{rs}^{T+1}-\alpha_0^{(rs)}-\sum_{i,j,t=1}^{I,J,T}\alpha_{it}^{(rs)}X_{it}\right)^2. \quad (25)$$

Дифференцирование Лагранжа (25) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} (1-\gamma_{rs})^2\cdot\left(1-2\dfrac{C_{rs+}}{C_{+++}}+\displaystyle\sum_{i,j=1}^{I,J}\left(\dfrac{C_{ij+}}{C_{+++}}\right)^2\right)=0, \\ E\left(X_{rs}^{T+1}X_{r's'}(t')\right)-\alpha_0^{(r,s)}\cdot E\left(X_{r's'}(t')\right)-\displaystyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\alpha_{ij}^{(r,s)}(t)E\left(X_{ij}(t)X_{r's'}(t')\right)=0. \end{cases} \quad (26)$$

Из первого уравнения системы (26) получим:

$$\alpha_0^{(r,s)}=m\left(1-\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\alpha_{ij}^{(r,s)}(t)\right)=m\left(1-\alpha_{++}(+)\right), \quad (27)$$

где $\alpha_{++}(+)$ определяется выражением (11).

Учитывая (12), второе уравнение системы (26) после суммирования по t' примет вид:

$$\alpha_{r's'}^{(r,s)}(+)=\gamma_{r's'}\cdot\delta_{r'r}\delta_{ss'}, \quad (28)$$

где $\gamma_{r's'}$ определяется выражением (15).

Следовательно, $\alpha_{++}^{(rs)}(+)=\gamma_{rs}$ и далее $\alpha_{r's'}^{(r,s)}(t')=\dfrac{C_{r's'}(t')}{C_{r's'+}}\gamma_{r's'}\cdot\delta_{r'r}\delta_{s's}$.

Для коэффициента $\alpha_0^{(r,s)}$ получим:

$$\alpha_0^{(r,s)}=m\left(1-\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\alpha_{ij}^{(r,s)}(t)\right)=m\left(1-\alpha_{++}(+)\right)=m(1-\gamma_{rs}).$$

С учетом данного представления для коэффициентов $\alpha_{r's'}^{(r,s)}(t')$ прогнозное значение может быть записано в виде:

$$X_{rs}^{T+1}=\alpha_0^{(rs)}+\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\alpha_{ij}^{(r,s)}(t)X_{ij}(t)=\gamma_{rs}X_{rs+}+(1-\gamma_{rs})m. \quad (29)$$

Таким образом, для величины $X_{rs}^{(T+1)}=E(X_{rs}(T+1)|\underline{X})$ получена оценка для однородной модели в виде (20) и оценка для неоднородной в виде (29). Определим точность полученных оценок, используя среднеквадратическое отклонение.

6. Определение точности оценок на основе среднеквадратичного отклонения

Поскольку $E(\Omega_{rs}\Omega_{rst})=0$ для любых значений индексов, то величина среднеквадратичного отклонения $D^2=D_1^2(\Omega_{rs})+D_2^2(\Omega_{rst})$.

Вычислим среднеквадратичное отклонение для оценки (20) в случае однородной схемы. В этом случае $D_1^2(\Omega_{rs})$ задается выражением:

$$D_1^2(\Omega_{rs})=E\left(\left(\Omega_{rs}-\gamma_{rs}\sum_{t=1}^{T}\frac{C_{rst}}{C_{rs+}}\Omega_{rs}-(1-\gamma_{rs})\sum_{i,j=1}^{I,J}\frac{\gamma_{ij}}{\gamma}\sum_{t=1}^{T}\frac{C_{ijt}}{C_{ij+}}\Omega_{ij}\right)^2\right)=$$

$$=(1-\gamma_{rs})^2E\left(\left(\sum_{i,j=1}^{I,J}(\delta_{ir}\delta_{js}-\frac{\gamma_{ij}}{\gamma})\Omega_{ij}\right)^2\right)=a(1-\gamma_{rs})^2\left(1-2\frac{\gamma_{rs}}{\gamma}+\sum_{i,j=1}^{I,J}\left(\frac{\gamma_{ij}}{\gamma}\right)^2\right).$$

Для $D_2^2=D_2^2(\Omega_{ijt})$ получим

$$D_2^2(\Omega_{rst})=E\left(\left(\gamma_{rs}\sum_{t=1}^{T}\frac{C_{rst}}{C_{rs+}}\Omega_{rst}+(1-\gamma_{rs})\sum_{i,j=1}^{I,J}\frac{\gamma_{ij}}{\gamma}\sum_{t=1}^{T}\frac{C_{ijt}}{C_{ij+}}\Omega_{ijt}\right)^2\right)=$$

$$=s^2\left(\left(1+(1-\gamma_{rs})\frac{2}{\gamma}\right)\frac{\gamma_{rs}^2}{C_{rs+}}+\left(1-\gamma_{rs}\right)^2\sum_{i,j=1}^{I,J}\left(\frac{\gamma_{ij}^2}{\gamma}\right)^2\frac{1}{C_{ij+}}\right)$$

Таким образом, среднеквадратичное отклонение для группы (r,s) дается выражением:

$$DO_{rs}{}^2=a\cdot g_{rs}+s^2\cdot G_{rs}, \tag{30}$$

где

$$g_{rs}=(1-\gamma_{rs})^2\left[1-2\frac{\gamma_{rs}}{\gamma}+\sum_{i,j=1}^{I,J}\left(\frac{\gamma_{rs}}{\gamma}\right)^2\right],\ G_{rs}=\left(1+(1-\gamma_{rs})\frac{2}{\gamma}\right)\frac{\gamma_{rs}^2}{C_{rs+}}+\sum_{i,j=1}^{I,J}\left(\frac{\gamma_{rs}}{\gamma}\right)^2\frac{1}{C_{rs+}}. \tag{31}$$

Получим среднеквадратичное отклонение для оценки убыточности в неоднородной модели. В этом случае для $D_1^2=D_1^2(\Omega_i)$ имеем выражение:

$$D_1^2=E\left(\left((\Omega_{rs}-\gamma_{rs}\Omega_{rs}-(1-\gamma_{rs})\sum_{i,j,t=1}^{I,J,T}\frac{C_{i,j,t}}{C_{+++}}\Omega_{ij}\right)^2\right)=(1-\gamma_{rs})^2E\left(\Omega_{rs}-\sum_{i,j=1}^{I,J}\frac{C_{ij+}}{C_{+++}}\Omega_{ij}\right)^2=$$

$$=a(1-\gamma_k)^2\sum_{i,j=1}^{I,J}\left[\delta_{ir}\delta_{rs}-\frac{C_{ij+}}{C_{+++}}\right]^2=a(1-\gamma_{rs})^2\left(1-2\frac{C_{rs+}}{C_{+++}}+\sum_{i,j=1}^{I,J}\left(\frac{C_{ij+}}{C_{+++}}\right)^2\right).$$

Для $D_2^2=D_2^2(\Omega_{it})$ получим:

$$D_2^2 = E\left(\left(\gamma_{rs}\sum_{t=1}^{T}\frac{C_{rst}}{C_{rs+}}\Omega_{rst} + (1-\gamma_{rs})\sum_{i,j,t=1}^{I,J,T}\frac{C_{ijt}}{C_{+++}}\Omega_{ijt}\right)^2\right) = s^2\left(\frac{\gamma_{rs}^2}{C_{rs+}} + \frac{(1-\gamma_{rs}^2)}{C_{+++}}\right).$$

Таким образом, среднеквадратичное отклонение для k-й группы дается выражением:

$$DN_{rs}^{\ 2} = a\cdot g_{rs} + s^2\cdot G_{rs}\,, \tag{32}$$

где g_{rs} и G_{rs} задаются соотношениями (31).

Перейдем к моделированию и анализу убыточности по портфелю предпринимательских контрактов

7. Моделирование динамического портфеля рисков и результаты расчетов

Сформируем портфель рисков размерностью $I = 5$, $J = 7$, $T = 7$. Для моментов времени $t = 1,2,..T$ сформируем количества договоров в ячейке $N_{ij}(t)$ на основе равномерного распределения в диапазоне от 0 до 100. Максимально возможный размер убытков по каждой ячейке зададим выражением $C_{ij}(t) = N_{ij}(t)B_j = j\cdot N_{ij}(t)B_0$, где B_0 — единица измерения стоимости. Размер убытков сформируем в виде $Y_{ij}(t) = \chi_{ij}(t)C_{ij}(t)$, где $\chi_{ij}(t)$ — случайная величина, которая подчиняется бета-распределению с параметрами $a_{ij}(t) = -E(\chi) + 1 - E(\chi_{ij}(t))/f^2$, $b_{ij}(t) = a(1 - E(\chi_{ij}(t)))/E(\chi_{ij}(t))$, определяемыми из выражений для математического ожидания $E(\chi)$ и дисперсии $Var(\chi)$ [4]. При моделировании положим $Var(\chi)/E(\chi) = f^2 = const$ для всех i, j, t. Величина χ_0 задается так: $\chi_{ij}^{(0)}(t) = \left(q_i^{(0)} + q_i^{(1)}t\right)\left(p_j^{(0)} + p_j^{(1)}t\right)$.

Портфель предпринимательских контрактов, полученный для $t = 1$ приведет в таблице 2.

Таблица 2

Модельные данные убыточности ($t = 1$), %

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$i=1$	2,25	2,68	5,48	1,57	3,66	2,02	2,52
$i=2$	3,05	3,87	5,23	2,02	4,46	2,45	2,85
$i=3$	4,78	6,88	10,36	3,54	7,74	4,47	5,23
$i=4$	1,29	1,54	3,53	0,98	2,46	1,42	1,81
$i=5$	3,24	4,43	7,94	2,22	5,23	2,14	3,78

На основе модельного портфеля рисков получим оценки параметров m, a и s^2 модели (1), рассчитанные по формулам (3) — (5). Результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3

Оценки параметров модели

m	W	V	K	a	s^2
4,103%	$3{,}057\cdot10^{-6}$	$1{,}588\cdot10^{-6}$	$4{,}069\cdot10^{-3}$	$3{,}61\cdot10^{-4}$	740,360

Коэффициенты γ_{rs}, рассчитанные по формуле (15), приведены в табл. 4.

Таблица 4

Оценки параметров модели ($\gamma = 28{,}67356$)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$i=1$	0,658249	0,750841	0,852788	0,901076	0,910254	0,928671	0,885692
$i=2$	0,616734	0,822456	0,686942	0,856497	0,850317	0,877572	0,867613
$i=3$	0,545361	0,721013	0,771649	0,873805	0,871833	0,89424	0,913655
$i=4$	0,625824	0,7579	0,835422	0,86553	0,840417	0,94444	0,931115
$i=5$	0,670864	0,667664	0,88855	0,837379	0,906147	0,917873	0,927176

В табл. 5 приведены оценки $XO = X_{ij}^{(T+1)}$ для однородной схемы и $XN = X_{ij}^{(T+1)}$ для неоднородной.

Таблица 5

Оценки убыточности для однородной и неоднородной модели, %

j / i	1		2		3		4		5		6		7	
	XO	*XN*	***XO***	*XN*	***XO***	*XN*	***XO***	*XN*	***XO***	*XN*	***XO***	*XN*	***XO***	*XN*
1	**3,43**	3,32	**4,01**	3,93	**5,56**	5,51	**2,53**	2,50	**3,57**	3,54	**2,64**	2,62	**3,02**	2,98
2	**3,89**	3,77	**4,59**	4,53	**6,78**	6,68	**3,36**	3,31	**5,43**	5,38	**3,00**	2,96	**4,68**	4,64
3	**5,60**	5,45	**6,35**	6,26	**10,60**	10,53	**4,42**	4,38	**7,01**	6,97	**5,71**	5,67	**5,97**	5,94
4	**3,12**	3,00	**2,92**	2,84	**4,21**	4,16	**1,79**	1,75	**3,50**	3,45	**1,92**	1,90	**2,22**	2,20
5	**3,99**	3,89	**4,94**	4,83	**7,73**	7,69	**3,12**	3,07	**5,13**	5,10	**3,86**	3,83	**4,23**	4,20

Отметим, что для однородной схемы равенство (21) выполняется, для неоднородной – нет. Выбор в качестве прогноза оценок однородной или неоднородной схемы является достаточно дискуссионным [4; 5]. Скорее всего, следует ориентироваться на динамику совокупного размера убытков в целом по портфелю на каждый момент времени, то есть на динамику убыточности $X_{++}(t)$. На рисунке приведен график величины $XT_t = X_{++}(t)$.

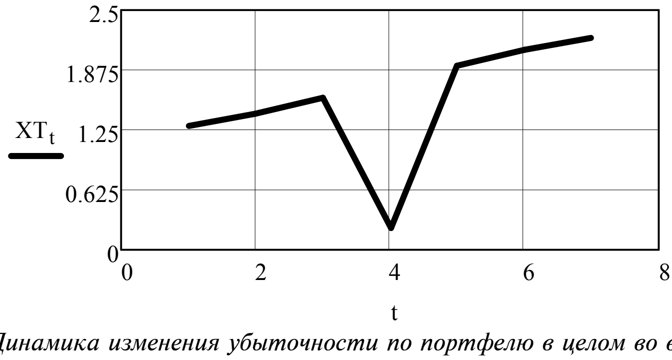

Рис. Динамика изменения убыточности по портфелю в целом во времени

Как можно видеть, для данного модельного примера в качестве прогнозных значений следует применять оценки неоднородной схемы.

В табл. 6 приведены среднеквадратичные отклонения $DO_{rs}^{\ 2}$, рассчитанные по формулам (30), (31) для однородной схемы, и $DN_{rs}^{\ 2}$, рассчитанные по формулам (31), (32) для неоднородной модели.

Таблица 6

Среднеквадратичные отклонения для однородной и неоднородной модели, %

J i	1		2		3		4		5		6		7	
	DO	*DN*	***DO***	*DN*	***DO***	*DN*	***DO***	*DN*	***DO***	*DN*	***DO***	*DN*	***DO***	*DN*
1	**1,13**	1,12	**0,96**	0,95	**0,74**	0,73	**0,62**	0,60	**0,59**	0,57	**0,53**	0,51	**0,66**	0,64
2	**1,19**	1,19	**0,82**	0,80	**1,08**	1,07	**0,74**	0,72	**0,75**	0,74	**0,68**	0,67	**0,71**	0,69
3	**1,30**	1,29	**1,02**	1,01	**0,92**	0,91	**0,69**	0,68	**0,70**	0,68	**0,64**	0,62	**0,57**	0,56
4	**1,18**	1,17	**0,95**	0,94	**0,79**	0,77	**0,71**	0,70	**0,77**	0,76	**0,47**	0,45	**0,52**	0,50
5	**1,10**	1,10	**1,11**	1,10	**0,65**	0,64	**0,78**	0,77	**0,60**	0,58	**0,56**	0,55	**0,53**	0,51

Данный метод расчета для определения размера убытков и прогноза убыточности от портфеля рисков можно применять практически во всех видах предпринимательской деятельности в том случае, если есть данные, на основе которых можно сформировать базовую модель рискового портфеля. Достоинство метода заключается в возможности его применения к агрегированным данным и в отсутствии каких-либо вероятностных предположений о характере наступления рисков и о распределении возможных убытков. На основе полученных оценок убыточности назначаются тарифные нетто-ставки по договорам страхования, определяются минимальные процентные ставки, при осуществлении кредитных операций, позволяющие компенсировать риск неплатежеспособности заемщиков. При осуществлении поставок продукции, выполнении работ, оказании услуг и прочих видов предпринимательства определение размера предстоящих убытков на основе оценок убыточности позволяет калькулировать себестоимость.

Библиографический список

1. Panjer H.H. Recursive evaluation of a family of compound distributions // ASTIN Bulletin. 1981. № 12. P. 22—26.

2. De Pril. On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model // Astin Bulletin. 1986. № 16. P. 109—112.

3. Михайлова Е.В., Авряскина М.А. Рекуррентные методы построения кумулятивных функций риска // Математическая физика и ее приложения: материалы 2-й межд. конф. / под ред. И.В. Воловича и Ю.Н. Радаева. Самара: Книга, 2010. С. 239—241.

4. Михайлова Е.В., Никишов В.Н. Применение доверительной теории Бюльмана — Штрауба для анализа рентабельности // Математическая физика и ее приложения: материалы 2-й межд. конф. / под ред. И.В. Воловича и Ю.Н. Радаева. Самара: Книга, 2010. С. 242—244.

5. Современная актуарная теория риска / Р. Каас [и др.]; пер. с англ. А.А. Новоселова; под ред. В.К. Малиновского. М.: Янус-К, 2007. 372 с.

6. Штрауб Э. Актуарная математика имущественного страхования. М.: КРОКУС-Т, 1990.

7. Мак Т. Математика рискового страхования. М.: Олимп—Бизнес, 2005. 432 с.

8. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.

E.V. Mihailova, V.N. Nikishov, L.A. Saraev*

THE BUHLMANN – STRAUB MODEL'S GENERALIZATION FOR THE EVALUATION OF LOSSES OF DYNAMIC PORTFOLIO OF RISKS

A generalization of method of Buhlmann – Straub for the dynamic portfolio of risk was performed in this article. Application of the method is considered on the example of the modeled portfolio of business risks.

Key words: unprofitability, portfolio of risks, estimation of parameters of the model, Buhlmann – Straub model.

* *Mihailova Ekaterina Vladimirovna* (e.v.mihailova@mail.ru), the Dept. of Civil Procedural Law and Entrepreneurial Law, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation; *Nikishov Viktor Nikolaevich* (Tsh-sea05@yandex.ru), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev@ssu.samara.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.