УДК 330.101.54

А.Л. Сараев, Л.А. Сараев *

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНОЙ РАВНОВЕСНОЙ ЦЕНЫ НЕОДНОРОДНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО КОНКУРЕНТНОГО РЫНКА

В публикуемой работе предложена математическая модель расчета равновесных цен для случайно неоднородного многокомпонентного рынка. Статистическое усреднение локальных уравнений спроса и предложения со случайными параметрами позволяет установить макроскопические определяющие соотношения спроса и предложения для неоднородного рынка, вычислить их эффективные характеристики и установить для них верхнюю и нижнюю границы.

Ключевые слова: определяющие соотношения, эффективные характеристики, статистическая однородность, эргодичность, усреднение, макроскопические свойства.

1. Эффективные характеристики функций спроса и предложения для двухкомпонентного рынка

Пусть в различные сегменты распределенного рынка одного продукта продвигают свою продукцию два различных поставщика. Объем товара, предлагаемый первым поставщиком, составляет Q_1, второго – Q_2. Общий объем этого товара составляет $Q = Q_1 + Q_2$. Предположим, что функции спроса и предложения цены p являются линейными [1]

$$D_i(p) = -a_i p + b_i \,,\; S_i(p) = \alpha_i p + \beta_i \;\; (i = 1{,}2). \tag{1}$$

Очевидно, что спрос с ростом цены убывает $(a_i > 0, b_i > 0)$, и предложение с ростом цены растет $(\alpha_i > 0, \beta_i > 0)$. При этом при нулевой цене спрос превышает предложение $(b_i > \beta_i)$.

Если бы сегменты рынка не взаимодействовали между собой и поставщики были бы совершенно независимы друг от друга, то в каждом таком сегменте установились бы равновесные цены

$$p_i^e = \frac{b_i - \beta_i}{a_i - \alpha_i} \;(i = 1{,}2). \tag{2}$$

Поведение рынка с независимыми сегментами представлено на рис. 1 на графиках функций спроса и предложения.

Структура расположения сегментов в рыночном пространстве рассматриваемого двухкомпонентного рынка может быть описана индикаторными функциями координат $\kappa_i(Q)\,(i = 1{,}2)$, каждая их которых равна единице в объеме Q_i и нулю вне этого объема.

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev@ssu.samara.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

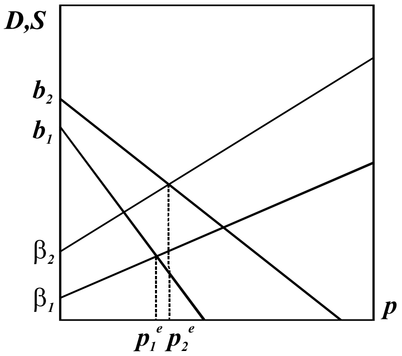

Рис. 1

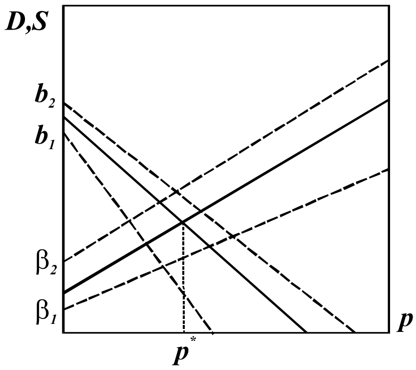

Рис. 2

Функции спроса и предложения принимают вид

$$D(p) = -(a_1\kappa_1 + a_2\kappa_2)p + b_1\kappa_1 + b_2\kappa_2,$$
$$S(p) = (\alpha_1\kappa_1 + \alpha_2\kappa_2)p + \beta_1\kappa_1 + \beta_2\kappa_2. \quad (3)$$

Индикаторные функции, функции спроса и предложения, цены предполагаются случайными, статистически однородными и эргодическими полями, и их статистическое осреднение заменяется осреднением по объемам

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Q}\int_Q f(Q)dQ, \langle f \rangle_i = \frac{1}{Q_i}\int_{Q_i} f(Q)dQ \ (i = 1,2) \quad (4)$$

Для установления макроскопического поведения участников распределенного рынка необходимо установить связь между средними значениями величин спроса, предложения и цен

$$\langle D \rangle = -a^*\langle p \rangle + b^*, \langle S \rangle = \alpha^*\langle p \rangle + \beta^*. \quad (5)$$

Здесь $a^*, b^*, \alpha^*, \beta^*$ — эффективные значения величин. Предполагается, что флуктуациями величин на границах всего рынка можно пренебречь.

Макроскопические уравнения (5) устанавливают эффективную равновесную цену, определяющую поведение распределенного двухкомпонентного рынка в целом

$$p^* = \frac{b^* - \beta^*}{a^* - \alpha^*}. \quad (6)$$

Поведение рынка с взаимодействующими сегментами представлено на рис. 2 на графиках функций спроса и предложения. Штриховые линии соответствуют функциям спроса и предложения каждого компонента рынка, сплошные линии соответствуют макроскопическим функциям спроса и предложения рынка в целом.

Для вычисления эффективных характеристик соотношений (5) необходимо усреднить уравнения (3) по полному объему Q

$$\langle D \rangle = -\langle a \rangle\langle p \rangle + \langle b \rangle - \langle a'p' \rangle,$$
$$\langle S \rangle = \langle \alpha \rangle\langle p \rangle + \langle \beta \rangle + \langle \alpha'p' \rangle. \quad (7)$$

Здесь

$$\langle a\rangle = a_1c_1 + a_2c_2\,,\quad \langle b\rangle = b_1c_1 + b_2c_2\,,$$
$$\langle \alpha\rangle = \alpha_1c_1 + \alpha_2c_2\,, \langle \beta\rangle = \beta_1c_1 + \beta_2c_2\,.$$

Величины

$$c_i = \langle \kappa_i\rangle = \frac{Q_i}{Q}\,(i = 1{,}2)$$

представляют собой относительные объемы товаров, при этом всегда имеет место соотношение $c_1 + c_2 = 1$. Штрихами обозначены флуктуации величин в полном объеме Q.

Величина $\langle a'p'\rangle$ в первой из формул (7) выражается соотношением

$$\langle a'p'\rangle = c_1c_2\left(\langle p\rangle_1 - \langle p\rangle_2\right)(a_1 - a_2)\,. \tag{8}$$

Здесь использованы очевидные свойства индикаторных функций κ_i

$$\kappa_1 + \kappa_2 = 1, \kappa_1\kappa_2 = 0\,, \kappa_1' + \kappa_2' = 0\,,$$
$$\langle \kappa_1'^2\rangle = c_1c_2\,, \langle \kappa_2'^2\rangle = c_1c_2\,, \langle \kappa_1'\kappa_2'\rangle = -c_1c_2.$$

Можно показать, что если в первом равенстве (7) пренебречь третьим слагаемым, то получится верхняя оценка макроскопической функции спроса

$$\langle D\rangle \le D_F\,,\ D_F = -\langle a\rangle\langle p\rangle + \langle b\rangle = -a_F\,\langle p\rangle + b_F\,.\,. \tag{9}$$

Здесь $a_F = a_1c_1 + a_2c_2\,, b_F = b_1c_1 + b_2c_2$.

Неравенство (9) можно получить из первого равенства (7) заменой $p = \langle p\rangle$. Такой способ осреднения соответствует параллельному взаимодействию участников распределенного рынка и называется осреднением Фойгта [2].

Можно также показать, что, если воспользоваться при осреднении заменой $D = \langle D\rangle$, получится нижняя оценка макроскопической функции спроса

$$\langle D\rangle \ge D_R\,,\ D_R = -\left\langle \frac{1}{\left\langle \frac{1}{a}\right\rangle}\right\rangle\langle p\rangle + \left\langle \frac{\left\langle \frac{b}{a}\right\rangle}{\left\langle \frac{1}{a}\right\rangle}\right\rangle = -a_R\langle p\rangle + b_R. \tag{10}$$

Здесь $a_R = \dfrac{1}{\dfrac{c_1}{a_1} + \dfrac{c_2}{a_2}}, b_R = \dfrac{\dfrac{b_1}{a_1}c_1 + \dfrac{b_2}{a_2}c_2}{\dfrac{c_1}{a_1} + \dfrac{c_2}{a_2}}.$

Этот способ осреднения соответствует последовательному взаимодействию участников распределенного рынка и называется осреднением Рейсса [2]. Таким образом, всевозможные модели макроскопической функции спроса заключены между верхними и нижними границами

$$D_R \le \langle D\rangle \le D_F\,. \tag{11}$$

Одной из распространенных оценок эффективных характеристик является модель Хилла, представляющая собой среднее арифметическое верхней и нижней границ

$$D_H = \frac{D_R + D_F}{2} = a_H \langle p \rangle + b_H . \tag{12}$$

Здесь

$$a_H = -\frac{1}{2}\left(a_1 c_1 + a_2 c_2 + \frac{1}{\dfrac{c_1}{a_1} + \dfrac{c_2}{a_2}} \right), b_H = \frac{1}{2}\left(b_1 c_1 + b_2 c_2 + \frac{\dfrac{b_1}{a_1} c_1 + \dfrac{b_2}{a_2} c_2}{\dfrac{c_1}{a_1} + \dfrac{c_2}{a_2}} \right).$$

Совершенно аналогично могут быть получены модели верхней и нижней границ для макроскопической функции предложения $\langle S \rangle$.

Так если во втором равенстве (7) пренебречь третьим слагаемым, то получится верхняя оценка макроскопической функции предложения

$$\langle S \rangle \le S_F , S_F = -\langle \alpha \rangle \langle p \rangle + \langle \beta \rangle = -\alpha_F \langle p \rangle + \beta_F . \tag{13}$$

Здесь $\alpha_F = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 , \beta_F = \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$.

Неравенство (13) получается из равенства (7) подстановкой $p = \langle p \rangle$ и соответствует параллельному взаимодействию участников распределенного рынка.

Если же воспользоваться при осреднении подстановкой $S = \langle S \rangle$, то получится нижняя оценка макроскопической функции предложения

$$\langle S \rangle \ge S_R , S_R = -\left\langle \frac{1}{\left\langle \dfrac{1}{\alpha} \right\rangle} \right\rangle \langle p \rangle + \left\langle \frac{\left\langle \dfrac{\beta}{\alpha} \right\rangle}{\left\langle \dfrac{1}{\alpha} \right\rangle} \right\rangle = -\alpha_R \langle p \rangle + \beta_R . \tag{14}$$

Здесь

$$\alpha_R = \frac{1}{\dfrac{c_1}{\alpha_1} + \dfrac{c_2}{\alpha_2}}, \beta_R = \frac{\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} c_1 + \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} c_2}{\dfrac{c_1}{\alpha_1} + \dfrac{c_2}{\alpha_2}} .$$

Такое осреднение отвечает последовательному взаимодействию участников распределенного рынка. Всевозможные модели макроскопической функции предложения заключены между верхними и нижними границами

$$S_R \le \langle S \rangle \le S_F . \tag{15}$$

Среднее арифметическое Хилла для верхней и нижней границ имеет вид

$$S_H = \frac{S_R + S_F}{2} = \alpha_H \langle p \rangle + \beta_H . \tag{16}$$

Здесь

$$\alpha_H = -\frac{1}{2}\left(\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \frac{1}{\dfrac{c_1}{\alpha_1} + \dfrac{c_2}{\alpha_2}}\right), \beta_H = \frac{1}{2}\left(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \frac{\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} c_1 + \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} c_2}{\dfrac{c_1}{\alpha_1} + \dfrac{c_2}{\alpha_2}}\right).$$

Сравнивая макроскопические функции спроса и предложения (9), (10), (12) и (13), (14), (16), находим верхнюю и нижнюю границы и их среднее арифметическое для эффективной равновесной цены (6)

$$p_R \le p^* \le p_F\,,\ p_H = \frac{p_F + p_R}{2}. \tag{17}$$

Здесь

$$p_F = \frac{b_F - \beta_F}{a_F - \alpha_F},\ p_R = \frac{b_R - \beta_R}{a_R - \alpha_R}, p_H = \frac{b_H - \beta_H}{a_H - \alpha_H}.$$

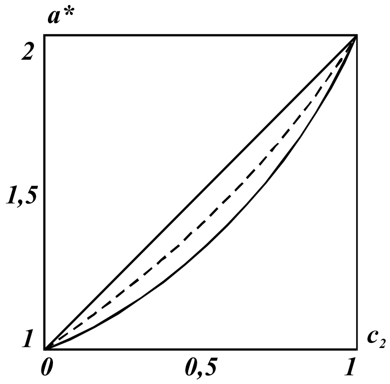

Рис. 3

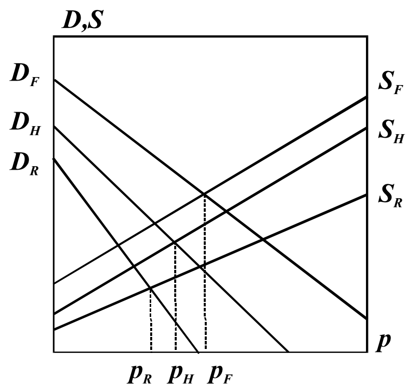

Рис. 4

На рис. 3 приведены кривые зависимостей эффективного коэффициента a^* от относительного объемного содержания второго товарного компонента рынка c_2. Сплошные линии соответствуют верхним и нижним границам Фойгта – Рейсса $a_R \le a^* \le a_F$, штриховая линия соответствует модели Хилла $a^* = a_H$.

На рис. 4 приведены макроскопические кривые верхних и нижних границ и их среднего арифметического для спроса и предложения. Точки пересечения этих кривых образуют соответствующие модели эффективных равновесных цен.

2. Эффективные характеристики функций спроса и предложения для многокомпонентного рынка

Пусть теперь в различные сегменты распределенного рынка одного продукта продвигают свою продукцию несколько различных поставщиков. Объем товара каждого поставщика составляет $Q_i\ (i = 1..n)$, общий объем этого товара составляет $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$.Функции спроса и предложения цены p по-прежнему предполагаются линейными [1]

$$D_i(p) = -a_i p + b_i\ ,\ S_i(p) = \alpha_i p + \beta_i\ , (i = 1..n). \tag{18}$$

Структура расположения сегментов в рыночном пространстве рассматриваемого многокомпонентного рынка может быть описана набором индикаторных функций координат $\kappa_i(Q)\,(i = 1..n)$, каждая их которых равна единице в объеме Q_i и нулю вне этого объема.

В общем случае индикаторные функции κ_i удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} \kappa_i = 1, \sum_{i=1}^{n} \kappa'_i = 0, \\ \kappa_i \kappa_j = \begin{cases} 0 & ,i \neq j, \\ \kappa_i & ,i = j, \end{cases} \\ \left\langle \kappa_i'^2 \right\rangle = c_i(1 - c_i), \left\langle \kappa'_i \kappa'_j \right\rangle = -c_i c_j . \end{gathered} \tag{19}$$

Применяя описанную выше методику расчета эффективных параметров определяющих соотношений, находим верхние и нижние оценки Фойгта – Рейсса и модель Хилла для макроскопической функции спроса

$$\begin{gathered} D_R \leq \langle D \rangle \leq D_F, \\ D_F = -a_F \langle p \rangle + b_F, \\ D_R = -a_R \langle p \rangle + b_R, \\ D_H = -a_H \langle p \rangle + b_H. \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь

$$\begin{gathered} a_F = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i\ , b_F = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i\ , a_R = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c_i}{a_i}}, b_R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \dfrac{b_i}{a_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c_i}{a_i}}, \\ a_H = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i a_i + \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c_i}{a_i}} \right), b_H = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i b_i + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \dfrac{b_i}{a_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c_i}{a_i}} \right). \end{gathered} \tag{21}$$

Выполняя аналогичные расчеты для макроскопической функции предложения, находим для нее верхние и нижние оценки Фойгта – Рейсса и модель Хилла

$$\begin{gathered} S_R \leq \langle S \rangle \leq S_F, \\ S_F = \alpha_F \langle p \rangle + \beta_F, \\ S_R = \alpha_R \langle p \rangle + \beta_R, \\ S_H = \alpha_H \langle p \rangle + \beta_H. \end{gathered} \tag{22}$$

Здесь

$$\alpha_F=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i,\beta_F=\sum_{i=1}^{n}c_i\beta_i,\alpha_R=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\alpha_i}},\beta_R=\frac{\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\beta_i}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\alpha_i}},$$
$$\alpha_H=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i+\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\alpha_i}}\right),\beta_H=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\beta_i+\frac{\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\beta_i}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\alpha_i}}\right). \quad (23)$$

Очевидно, что при $n=2$ результаты (18) – (23) полностью совпадают с формулами (9) – (16) для двухкомпонентного рынка.

Библиографический список

1. Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 2002, 400 с.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: МИР, 1982, 336 с.

A.L. Saraev, L.A. Saraev *

TO THE CALCULATION OF EFFECTIVE EQUILIBRIUM PRICE OF HETEROGENEOUSLY DISTRIBUTED COMPETITIVE MARKET

In the published paper we propose a mathematical model to calculate the equilibrium price for a randomly heterogenous multicomponent market. The statistical averaging of local supply and demand equations with random parameters allows us to establish the macroscopic constitutive relations of supply and demand for heterogeneous market, to calculate their effective performance and set their lower and upper bounds.

Key words: constitutive relations, effective characteristic, statistical homogeneity, ergodicity, averaging, macroscopic properties.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev@ssu.samara.ru),the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.