МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 2012 Ю.Г. Абакумов, М.А. Верхотурова, Е.С. Коган[1]

В данной статье рассматривается задача нахождения точных констант $A_H^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$ методами суммирования рядов Фурье. Также излагаются ряд результатов, относящихся к константам $A_H^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$, существование параметров r_j.

Ключевые слова: методы суммирования рядов Фурье, тригонометрические операторы Баскакова, точные константы.

Введение

Пусть имеется последовательность операторов $\{L_n\}$, $L_n : C_{2\pi} \to T_{\rho(n)}$, где $T_{\rho(n)}$ — множество тригонометрических полиномов порядка $\rho(n) = O(n)$.

Говорят, что $f(t) \in C_{2\pi}$ принадлежит множеству (классу) $Lip_M 1$, где $M > 0$ действительное число, если $\forall t_1, t_2$ выполнено $|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant M\,|t_1 - t_2|$. Обозначают также $Lip1 = \bigcup\limits_{M>0} Lip_M 1$.

Предполагаем, что последовательность $\{L_n\}$ приближает класс $Lip1$ с наилучшим порядком, то есть

$$f(t) \in Lip1 \Rightarrow \|L_n(f,x) - f(x)\| = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1}$$

где $\|...\|$ — чебышевская норма.

Если для последовательности $\Lambda = \{L_n\}$ существует предел $A_H^{(\Lambda)} = \lim\limits_{n\to\infty} n \sup\limits_{f\in Lip_1 1} \|L_n(f,x) - f(x)\|$, то константу $A_H^{(\Lambda)}$ будем называть наилучшей (или точной) константой в оценке приближения операторами L_n функций класса $Lip1$.

Если указанный выше предел существует, то для $f(t) \in Lip_M 1$ выполняется оценка

$$\|L_n(f,x) - f(x)\| \leqslant M{\cdot}A_H^{(\Lambda)} \cdot n^{-1} + o(n^{-1}). \tag{2}$$

При этом в определенном смысле константу $A_H^{(\Lambda)}$ улучшить нельзя.

[1]Абакумов Юрий Георгиевич (abakumovug@yandex.ru), Верхотурова Мария Алексеевна (verhoturova@yandex.ru), Коган Евгения Семеновна (eskogan@mail.ru), кафедра информатики, вычислительной техники и прикладной математики Читинского государственного университета, 672039, Российская Федерация, г. Чита, ул. Александрово-Заводская, 30.

Для любой конкретной последовательности $\Lambda = \{L_n\}$, удовлетворяющей (1), естественно поставить задачу нахождения аналитического выражения константы $A_H^{(\Lambda)}$. В предлагаемой статье эта задача рассматривается для совокупности аппроксимирующих последовательностей $M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$, которые (см., например [1]) называют тригонометрическими операторами Баскакова.

Операторы $M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(f,x)$ имеют вид

$$M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(f,x) = \frac{2^{m-1}\prod\limits_{j=1}^{m}\sin^2\frac{\pi k_j}{n}}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t+x)\sin^2\frac{nt}{2}\,dt}{\sin^2\frac{t}{2}\prod\limits_{j=1}^{m}\left(\cos t-\cos\frac{2\pi k_j}{n}\right)},$$

где m,k_j — целые положительные параметры $0<k_1<k_2<...<k_m<\frac{n}{2}$.

Операторы Баскакова являются методами суммирования рядов Фурье, то есть представляются в виде

$$M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\left(\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-m-1}\lambda_{i,n}^{[m](k_1,\ldots,k_m)}\cos it\right)dt,$$

где $\lambda_{i,n}^{[m](k_1,\ldots,k_m)} = 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\prod\limits_{l=1,j\neq l}^{m}\left(cos\frac{2k_l\pi}{n}-1\right)}{\prod\limits_{l=1,j\neq l}^{m}\left(cos\frac{2k_l\pi}{n}-cos\frac{2k_j\pi}{n}\right)}\cdot\frac{sin\frac{i2k_j\pi}{n}}{sin\frac{2k_j\pi}{n}}$.

В дальнейшем в этой статье рассматривается задача нахождения точных констант в оценке приближения функций класса $Lip_M 1$ операторами Баскакова. Константы будем обозначать $A_H^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$. Исходным пунктом в изложении материала является следующий результат [1; 2]: если уравнение

$$G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(r)=\frac{1}{2}, G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(r)=\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int\limits_0^r\frac{sin^2t\,dt}{t^2\prod\limits_{j=1}^{m}\left(\pi^2k_j^2-t^2\right)},$$

имеет m корней $r_j,\ j=1,\ldots,m$, при этом $0<r_1<k_1\pi<r_2<k_2\pi<\ldots<r_m<$ $<k_m\pi$,то

$$A_H^{[m](k_1,\ldots,k_m)}=4\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int\limits_0^\infty\frac{m(t)sin^2t\,dt}{t\prod\limits_{j=1}^{m}\left(\pi^2k_k^2-t^2\right)}, m(t)=sign\left(\prod_{j=1}^{m}(r_j-t)\right).$$

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы доказать наличие m корней уравнения

$$G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(r)=\frac{1}{2}. \tag{3}$$

В настоящее время задача решена для $m=1,2,3$ при произвольных значениях k_j, а также для некоторых частных случаев $m=4,5$.

В этой статье излагается ряд результатов, относящихся к константам $A_H^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$: существование параметров $\{r_j\}$.

Часть результатов опубликована, однако публикации эти, как правило, представлены стаьями в малодоступных сборниках или материалах конференций.

Изложение большей частью замкнуто, все факты сопровождаются доказательствами.

1. Некоторые свойства функции $\mathbf{G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(r)}$

Предложение 1. При любых допустимых значениях параметров m, k_j выполняется

$$\lim_{r\to\infty} G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(r) = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Доказательство.

Известно [1; 3], что $M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(1,x) = 1$. В силу того, что равенство выполняется и при $x = 0$, а ядро операторов Баскакова — четная функция, имеем

$$\frac{2^m \prod\limits_{j=1}^{m} sin^2 \frac{k_j\pi}{n}}{\pi n} \int\limits_0^\pi \frac{sin^2 \frac{nt}{2}\ dt}{sin^2 \frac{t}{2} \prod\limits_{j=1}^{m}\left(cost - cos\frac{2\pi k_j}{n}\right)} = 1.$$

Произведя преобразования, получим

$$\frac{2^m \prod\limits_{j=1}^{m} sin^2 \frac{k_j\pi}{n}}{\pi n} \int\limits_0^\pi \frac{sin^2 \frac{nt}{2}\ dt}{sin^2 \frac{t}{2} \prod\limits_{j=1}^{m}\left(cost - cos\frac{2\pi k_j}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} sin^2 \frac{k_j\pi}{n}}{\pi n} \int\limits_0^\pi \frac{sin^2 \frac{nt}{2}\ dt}{sin^2 \frac{t}{2} \prod\limits_{j=1}^{m}\left(sin\left(\frac{k_j\pi}{n} - \frac{t}{2}\right) sin\left(\frac{k_j\pi}{n} + \frac{t}{2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{2\prod\limits_{j=1}^{m} sin^2 \frac{k_j\pi}{n}}{\pi n^2} \int\limits_0^{\frac{\pi n}{2}} \frac{sin^2 \tau\ d\tau}{sin^2 \frac{\tau}{2} \prod\limits_{j=1}^{m}\left(sin\left(\frac{k_j\pi}{n} - \frac{\tau}{2}\right) sin\left(\frac{k_j\pi}{n} + \frac{\tau}{2}\right)\right)} = 2G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}\left(\frac{\pi n}{2}\right) + o(1).$$

Отсюда $G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{1}{2} + o(1)$. Следовательно, выполняется (4). Предложение доказано.

Предложение 2. Функция $G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(r)$ имеет m экстремумов. Экстремумы достигаются в точках множества $M = \{\pi k_j\}_{j=1}^m$, при этом в точках множества $\{\pi k_{2j+1}\}_{j=0}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]-1}$ — максимум, в осиальных точках множества M — минимум.

Доказательство.

Имеем

$$\tfrac{d}{dr} G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(r) = \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^{m} k_j^2 \frac{sin^2 r}{r^2 \prod\limits_{j=1}^{m}\left(\pi^2 k_j^2 - r^2\right)}.$$

Эта функция положительна вблизи нуля и меняет знак в точках множества M. Отсюда, очевидно, следует утверждение, составляющее предложение 2.

Предложение доказано.

Следствие 1. При $m = 1$ уравнение (3) имеет единственный корень r_1, при этом $0 < r_1 < \pi k_1$.

Теорема 1. При любых целых k_j,$j = 1, 2, \ldots, m, m+1$, удовлетворяющих условию $0 < k_1 < \ldots < k_m < k_{m+1}$, выполняется неравенство

$$G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(k_1\pi) < G_{[m](k_1,\ldots,k_m,k_{m+1})}(k_1\pi). \tag{5}$$

Доказательство.

Для любого r имеем

$$G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(r) = \pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m} k_j^2 \int\limits_0^r \frac{sin^2 t\ dt}{t^2 \prod\limits_{j=1}^{m}\left(\pi^2 k_j^2 - t^2\right)} = \pi^{-1}\int\limits_0^r \frac{sin^2 t\ dt}{t^2 \prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-\frac{t^2}{\pi^2 k_j^2}\right)}.$$

Имеем, далее,

$$G_{[m](k_1,\ldots,k_m,k_{m+1})}(k_1\pi) = \pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\pi} \frac{sin^2 t}{t^2 \prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-\frac{t^2}{\pi^2 k_j^2}\right)} \cdot \frac{1}{1-\frac{t^2}{k_{m+1}^2\pi^2}}\ dt.$$

Так как при $t \in (0, k_1\pi], \left(1 - \frac{t^2}{k_{m+1}^2\pi^2}\right)^{-1} > 1$, то выполняется (5).

Теорема доказана.

Следствие 2. При $m = 2$ уравнение (3) имет два корня r_1, r_2, при этом $0 < r_1 < k_1\pi$, $k_1\pi < r_2 < k_2\pi$.

Доказательство.

Существование корня r_1 следует из того, что $G_{[2](k_1,k_2)}(k_1\pi) > G_{[1](k_1)}(k_1\pi) > \frac{1}{2}$.

Далее $G_{[2](k_1,k_2)}(r)$ на $[k_1\pi, k_2\pi]$ убывает, при этом $G_{[2](k_1,k_2)}(k_2\pi) < \frac{1}{2}$. Последнее неравенство следует из того, что $G_{[2](k_1,k_2)}(r)$ на $[k_1\pi, \infty)$, возрастая, стремится к $\frac{1}{2}$. Следствие таким образом доказано.

Теорема 2. При $m \geqslant 2$ и целых k_j, $j = 1, 2, \ldots, m, m+1$, удовлетворяющих условию $0 < k_1 < \ldots < k_m, k_{m+1}$, выполняется неравенство

$$G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(k_2\pi) > G_{[m](k_1,\ldots,k_m,k_{m+1})}(k_2\pi). \tag{6}$$

Доказательство.

Рассмотрим разность

$$G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(k_2\pi) - G_{[m](k_1,\ldots,k_m,k_{m+1})}(k_2\pi) = -\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m} k_j^2 \int\limits_0^{k_2\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\left(k_j^2\pi - t^2\right)}.$$

Обозначим

$$I_{[m](k_1,\ldots,k_m,k_{m+1})}(r) = -\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m} k_j^2 \int\limits_0^{r} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\left(k_j^2\pi - t^2\right)}. \tag{7}$$

Доказываемая теорема эквивалентна тому, что

$$I_{[m](k_1,\ldots,k_m,k_{m+1})}(k_2\pi) > 0. \tag{8}$$

Заметим, что функция $I_{[m](k_1,\ldots,k_{m+1})}(r)$ определена формулой (7) и при $m = 1$. Докажем сначала, что $\lim\limits_{r\to\infty} I_{[m](k_1,\ldots,k_{m+1})}(r) = 0$ (в том числе и при $m = 1$).

Действительно, $I_{[m](k_1,\ldots,k_m,k_{m+1})}(r) = G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(r) - G_{[m](k_1,\ldots,k_m,k_{m+1})}(r)$. При $r \to \infty$ и уменьшаемое, и вычитаемое стремятся к $\frac{1}{2}$. Это доказывает, что их разность стремится к нулю.

Пусть $m = 1$, тогда $I_{[1](k_1,k_2)}(r)$ на $r \in [k_2\pi, \infty)$, убывая, стремится к нулю. Следовательно, $I_{[1](k_1,k_2)}(k_2\pi) > 0$.

Докажем (8) индукцией по m.

Предположим, что при некотором $m > 1$ (8) доказано для $m-1$. Это означает, что выполняется $\int\limits_0^{k_2\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m}\left(k_j^2\pi^2 - t^2\right)} < 0$. Тогда $\int\limits_0^{k_1\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m}\left(k_j^2\pi^2 - t^2\right)} < -\int\limits_{k_1\pi}^{k_2\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m}\left(k_j^2\pi^2 - t^2\right)}$.

Покажем,что отсюда следует

$$\int\limits_{0}^{k_1\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\left(k_j^2\pi^2 - t^2\right)} < -\int\limits_{k_1\pi}^{k_2\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\left(k_j^2\pi^2 - t^2\right)}. \tag{9}$$

По теореме о среднем имеем

$$\int\limits_{0}^{k_1\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\left(k_j^2\pi^2 - t^2\right)} = \frac{1}{k_{m+1}^2\pi^2 - \xi_1^2} \cdot \int\limits_{0}^{k_1\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m}\left(k_j^2\pi^2 - t^2\right)},$$

$$-\int\limits_{k_1\pi}^{k_2\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\left(k_j^2\pi^2 - t^2\right)} = \frac{1}{k_{m+1}^2\pi^2 - \xi_2^2} \cdot \int\limits_{k_1\pi}^{k_2\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{m}\left(k_j^2\pi^2 - t^2\right)},$$

где $\xi_1 \in (0, k_1\pi)$, $\xi_2 \in (k_1\pi, k_2\pi)$. Из того, что $\left(k_{m+1}^2\pi^2 - \xi_1^2\right)^{-1} < \left(k_{m+1}^2\pi^2 - \xi_2^2\right)^{-1}$, получаем (9). А из (9) следует, что из выполнения (8) для $m-1$ вытекает выполнение неравенства (8) и для m. Теорема доказана.

Следствие 3. При $m = 3$ уравнение (3) имеет три корня r_1, r_2, r_3, при этом $0 < r_1, k_1\pi < r_2 < k_2\pi < r_3 < k_3\pi$.

Доказательство.

По теореме 1 получаем, что $G_{[3](k_1,k_2,k_3)}(k_1\pi) > \frac{1}{2}$, а по теореме 2, что $G_{[3](k_1,k_2,k_3)}(k_2\pi) < \frac{1}{2}$. Далее, на $[k_3\pi)$ $G_{[3](k_1,k_2,k_3)}(r)$, убывая, стремится к $\frac{1}{2}$. Отсюда $G_{[3](k_1,k_2,k_3)}(k_3\pi) > \frac{1}{2}$. Следствие доказано.

Теоремы 1 и 2 получены Е.Ю. Карымовой (см., например [4]). Таким образом правомерность аналитического выражения для $A_H^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$ доказана при $m = 1, 2, 3$.

2. Некоторые частные случаи при $\mathbf{m = 4, 5}$

Как уже было отмечено, при $m > 3$ доказать существование корней r_j, $j = 1, \ldots, m$ уравнения (3) не удалось. Задача решена лишь для некоторых частных случаев.

Рассмотрим сначала случаи, относящиеся к $m = 4$.

Предложение 3. Если $G_{[4](k_1,\ldots,k_4)}(k_3\pi) > \frac{1}{2}$, то уравнение (3) имеет четыре корня $\{r\}_{j=1}^4$, $0 < r_1 < k_1\pi,\ k_j\pi < r_{j+1} < k_{j+1}\pi,\ j = 1, 2, 3$.

Доказательство.

Очевидно, что уравнение (3) имеет четыре корня, указанных в формулеровке предложения, если $G_{[4](k_1,\ldots,k_4)}(k_1\pi) > \frac{1}{2}$, $G_{[4](k_1,\ldots,k_4)}(k_2\pi) < \frac{1}{2}$, $G_{[4](k_1,\ldots,k_4)}(k_3\pi) > \frac{1}{2}$, $G_{[4](k_1,\ldots,k_4)}(k_4\pi) < \frac{1}{2}$.

Выполнение первых двух неравенств гарантируется теоремами 1 и 2. Выполнение третьего неравенства предполагается по условию. Четвертое неравенство следует из того, что $G_{[4](k_1,\ldots,k_4)}(r)$ при $r \in [k_4\pi, \infty)$, возрастая, стремится к $\frac{1}{2}$. Предложение доказано.

Известно (см. следствие 3), что $G_{[3](k_1,k_2,k_3)}(k_3\pi) > \frac{1}{2}$. Есть предположение (которое в общем виде пока не доказано), что $G_{[4](k_1,\ldots,k_4)}(k_3\pi) > G_{[3](k_1,k_2,k_3)}(k_3\pi)$.

Последнее неравенство эквивалентно тому, что

$$\int\limits_0^{k_3\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{4}\left(k_j^2\pi^2 - t^2\right)} > 0. \qquad (10)$$

В известных конкретных случаях неравенство (10) подтверждается вычислениями, полученными с помощью программы MathCad. Но такие вычисления не имеют доказательной силы, тем более, что левая часть (10) имеет порядок $10^{-9} - 10^{-10}$.

Пусть $(k) = (k_1, k_2, k_3, k_4)$. Начнем с рассмотрения случая $(k) = (1, 2, 3, 4)$. Тогда левая часть неравенства примет вид: $\int\limits_0^{3\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{(\pi^2-t^2)(4\pi^2-t^2)(9\pi^2-t^2)(16\pi^2-t^2)} = \int\limits_0^{3\pi} F(t)\ dt$.

Представим $\int\limits_0^{3\pi} F(t)\ dt = \int\limits_0^{\pi} F(t)\ dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} F(t)\ dt + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} F(t)\ dt = I_1 + I_2 + I_3$, имеем $I_1 = \int\limits_0^{\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{4}(j^2\pi^2-t^2)}$. Во втором интеграле делаем замену $\tau = t - \pi$ (в записи переходим вновь к обозначению t вместо τ): $I_2 = -\int\limits_0^{\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{t(\pi-t)(4\pi^2-t^2)(9\pi^2-t^2)(4\pi+t)(5\pi+t)}$. В I_3 сделаем замену $\tau = t - 2\pi$ и перейдем к обозначению t вместо τ: $I_3 = \int\limits_0^{\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{t(\pi^2-t^2)(2\pi-t)(3\pi^2+t)(4\pi+t)(5\pi+t)(6\pi+t)}$.

Произведя сложение, получим $I_1 + I_2 + I_3 = \int\limits_0^{\pi} \frac{sin^2(3t^2+9\pi t+6\pi^2)\ dt}{\prod\limits_{j=1}^{4}(j^2\pi^2-t^2)(5\pi+t)(6\pi+t)}$.

Так как подынтегральная функция положительна на $(0, \pi)$, выполняется неравенство $I_1+I_2+I_3 = \int\limits_0^{3\pi} F(t)\ dt > 0$. Рассмотрение случая $(k) = (1, 2, 3, 4)$ закончено.

Случай $(k) = (1, 3, 4, 5)$ будем исследовать по схожей схеме с незначительными дополнениями. Аналогично предыдущему случаю приходим к выводу, что задача сводится к доказательству неравенства $\int\limits_0^{4\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{(\pi^2-t^2)\prod\limits_{j=3}^{5}(j^2\pi^2-t^2)} > 0$. Обозначим и в этом случае подынтегральную функцию $F(t)$. Но на этот раз промежуток интегрирования разбиваем не на три, а на четыре части $\int\limits_0^{4\pi} F(t)\ dt = \int\limits_0^{\pi} F(t)\ dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} F(t)\ dt + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} F(t)\ dt + \int\limits_{3\pi}^{4\pi} F(t)\ dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$. Делаем замены: во втором интеграле $\tau = t - \pi$, в третьем $\tau = t - 2\pi$, в четвертом $\tau = t - 3\pi$. Результаты записываем, переходя к обозначению t для переменной вместо τ:

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{(\pi^2-t^2)\prod\limits_{j=3}^{5}(j^2\pi^2-t^2)}, I_2 = -\int\limits_0^{\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{t(3\pi-t)(4\pi^2-t^2)(16\pi^2-t^2)(5\pi+t)(6\pi+t)},$$

$$I_3 = -\int\limits_0^{\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{(\pi^2-t^2)(2\pi-t)(9\pi^2-t^2)(5\pi+t)(6\pi+t)(7\pi+t)},$$

$$I_4 = \int\limits_0^{\pi} \frac{sin^2 t\ dt}{t(\pi-t)(4\pi^2-t^2)(4\pi+t)(6\pi+t)(7\pi+t)(8\pi+t)}.$$

Складывая, получим $I_1+I_2+I_3+I_4=\int\limits_0^{\pi}\frac{P(t)sin^2t\;dt}{Q(t)}$, где $Q(t)=t(\pi^2-t^2)\prod\limits_{j=2}^{4}(j^2\pi^2-$ $-t^2)\prod\limits_{j=6}^{8}(j\pi-t)$, $P(t)=60\pi^6+402t\pi^5+530t^2\pi^4+156t^3\pi^3-64t^4\pi^2-36t^5\pi-4t^6$.

Очевидно, что при $t\in(0,\pi)$ знаменатель $Q(t)>0$. Можно убедиться, что и $P(t)>0$ при $t\in[0,\pi]$. В самом деле, положим $t=\pi\tau$, тогда $\tau\in[0,1]$.

Получаем $P(t)=P(\pi\tau)=\pi^6(60+402\tau+503\tau^2+156\tau^3-64\tau^4-36\tau^5-4\tau^6)>0$. Последнее неравенство следует из того, что при $\tau\in[0,1]$ выполняется неравенство $402\tau+530\tau^2+156\tau^3\geqslant 64\tau^4+36\tau^5+4\tau^6$. Рассмотрение случая $(k)=(1,3,4,5)$ закончено.

После рассмотрения исследованных выше частных случаев может возникнуть предположение, что после приведения интеграла в левой части неравенства (10) к промежутку $[0,\pi]$ мы всегда будем получать неотрицательное подынтегральное выражение. Однако в случае $(k)=(1,2,4,5)$ это предположение не находит подтверждения.

В этом случае получается равенство $\int\limits_0^{4\pi}\frac{sin^2t\;dt}{(\pi^2-t^2)(4\pi^2-t^2)(16\pi^2-t^2)(25\pi^2-t^2)}=$ $=\int\limits_0^{\pi}\frac{P(t)sin^2t\;dt}{h(t)g(t)}$, где $h(t)=t(\pi-t)$, $g(t)=(\pi+t)\prod\limits_{j=2}^{5}(j^2\pi^2-t^2)\prod\limits_{j=6}^{8}(j^2\pi^2-t^2)$, $P(t)=-$ $-4t^6-36t^5\pi-44t^4\pi^2+276t^3\pi^3+1000t^2\pi^4-1272t\pi^5-640\pi^6$. Так как $P(0)=-640\pi^6$, $P(\pi)=1824\pi^6$, то $P(t)$ меняет знак на $[0,\pi]$. Следовательно, меняет знак и все подынтегральное выражение.

Докажем, что $\int\limits_0^{\pi}\frac{P(t)sin^2t\;dt}{h(t)g(t)}>0$. Доказательство основывается на ряде оценок, легко проверяемых или очевидных. Функция $P(t)$ возрастает на $[0,\pi]$ и имеет корень в точке $t=\tau_0$, $1,19<\tau_0<1,195$. Далее

$$\frac{\int\limits_{\tau_0}^{\pi}P(t)\;dt}{-\int\limits_0^{\tau_0}P(t)\;dt}=\delta_0\approx 3,9. \tag{11}$$

Функция $h_1(t)=\frac{sin^2t}{t(\pi-t)}$ симметрична относительно середины отрезка $[0,\pi]$ и выпукла вверх. Из этого следует, что

$$\frac{\int\limits_{\tau_0}^{\pi}h_1(t)P(t)\;dt}{-\int\limits_0^{\tau_0}h_1(t)P(t)\;dt}>\delta_0. \tag{12}$$

Функция $(g(t))^{-1}$ на $[0,\pi]$ положительная и убывающая, при этом $\frac{(g(0))^{-1}}{(g(\pi))^{-1}}=$ $=1,8$. Тогда в силу (11), (12) имеем $\int\limits_{\tau_0}^{\pi}\frac{P(t)sin^2t\;dt}{h(t)g(t)}>\int\limits_{\tau_0}^{\pi}\frac{P(t)sin^2t\;dt}{h(t)g(\pi)}>-\int\limits_0^{\tau_0}\frac{P(t)sin^2t\;dt}{h(t)g(0)}>$ $>-\int\limits_0^{\tau_0}\frac{P(t)sin^2t\;dt}{h(t)g(t)}$. Отсюда $\int\limits_0^{\pi}\frac{P(t)sin^2t\;dt}{h(t)g(t)}>0$. Таким образом рассмотрение случая $(k)=(1,2,4,5)$ закончено.

Кратко рассмотрим случаи $(k)=(2,3,4,5)$, $(k)=(1,2,3,6)$. В случае $(k)=(2,3,4,5)$ вопрос сводится к определнию знака интеграла $I=$

$= \int\limits_0^\pi \frac{(480\pi^6-120t\pi^5+248t^2\pi^4+84t^3\pi^3-76t^4\pi^2-36t^5\pi-4t^6)sin^2t\;dt}{t\prod\limits_{j=1}^{5}(j^2\pi^2-t^2)\prod\limits_{j=6}^{8}(j\pi-t)} = \int\limits_0^\pi \frac{P(t)sin^2t\;dt}{g(t)}$. Функция $P(t)$ положительна на $[0,\pi]$ $(\min\limits_{t\in[0,\pi]} P(t) \approx 4,483\cdot 10^5)$. Отсюда можно сделать вывод, который закрывает вопрос в данном случае, что $I>0$.

В случае $(k)=(1,2,3,6)$ исследование оказывается более сложным. Вопрос сводится к определению знака интеграла $I=\int\limits_0^\pi \frac{P(t)sin^2t\;dt}{h(t)g(t)}$, где $h(t)=t(\pi-t)$, $g(t)=$ $=(\pi+t)\prod\limits_{j=2}^{6}(j^2\pi^2-t^2)(7\pi+t)(8\pi+t)$, $P(t)=7t^7+21t^6\pi-135t5\pi^2-885t^4\pi^3-1432t^3\pi_4+$ $+8004t^2\pi^5+3680t\pi^6-2160\pi^7$. $P(t)$ возрастает и меняет знак в точке $\tau_0\in(0,9;1,1)$. При этом выполняется неравенство $\frac{\int\limits_{\tau_0}^{\pi}P(t)\;dt}{\left|\int\limits_0^{\tau_0}P(t)\;dt\right|}>60$. Заметим, что правая часть неравенства несколько занижена. В свою очередь $\frac{\max\limits_{t\in[0,\tau_0]}(g(t))^{-1}}{\max\limits_{t\in[\tau_0\pi]}(g(t))^{-1}}\approx 1,75$.

Отсюда нетрудно получить, что $I>0$. Следовательно, и в этом случае уравнение (3) имеет четыре корня, удовлетворяющих оговоренному во введении условию.

Перейдем к рассмотрению случая $m=5$, $(k)=(1,2,3,4,5)$. Обозначим $F(t)=$ $=\frac{sin^2t}{\prod\limits_{j=1}^{5}(j^2\pi^2-t^2)}$. Аналогично предыдущему (детали опустим) приходим к выводу, что уравнение (3) в рассматриваемом случае имеет пять корней, удовлетворяющих условию $0<r_1<\pi<r_2<2\pi<r_3<3\pi<r_4<4\pi<r_5<5\pi$, если $\int\limits_0^{3\pi}F(t)\;dt>0$, $\int\limits_0^{4\pi}F(t)\;dt<0$.

Применяя уже рассмотренные выше приемы, получаем

$$\int\limits_0^{3\pi}F(t)\;dt=\int\limits_0^{\pi}sin^2t\left(\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{5}(j^2\pi^2-t^2)}-\frac{1}{t(\pi-t)\prod\limits_{j=2}^{4}(j^2\pi^2-t^2)(5\pi+t)(6\pi+t)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{t(2\pi-t)(\pi^2-t^2)(9\pi^2-t^2)\prod\limits_{j=4}^{7}(j\pi+t)}\right)\;dt.$$

Произведя сложение, получим $\int\limits_0^{3\pi}F(t)\;dt=\int\limits_0^{\pi}sin^2t\frac{3t^3+9t^2\pi+11t\pi^2+5\pi^3}{t\prod\limits_{j=1}^{5}(j^2\pi^2-t^2)(6\pi+t)(7\pi+t)}\;dt>0$.

Убедимся теперь, что $\int\limits_0^{4\pi}F(t)\;dt<0$. Пусть $\int\limits_0^{3\pi}F(t)\;dt=\int\limits_0^{\pi}sin^2tQ(t)\;dt$, тогда $\int\limits_0^{4\pi}F(t)\;dt=\int\limits_0^{\pi}sin^2t\left(Q(t)-\frac{1}{t(\pi^2-t^2)(4\pi^2-t^2)\prod\limits_{j=4}^{8}(j\pi+t)}\right)$. После преобразования имеем $\int\limits_0^{4\pi}F(t)\;dt=\int\limits_0^{\pi}sin^2t\frac{4t^4+24t^3\pi+94t^2\pi^2174t\pi^3-140\pi^4}{t\prod\limits_{j=1}^{5}(j^2\pi^2-t^2)\prod\limits_{j=6}^{8}(j\pi+t)}\;dt$. Обозначим $S(t)=\frac{sin^2t}{t(\pi-t)}$, $P(t)=$

$= 4t^4 + 24t^3\pi + 94t^2\pi^2 174t\pi^3 - 140\pi^4,\ g(t) = (\pi + t)\prod\limits_{j=2}^{5}(j^2\pi^2 - t^2)\prod\limits_{j=6}^{8}(j\pi + t)$. Тогда $\int\limits_0^{4\pi} F(t)\,dt = \int\limits_0^{\pi} \frac{S(t)P(t)}{g(t)}\,dt$.

То, что $\int\limits_0^{4\pi} F(t)\,dt < 0$, получается из следующих легко проверяемых фактов:

1) $P(t)$ возрастаент на $[0, \pi]$ и имеет на этом отрезке единственный корень τ_0, при этом $0,587\pi < \tau_0 < 0,588\pi$, кроме того $\int\limits_0^{\pi} P(t)\,dt = -4549,493 < 0$; 2) $S(t)$ симметрична относительно $t = \frac{\pi}{2}$ и положительна на $(0, \pi)$; 3)любое значение функции $\frac{1}{g(t)}$ на $[\tau_0, \pi]$ меньше любого значения этой функции на $[0, \tau_0)$.

Таким образом завершено рассмотрение случая $m = 5,\ (k) = (1, 2, 3, 4, 5)$.

Литература

[1] Абакумов Ю.Г. Приближение периодических функций тригонометрическими операторами Баскакова. Чита: ЧитГУ, 2006. 158 с.

[2] Коган Е.С. Некоторые методы получения точных и экстремальных констант в оценках приближения линейными операторами функций классов $Lip_M \alpha$: автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук. Красноярск, 2004. 15 с.

[3] Баскаков В.А. Об операторах класса S_{2m}, построенных на ядрах Фейера // Приближение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2001. С. 5–11.

[4] Карымова Е.Ю. О динамике изменения первых двух экстремумов функциональных характеристик явления Гиббса // Кулагинские чтения: материалы седьмой Всерос. науч.-практ. конф. Чита: ЧитГУ, 2007. С. 167–170.

[5] Абакумов Ю.Г., Карымова Е.Ю., Коган Е.С. Об одной точной константе // Применение функциоанльного анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2008. С. 14–17.

[6] Верхотурова М.А. О точных константах вида $A_H^{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}$ // Энергетика в современном мире: Чита: ЧитГУ, 2009. Ч. 2. С. 168–170.

Поступила в редакцию $1/XI/2011$;
в окончательном варианте — $1/XI/2011$.

ABOUT ONE PROBLEM OF THE APPROXIMATION THEORY

 Yu.G. Abakumov, M.A. Verhoturova, E.S. Kogan[2]

In the given article the solution of the problem of finding of accurate constants by methods of summation of Fourier series is considered. The number of results belonging to the constants , the existence of parameters are also set forth. Key words: methods of summation of Fourier series, trigonometric Bascakov operators, accurate constants.

Paper received $1/XI/2011$.
Paper accepted $1/XI/2011$.

[2]Abakumov Yuriy Georgievich (`abakumovug@yandex.ru`), Verhoturova Maria Alekseevna (`verhoturova@yandex.ru`), Kogan Evgeniya Semenovna (`eskogan@mail.ru`), the Dept. of Informatics, Computing Technics and Applied Mathematics, Chita State University, Chita, 672039, Russian Federation.