УДК 519.213, 517.936

РЕШЕНИЕ КВАНТИЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

© 2012 Л.Э. Мелкумова, С.Я. Шатских[1]

Статья посвящена изучению квантильных дифференциальных уравнений Пфаффа, которые строятся на основе двумерных условных квантилей многомерных вероятностных распределений. Как было установлено в работе [3], для распределений вероятностей, обладающих свойством воспроизводимости условных квантилей, рассматриваемые уравнения Пфаффа вполне интегрируемы, а их решениями являются условные квантили максимальной размерности. В настоящей статье для квантильных уравнений Пфаффа, не обладающих полной интегрируемостью, мы рассматриваем вероятностные свойства интегральных многообразий максимальной размерности. Дано описание таких многообразий с помощью условных квантилей промежуточных размерностей.

Ключевые слова: многомерные вероятностные распределения, воспроизводимость условных квантилей, квантильные уравнения Пфаффа, классы Дарбу дифференциальных 1-форм, первые интегралы, решения максимальной размерности, смеси вероятностных распределений.

1. Условные квантили многомерных вероятностных распределений

В последние десятилетия условные квантили и условные медианы привлекают все большее внимание специалистов по теории вероятностей и математической статистике. В частности, это связано с появлением новых статистических моделей, в которых ошибки наблюдений имеют негауссовские распределения с "тяжелыми хвостами". Для таких моделей предположение о существовании моментов функций распределения уже не является справедливым. Поэтому в статистической теории регрессии развивается "безмоментный" подход, в рамках которого условные квантили, как функции "объясняющих факторов", используются вместо условных математических ожиданий [1; 9–12].

В работах [2; 3] для многомерных распределений вероятностей, обладающих свойством воспроизводимости условных квантилей, была установлена полная интегрируемость квантильных уравнений Пфаффа. Было доказано, что ре-

[1]Мелкумова Лана Эдуардовна (lame@uni-smr.ac.ru), Шатских Сергей Яковлевич (shatskih@ssu.samara.ru), кафедра теории вероятностей и математической статистики Самарского государственного университета. 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

шениями этих уравнений являются условные квантили максимальной размерности. В данной работе для квантильных уравнений Пфаффа, не обладающих полной интегрируемостью, мы изучаем вероятностные свойства решений максимальной размерности и даем описание таких решений с помощью условных квантилей промежуточных размерностей. В качестве примера рассмотрено квантильное уравнение Пфаффа для смеси двух пятимерных распределений Коши. Для этого уравнения найдены класс Дарбу, первые интегралы и решения максимальной размерности.

2. Воспроизводимость условных квантилей

Напомним сначала понятие условной квантили для многомерного распределения вероятностей. Пусть имеется система случайных величин $X_1, ..., X_n$. Будем рассматривать для этой системы условные функции распределения вида[2]

$$F_{i|1...\hat{i}...n}(x_i|x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_n) := \mathbb{P}\{X_i \leqslant x_i|X_1 = x_1, ..., \widehat{X_i = x_i}, ..., X_n = x_n\}.$$

Всюду в этой работе мы предполагаем эти функции строго монотонно возрастающими и непрерывными по "первому" аргументу x_i. Аналогичное предположение будет действовать для всех рассматриваемых нами условных распределений.

Условная квантиль $q^{(p)}_{i|1...\hat{i}...n}(x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_n)$ уровня $p \in (0, 1)$ случайной величины X_i по случайным величинам $X_1, ...\hat{X_i}, ..., X_n$ определяется из следующего равенства:

$$F_{i|1...\hat{i}...n}(q^{(p)}_{i|1...\hat{i}...n}(x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_n)|x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_n) \equiv p$$

для любого $(x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Таким образом, условная квантиль уровня p представляет собой функцию от $n-1$ переменных $(x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_n)$. Будем называть ее i-ой $(n-1)$-мерной квантилью уровня p для данного распределения.

Условную квантиль также можно связать не со значением уровня $p \in (0, 1)$, а с некоторой точкой $\boldsymbol{x}^0 = (x^0_1, ..., x^0_n) \in \mathbb{R}^n$, значение условной функции распределения в которой задает уровень. В этом случае условная квантиль определяется с помощью равенства:

$$F_{i|1...\hat{i}...n}(q^{\boldsymbol{x}^{(0)}}_{i|1...\hat{i}...n}(x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_n)|x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_n) \equiv F_{i|1...\hat{i}...n}(x^0_i|x^0_1, ..., \widehat{x^0_i}, ..., x^0_n).$$

Очевидно, что график условной квантили $q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{i|1...\hat{i}...n}$ проходит через точку $\boldsymbol{x}^0$, то есть

$$q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{i|1...\hat{i}...n}(x^0_1, ..., \widehat{x^0_i}, ..., x^0_n) = x^0_i.$$

Отметим, что условные квантили можно рассматривать как кривые или поверхности постоянного уровня, проходящие через отмеченную точку $\boldsymbol{x}^0 = (x^0_1, ..., x^0_n) \in \mathbb{R}^n$.

Перейдем к понятию воспроизводимости условных квантилей. Пусть система случайных величин $X_1, ..., X_n$ имеет $(k+1)$-мерные условные функции распределения $(k < n)$

$$P\{X_i \leqslant x_i|X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k\} = F_{i|1...k}(x_i|x_1, x_2, ..., x_k), \ \ i = \overline{k+1, n}$$

и n-мерную условную функцию распределения

$$P\{X_n \leqslant x_n|X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_{n-1} = x_{n-1}\} = F_{n|1...n-1}(x_{n-1}|x_1, x_2, ..., x_{n-1}).$$

[2]Знак $\hat{\ }$ над элементом означает пропуск этого элемента.

Выберем точку $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ и введем семейство k-мерных условных квантилей, $q_{i|1...k}^{(x_1^0,...,x_k^0,x_i^0)}$:

$$F_{i|1...k}(q_{i|1...k}^{(x_1^0,...,x_k^0,x_i^0)}(x_1, ..., x_k)|x_1, ..., x_k) \equiv F_{i|1...k}(x_i^0|x_1^0, ..., x_k^0),$$

графики которых проходят через точки $(x_1^0, ..., x_k^0, x_i^0)$:

$$x_i^0 = q_{i|1...k}^{(x_1^0,...,x_k^0,x_i^0)}(x_1^0, ..., x_k^0).$$

Рассмотрим $(n-1)$-мерную условную квантиль $q_{n|1...n-1}^{(x^0)}(x_1, ..., x_{n-1})$

$$F_{n|1...n-1}(q_{n|1...n-1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, ..., x_{n-1})|x_1, ..., x_{n-1}) \equiv F_{n|1...n-1}(x_n^0|x_1^0, ..., x_{n-1}^0),$$

проходящую через точку $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$.

Определение 1. Будем говорить, что случайный вектор $(X_1, ..., X_n)$ обладает свойством *воспроизводимости* условной квантили $q_{n|1...n-1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, ..., x_{n-1})$ при сужении на k-мерные условные квантили

$$\left\{q_{i|1...k}^{(x_1^0,...,x_k^0,x_i^0)}(x_1, ..., x_k)\right\}_{i=k+1}^{n},$$

если равенство

$$q_{n|1...n-1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, ..., x_k, q_{k+1|1...k}^{(x_1^0,...,x_k^0,x_{k+1}^0)}(x_1, ..., x_k), ..., q_{n-1|1...k}^{(x_1^0,...,x_k^0,x_{n-1}^0)}(x_1, ..., x_k)) =$$
$$= q_{n|1...k}^{(x_1^0,...,x_k^0,x_n^0)}(x_1, ..., x_k)$$

имеет место для любой отмеченной точки $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$.

Геометрически свойство воспроизводимости означает, что поверхность, параметризованная "малыми" k-мерными условными квантилями, проходящими через точку $\boldsymbol{x}^0$,

$$\gamma^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, ..., x_k) = \{x_1, ..., x_k, q_{k+1|1...k}^{(x_1^0,...,x_k^0,x_{k+1}^0)}(x_1, ..., x_k), ..., q_{n|1...k}^{(x_1^0,...,x_k^0,x_n^0)}(x_1, ..., x_k)\},$$

лежит на графике «большой» $(n-1)$-мерной условной квантили:

$$\Gamma^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, ..., x_{n-1}) = \{x_1, ..., x_{n-1}, q_{n|1...n-1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, ..., x_{n-1})\},$$

т. е.

$$\gamma^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, ..., x_k) \subset \Gamma^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, ..., x_{n-1}).$$

В работе [3] приводится несколько примеров многомерных вероятностных распределений, обладающих свойством вопроизводимости условных квантилей. В частности, к ним относятся многомерное гауссовское распределение, распределение Стюдента, распределение Дирихле, распределение Парето, многомерное логистическое распределение и др.

3. Квантильное уравнение Пфаффа для многомерного распределения вероятностей

Пусть для случайного вектора $X = (X_1, ..., X_n)$ определены одномерные условные квантили

$$x_i = q_{i|j}^{(x_i^0,x_j^0)}(x_j), \text{ где } j = \overline{1, n-1}, \ i = \overline{1, n},$$

для всех точек $\boldsymbol{x}^0$ из некоторой области $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Будем считать, что эти квантили являются дифференцируемыми по x_j. Тогда в этой области мы можем рассматривать следующий определитель:

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \dots & dx_{n-1} & dx_n \\ 1 & \dot{q}_{2|1}^{(x_1,x_2)}(x_1) & \dots & \dot{q}_{n-1|1}^{(x_1,x_{n-1})}(x_1) & \dot{q}_{n|1}^{(x_1,x_n)}(x_1) \\ \dot{q}_{1|2}^{(x_1,x_2)}(x_2) & 1 & \dots & \dot{q}_{n-1|2}^{(x_2,x_{n-1})}(x_2) & \dot{q}_{n|2}^{(x_2,x_n)}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{q}_{1|n-1}^{(x_1,x_{n-1})}(x_{n-1}) & \dot{q}_{2|n-1}^{(x_2,x_{n-1})}(x_{n-1}) & \dots & 1 & \dot{q}_{n|n-1}^{(x_{n-1},x_n)}(x_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Здесь значения производных условных квантилей $q_{i|j}^{(x_i,x_j)}(t)$, проходящих через точку (x_i, x_j), вычисляются при $t = x_j$:

$$\dot{q}_{i|j}^{(x_i,x_j)}(x_j) \;=\; -\frac{1}{f_{i|j}(x_i|x_j)}\frac{\partial}{\partial\, x_j}F_{i|j}(x_i|x_j), \quad (i \neq j),$$

где

$$f_{i|j}(x_i|x_j) \;=\; \frac{\partial}{\partial\, x_i}F_{i|j}(x_i|x_j) \quad - \text{условная плотность.}$$

Приравняв этот определитель к 0, получим дифференциальное уравнение Пфаффа

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_{11}\, dx_1 + A_{12}\, dx_2 + ... + A_{1n}\, dx_n = 0, \tag{1}$$

где A_{1i} — алгебраическое дополнение элемента dx_i.

Это уравнение будем называть *квантильным* уравнением Пфаффа. Заметим, что коэффициенты A_{1k} квантильного уравнения Пфаффа строятся лишь на основе двумерных распределений. Однако, как будет показано ниже, решениями квантильного уравнения во многих случаях являются условные квантили более высоких размерностей. Для этого распределение должно обладать свойством воспроизводимости условных квантилей того или иного вида.

4. Полная интегрируемость уравнения Пфаффа

Рассмотрим следующий вариант свойства воспроизводимости условных квантилей. Пусть для случайного вектора

$$X = (X_1, ..., X_n)$$

определены "большая" условная квантиль

$$q_{n|1\dots n-1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, ..., x_{n-1})$$

и "малые" одномерные условные квантили

$$q_{i|j}^{(x_i^0,x_j^0)}(x_j), \quad \text{где } j = \overline{1, n-1} \text{ и } i = \overline{1, n}.$$

Будем считать, что "большая" условная квантиль обладает свойством воспроизводимости при сужении на одномерные условные квантили:

$$\begin{array}{lcl} q_{n|1\dots n-1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, q_{2|1}^{(x_1^0,x_2^0)}(x_1), ..., q_{n-1|1}^{(x_1^0,x_{n-1}^0)}(x_1)) & = & q_{n|1}^{(x_1^0,x_n^0)}(x_1); \\ q_{n|1\dots n-1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(q_{1|2}^{(x_1^0,x_2^0)}(x_2), x_2, ..., q_{n-1|2}^{(x_2^0,x_{n-1}^0)}(x_2)) & = & q_{n|2}^{(x_2^0,x_n^0)}(x_2); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ q_{n|1\dots n-1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(q_{1|n-1}^{(x_1^0,x_{n-1}^0)}(x_{n-1}), ..., q_{n-2|n-1}^{(x_{n-2}^0,x_{n-1}^0)}(x_{n-1}), x_{n-1}) & = & q_{n|n-1}^{(x_{n-1}^0,x_n^0)}(x_{n-1}). \end{array} \tag{2}$$

В работах [2], [3] установлены следующие условия полной интегрируемости квантильных уравнений Пфаффа.

Теорема 1. Если случайный вектор $X = (X_1, ..., X_n)$ отвечает следующим условиям:

1° обладает свойством воспроизводимости условных квантилей (2);

2° функция распределения этого вектора имеет плотность, которая вместе со всеми маргинальными плотностями всюду положительна и дифференцируема;

3° $A_{1n} \neq 0$,

то квантильное уравнение Пфаффа (1) вполне интегрируемо. Решением этого уравнения, проходящим через отмеченную точку $\boldsymbol{x}^0$, является "большая" условная квантиль

$$x_n = q_{n|1...n-1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1, ..., x_{n-1}).$$

Замечание 1. По теореме Фробениуса [4–6] дифференциальное уравнение Пфаффа

$$\omega = A_{11}dx_1 + A_{12}dx_2 + ... + A_{1n}dx_n = 0$$

тогда и только тогда вполне интегрируемо, когда

$$\omega \wedge d\omega \equiv 0,$$

где d, $\wedge$ — внешний дифференциал и внешнее произведение дифференциальных форм.

В работе [3] приведены примеры многомерных вероятностных распределений, для которых выполняется свойство воспроизводимости при сужении многомерных условных квантилей на одномерные. Для этих распределений выведены и решены в явном виде квантильные уравнения Пфаффа.

Предполагая выполненным предположение 2° теоремы 1, приведем одно утверждение об одномерных решениях уравнения Пфаффа (1) (см.: [3]). Будем рассматривать кривые, параметризованные одномерными условными квантилями, проходящими через отмеченную точку $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$:

$$\gamma_k(\boldsymbol{x}^0, t) = \left\{ q_{1|k}^{(x_1^0, x_k^0)}(t), ..., q_{k-1|k}^{(x_{k-1}^0, x_k^0)}(t), t, q_{k+1|k}^{(x_k^0, x_{k+1}^0)}(t), ..., q_{n|k}^{(x_n^0, x_k^0)}(t) \right\}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 2. Для любой точки $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ кривые

$$\gamma_1(x^0, x_1) = \{x_1, q_{2|1}^{(x_1^0, x_2^0)}(x_1), x_2, ..., q_{n-1|1}^{(x_1^0, x_{n-1}^0)}(x_1), q_{n|1}^{(x_1^0, x_n^0)}(x_1)\},$$

$$...$$

$$\gamma_{n-1}(x^0, x_{n-1}) = \{q_{1|n-1}^{(x_1^0, x_{n-1}^0)}(x_{n-1}), q_{2|n-1}^{(x_2^0, x_{n-1}^0)}(x_{n-1}), ..., x_{n-1}, q_{n|n-1}^{(x_{n-1}^0, x_n^0)}(x_{n-1})\}$$

являются одномерными решениями дифференциального уравнения Пфаффа (1).

Заметим, что в данном случае мы не требуем выполнения никакого варианта свойства воспроизводимости условных квантилей.

5. Классификация многомерных вероятностных распределений по классам Дарбу соответствующих дифференциальных форм

Итак, от многомерного распределения вероятностей мы приходим к квантильному дифференциальному уравнению Пфаффа (1) или, что эквивалентно, к дифференциальной 1-форме. Рассмотрим характеристику таких дифференциальных форм, называемую классом Дарбу, которая, в силу известной теоремы Дарбу [5; 6], определяет максимальную размерность решения (интегрального многообразия) соответствующего уравнения Пфаффа.

Для дифференциальной 1-формы

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1, ..., x_n) dx_k,$$

рассматривая внешние степени внешних дифференциалов, введем последовательность дифференциальных форм

$$\begin{gathered} I_1 := \omega, \\ I_2 := d\omega, \\ I_3 := \omega \wedge d\omega, \\ I_4 := dI_3 = I_2 \wedge I_2 := (d\omega)^2, \\ \dots\dots\dots \\ I_{2k} := (d\omega)^k, \\ I_{2k+1} := \omega \wedge (d\omega)^k, \\ \dots\dots\dots \end{gathered}$$

Начиная с некоторого номера все элементы I_m будут содержать внешние произведения одинаковых координатных форм и, следовательно, будут обращаются в нуль. Таким образом, последовательность $\{I_m\}$ содержит только конечное число ненулевых элементов.

Определение 2. Если дифференциальная 1-форма ω обладает свойством

$$\omega \wedge (d\omega)^r \neq 0, \text{ но } \omega \wedge (d\omega)^{r+1} = 0, \tag{3}$$

то говорят, что класс Дарбу этой дифференциальной формы равен $2r + 1$.

Как уже отмечалось, критерием полной интегрируемости уравнения Пфаффа является выполнение равенства $d\omega \wedge \omega = 0$. В этом случае $r = 0$ и класс Дарбу дифференциальной формы ω равен 1.

Теорема Дарбу. Если класс Дарбу дифференциальной 1-формы[3] ω равен $2r+1$, то с помощью гладкой замены переменных (локально) уравнение Пфаффа

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} a_k(x_1, ..., x_n) dx_k = 0$$

можно привести к каноническому виду

$$dy_1 + y_2 dy_3 + \ldots + y_{2r} dy_{2r+1} = 0.$$

В этом случае уравнение Пфаффа имеет решение (интегральное многообразие) максимальной размерности $n - r - 1$, которое задается первыми интегралами

$$y_1(x_1, ..., x_n) = C_1 = const, \;\; y_3(x_1, ..., x_n) = C_3 = const, \; \ldots,$$

$$y_{2r+1}(x_1, ..., x_n) = C_{2r+1} = const.$$

Как уже отмечалось, для вполне интегрируемых уравнений Пфаффа параметр $r = 0$, поэтому для таких уравнений максимальная размерность интегральных многообразий равна $n - 1$, что и утверждается в теореме Фробениуса.

Представляет интерес классификация многомерных распределений вероятностей по классам Дарбу соответствующих дифференциальных 1-форм ω.

[3]Коэффициенты которой $a_k(x_1, ..., x_n)$ не обращаются в нуль одновременно.

6. Решения квантильных уравнений Пфаффа промежуточной размерности

В работе [3] приводится пример квантильного уравнения Пфаффа, построенного для смеси двух 4-мерных гауссовских распределений, которое не является вполне интегрируемым. Для этого конкретного распределения решением максимальной размерности являлась поверхность, параметризованная условными квантилями размерности 2, что на единицу меньше максимальной.

Далее в статье мы покажем, чем обусловлена такая форма решения максимальной размерности квантильного уравнения Пфаффа и как это связано со свойством воспроизводимости условных квантилей вероятностного распределения. Но сначала установим и докажем одно свойство определителей, которое будет использоваться в дальнейшем.

Рассмотрим определитель n-го порядка $(n-1 \geqslant k)$ вида[4]

$$M = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \dots & dx_k & dx_{k+1} & \dots & dx_{n-1} & dx_n \\ 1 & \dot{q}_{2|1} & \dots & \dot{q}_{k|1} & \dot{q}_{k+1|1} & \dots & \dot{q}_{n-1|1} & \dot{q}_{n|1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{q}_{1|k} & \dot{q}_{2|k} & \dots & 1 & \dot{q}_{k+1|k} & \dots & \dot{q}_{n-1|k} & \dot{q}_{n|k} \\ \dot{q}_{1|k+1} & \dot{q}_{2|k+1} & \dots & \dot{q}_{k|k+1} & 1 & \dots & \dot{q}_{n-1|k+1} & \dot{q}_{n|k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{q}_{1|n-1} & \dot{q}_{2|n-1} & \dots & \dot{q}_{k|n-1} & \dot{q}_{k+1|n-1} & \dots & 1 & \dot{q}_{n|n-1} \end{vmatrix}.$$

Будем обозначать алгебраическое дополнение элемента dx_i первой строки M через $Alg(dx_i)$.

Лемма 1. Справедливо следующее разложение определителя M:

$$M = \frac{Alg(dx_{k+1})}{S} \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \dots & dx_k & dx_{k+1} \\ 1 & \dot{q}_{2|1} & \dots & \dot{q}_{k|1} & \dot{q}_{k+1|1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{q}_{1|k} & \dot{q}_{2|k} & \dots & 1 & \dot{q}_{k+1|k} \end{vmatrix} + \dots$$
$$+ \frac{Alg(dx_n)}{S} \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \dots & dx_k & dx_n \\ 1 & \dot{q}_{2|1} & \dots & \dot{q}_{k|1} & \dot{q}_{n|1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{q}_{1|k} & \dot{q}_{2|k} & \dots & 1 & \dot{q}_{n|k} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где определитель

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \dot{q}_{2|1} & \dots & \dot{q}_{k|1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{q}_{1|k} & \dot{q}_{2|k} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. В формуле (4) каждое из $n-k$ алгебраических дополнений умножается на определитель, полученный добавлением к S первой строки и столбца, соответствующего элементу dx_i (i пробегает значения от $k+1$ до n). Обозначим этот определитель через S_i.

$$S_i = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \dots & dx_k & dx_i \\ 1 & \dot{q}_{2|1} & \dots & \dot{q}_{k|1} & \dot{q}_{i|1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{q}_{1|k} & \dot{q}_{2|k} & \dots & 1 & \dot{q}_{i|k} \end{vmatrix}.$$

[4] Приводимое ниже разложение справедливо для определителей общего вида.

Тогда равенство (4) можно записать в виде

$$M = Alg(dx_{k+1}) \cdot \frac{S_{k+1}}{S} + \ldots + Alg(dx_n) \cdot \frac{S_n}{S}. \tag{5}$$

Запишем разложение определителя S_i по последнему столбцу. Заметим, что алгебраическое дополнение первого элемента этого столбца dx_i равно S. Алгебраическое дополнение $(r+1)$-го сверху элемента для любого r от 1 до k будем обозначать $Alg_r^{(S_i)}$:

$$Alg_r^{(S_i)} = Alg(\dot{q}_{i|r}) \;\; S_i, \quad i = k+1, \ldots, n;\; r = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$S_i = dx_i \cdot S + \dot{q}_{i|1} \cdot Alg_1^{(S_i)} + \dot{q}_{i|2} \cdot Alg_2^{(S_i)} + \ldots + \dot{q}_{i|k} \cdot Alg_k^{(S_i)}. \tag{6}$$

Далее, для всех i алгебраические дополнения соответствующих элементов последнего столбца S_i будут равны, так как они определяются только первыми k столбцами S_i, общими для всех S_i. Таким образом, можно избавиться от индекса i в записи $Alg_r^{(S_i)}$. Договоримся обозначать

$$Alg_r^{(S_i)} = Alg_r^{(S)}$$

для i от $k+1$ до n.

Тогда выражение (6) можно переписать в виде:

$$S_i = dx_i \cdot S + \dot{q}_{i|1} \cdot Alg_1^{(S)} + \dot{q}_{i|2} \cdot Alg_2^{(S)} + \ldots + \dot{q}_{i|k} \cdot Alg_k^{(S)}.$$

Следовательно, для слагаемых в правой части равенства (5) будем иметь

$$Alg(dx_i) \cdot \frac{S_i}{S} = Alg(dx_i) \cdot dx_i + Alg(dx_i) \left(\dot{q}_{i|1} \frac{Alg_1^{(S)}}{S} + \dot{q}_{i|2} \frac{Alg_2^{(S)}}{S} + \ldots + \dot{q}_{i|k} \cdot \frac{Alg_k^{(S)}}{S} \right).$$

Выражение (5) можно после некоторой перегруппировки привести к виду:

$$M = \sum_{i=k+1}^{n} Alg(dx_i) dx_i + \sum_{i=k+1}^{n} Alg(dx_i) \left(\dot{q}_{i|1} \frac{Alg_1^{(S)}}{S} + \ldots + \dot{q}_{i|k} \frac{Alg_k^{(S)}}{S} \right). \tag{7}$$

Вспомним теперь, что

$$M = \sum_{i=1}^{n} Alg(dx_i) \cdot dx_i.$$

Тогда равенство (7) сводится к следующему:

$$\sum_{i=1}^{k} Alg(dx_i) dx_i - \sum_{i=k+1}^{n} Alg(dx_i) \left(\dot{q}_{i|1} \frac{Alg_1^{(S)}}{S} + \ldots + \dot{q}_{i|k} \frac{Alg_k^{(S)}}{S} \right) = 0. \tag{8}$$

Заметим, что для любого i от 1 до k справедливо равенство:

$$dx_i = dx_i \frac{S}{S} =$$

$$= - \left(\dot{q}_{i|1} \frac{Alg_1^{(S)}}{S} + \ldots + \dot{q}_{i|i-1} \frac{Alg_{i-1}^{(S)}}{S} + \frac{Alg_i^{(S)}}{S} + \dot{q}_{i|i+1} \frac{Alg_{i+1}^{(S)}}{S} + \dot{q}_{i|k} \frac{Alg_k^{(S)}}{S} \right). \tag{9}$$

Это сразу следует из того факта, что для i от 1 до k определитель

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \ldots & dx_i & \ldots & dx_k & dx_i \\ 1 & \dot{q}_{2|1} & \ldots & \dot{q}_{i|1} & \ldots & \dot{q}_{k|1} & \dot{q}_{i|1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot{q}_{1|k} & \dot{q}_{2|k} & \ldots & \dot{q}_{i|k} & \ldots & 1 & \dot{q}_{i|k} \end{vmatrix},$$

полученный добавлением к определителю S элементов первой строки и последнего столбца, равен 0, так как его i-й и $(k+1)$-й столбцы совпадают.

В силу (9) равенство (8) можно записать так:

$$-\sum_{i=1}^{k} Alg(dx_i)\left(\dot q_{i|1}\frac{Alg_1^{(S)}}{S}+\ldots+\dot q_{i|k}\frac{Alg_k^{(S)}}{S}\right)-$$
$$-\sum_{i=k+1}^{n} Alg(dx_i)\left(\dot q_{i|1}\frac{Alg_1^{(S)}}{S}+\ldots+\dot q_{i|k}\frac{Alg_k^{(S)}}{S}\right)= \qquad (10)$$
$$=-\sum_{i=1}^{n} Alg(dx_i)\left(\dot q_{i|1}\frac{Alg_1^{(S)}}{S}+\ldots+\dot q_{i|k}\frac{Alg_k^{(S)}}{S}\right)=0.$$

Но (10) есть запись разложения, по первой строке определителя порядка n, у которого все строки, начиная со второй, совпадают с соответствующими строками определителя M, а первая строка есть линейная комбинация строк M со второй по $(k+1)$-ую с коэффициентами

$$\frac{Alg_1^{(S)}}{S},\ \ldots,\ \frac{Alg_k^{(S)}}{S}.$$

А значит, этот определитель равен нулю, равенство (8) справедливо, следовательно, справедливо и разложение (4). $\square$

Приведенное свойство определителей будет использоваться при доказательстве следующей теоремы.

Положим $\boldsymbol{x}^0 := (x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$. Договоримся для краткости обозначать

$$q_{i|1\,\ldots\,s}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1,\ \ldots,\ x_s)\ =\ q_{i|1\,\ldots\,s}^{(x_1^0,\,\ldots,x_s^0,\,x_i^0)}(x_1,\ \ldots,x_s)$$

для любых натуральных чисел $s=\overline{1,\,n-1}$ и $i=\overline{s+1,\,n}$.

Для случайного вектора $X=(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ зафиксируем $k<n-1$ переменных его функции распределения. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что это первые k переменных $x_1,\ \ldots\ x_k$.

Теорема 3. Если для распределения $F_{1\ldots n}(x_1,\ ...,\ x_n)$ все k-мерные условные квантили

$$q_{i|1\,\ldots\,k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1,\ \ldots,x_k),\ \ i=\overline{k+1,\,n}$$

обладают свойством воспроизводимости при сужении на одномерные условные квантили:

$$\begin{array}{lcl} q_{i|1\ldots k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1,q_{2|1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1),q_{3|1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1),\ldots,q_{k|1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1)) & = & q_{i|1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1)\\ q_{i|1\ldots k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(q_{1|2}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_2),x_2,q_{3|2}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_2),\ldots,q_{k|2}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_2)) & = & q_{i|2}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ q_{i|1\ldots k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(q_{1|k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_k),q_{2|k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_k),\ldots,q_{k-1|k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_k),x_k) & = & q_{i|k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_k) \end{array} \qquad (11)$$

и определитель

$$S=\begin{vmatrix} 1 & \dot q_{2|1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1) & \ldots & \dot q_{k|1}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dot q_{1|k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_k) & \dot q_{2|k}^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_k) & \ldots & 1 \end{vmatrix}\neq 0, \qquad (12)$$

то поверхность, задаваемая k-мерными условными квантилями

$$\Gamma_k^{(\boldsymbol{x}^0)}(x_1,\,\ldots,\,x_k) = \Big\{\Big(x_1,\,\ldots,\,x_k,\,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{k+1|1\ldots k}(x_1,\,\ldots,\,x_k),\,\ldots,\,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n|1\ldots k}(x_1,\,\ldots,\,x_k)\Big)\Big\} \tag{13}$$

является решением размерности k квантильного уравнения Пфаффа (1).

Доказательство. Если ограничиться рассмотрением $(k+1)$-мерного маргинального распределения вероятностей

$$F_{1\ldots k\,i}(x_1,\,\ldots,\,x_k,\,x_i),$$

то k-мерная условная квантиль

$$q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{i|1\ldots k}(x_1,\,\ldots,\,x_k), \quad i=\overline{k+1,\,n} \tag{14}$$

будет выступать в роли "большой" условной квантили, соответствующей условной функции распределения $F_{i|1\ldots k}(x_i|x_1,\,\ldots,\,x_k)$. Таким образом, распределение $F_{1\ldots k\,i}(x_1,\,\ldots,\,x_k,\,x_i)$ обладает свойством воспроизводимости "большой" условной квантили при сужении на "малые". Учитывая условие (12) и теорему 1, приходим к выводу, что для этого распределения "большая" условная квантиль (14) является решением квантильного дифференциального уравнения Пфаффа

$$w_i(x_1,\ldots,x_k,x_i) = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \ldots & dx_k & dx_i \\ 1 & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{2|1}(x_1) & \ldots & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{k|1}(x_1) & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{i|1}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{1|k}(x_k) & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{2|k}(x_k) & \ldots & 1 & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{i|k}(x_k) \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$w_i(x_1,\ldots,x_k,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{i|1\ldots k}(x_1,\,\ldots,\,x_k)) \equiv 0, \quad i=\overline{k+1,\,n}. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь квантильное дифференциальное уравнение Пфаффа для исходного распределения вероятностей

$$w(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \ldots & dx_k & \ldots & dx_{n-1} & dx_n \\ 1 & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{2|1}(x_1) & \ldots & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{k|1}(x_1) & \ldots & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n-1|1}(x_1) & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n|1}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{1|n-1}(x_{n-1}) & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{2|n-1}(x_{n-1}) & \ldots & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{i|n-1}(x_{n-1}) & \ldots & 1 & \dot q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n|n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Используя лемму 1, левую часть этого уравнения можно разложить в сумму

$$w(x_1,\ldots,x_n) = \frac{Alg(dx_{k+1})}{S}\cdot w_{k+1}(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}) + \ldots + \frac{Alg(dx_n)}{S}\cdot w_n(x_1,\ldots,x_k,x_n).$$

Отсюда в силу (15)

$$w(x_1,\ldots,x_k,\,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{k+1|1\ldots k}(x_1,\ldots,x_k),\,\ldots,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n|1\ldots k}(x_1,\,\ldots,x_k)) \equiv 0.$$

А значит, поверхность (13) представляет собой интегральное многообразие для исходного уравнения Пфаффа (1). $\Box$

Замечание 2. При выполнении условий теоремы квантильное уравнение Пфаффа (1) имеет решение размерности k. Следовательно, максимально возможная размерность интегрального многообразия уравнения больше или равна k, а значит, класс Дарбу 1-формы ω меньше или равен $2(n-k)-1$.

Замечание 3. Если класс Дарбу дифференциального квантильного уравнения Пфаффа (1) равен $2(n-k)-1$, то при выполнении условий теоремы поверхность (13) является интегральным многообразием уравнения (1) максимальной размерности, проходящим через точку $\boldsymbol{x}^0$.

Замечание 4. Если к условиям воспроизводимости (11) добавить условие

$$q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n|1\ldots n-1}(x_1,\ldots,x_k,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{k+1|1\ldots k}(x_1,\ldots,x_k),\ldots,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n-1|1\ldots k}(x_1,\ldots,x_k))\equiv q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n|1\ldots k}(x_1,\ldots,x_k),$$

то интегральное многообразие (13) примет вид:

$$\Big\{\Big(x_1,\,\ldots,\,x_k,\,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{k+1|1\,\ldots\,k}(x_1,\ldots,x_k),\,\ldots,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n-1|1\,\ldots\,k}(x_1,\ldots,x_k),$$
$$q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n|1\,\ldots\,n-1}\Big(x_1,\,\ldots,\,x_k,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{k+1|1\,\ldots,k}(x_1,\ldots,x_k),\ldots,\;q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n-1|1\,\ldots\,k}(x_1,\ldots,x_k)\Big)\Big)\Big\}$$

и, таким образом, будет являться частью поверхности, задаваемой "большой" условной квантилью

$$\Big\{\Big(x_1,\,x_2,\,\ldots,x_{n-1},\,q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n|1\ldots n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\Big)\Big\}.$$

7. Пример смеси 5-мерных распределений Коши, не обладающей воспроизводимостью условных квантилей

Для иллюстрации предыдущей теоремы рассмотрим смесь двух 5-мерных распределений Коши с плотностью распределения, задаваемой выражением:

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right)=\frac{1}{3}\,c^{(1)}\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right)+\frac{2}{3}\,c^{(2)}\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right),$$

где

$$\begin{aligned} c^{(1)}\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right) &= \frac{12\sqrt{15}}{\pi^3\left(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^3+\frac{45}{2}\,x_4^2-15x_4x_5+\frac{9}{2}\,x_5^2\right)^3},\\ c^{(2)}\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right) &= \frac{40\sqrt{3}}{\pi^3(1+x_1{}^2+3x_2{}^2+4x_3{}^2+50x_4{}^2+40x_4x_5+10x_5{}^2)^3}.\end{aligned}$$

Составляющим смеси соответствуют матрицы точности:

$$T_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&4&0&0\\0&0&0&\frac{45}{2}&-\frac{15}{2}\\0&0&0&-\frac{15}{2}&\frac{9}{2}\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&4&0&0\\0&0&0&50&20\\0&0&0&20&10\end{pmatrix}.$$

Плотность 4-мерного маргинального распределения смеси $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ представляет собой плотность распределения Коши

$$f_{1234}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=c^{(1)}_{1234}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=c^{(2)}_{1234}\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=$$
$$=\frac{3\sqrt{15}}{\pi^2\sqrt{2}\left(1+x_1{}^2+3x_2{}^2+4x_3{}^2+10x_4{}^2\right)^{5/2}}$$

с диагональной матрицей точности

$$T^{(1234)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&10\end{pmatrix}.$$

В работе [7] показано, что многомерные распределениия Стьюдента и Коши обладают свойством воспроизводимости условных квантилей при сужении на условные квантили меньшей размерности. Поэтому для всех маргинальных распределений плотности $f_{1234}\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ будет выполняться свойство воспроизводимости условных квантилей.

Вычислим коэффициенты квантильного дифференциального уравнения Пфаффа для распределения с плотностью $f\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Составим для этого определитель ω.

Выпишем матрицы точности, соответствующие двумерным плотностям составляющих смеси:

$$T_1^{(12)} = T_2^{(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(13)} = T_2^{(13)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(14)} = T_2^{(14)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix},$$
$$T_1^{(23)} = T_2^{(23)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(24)} = T_2^{(24)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(34)} = T_2^{(34)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix},$$
$$T_1^{(15)} = T_2^{(15)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(25)} = T_2^{(25)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(35)} = T_2^{(35)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$T_1^{(45)} = \begin{pmatrix} \frac{45}{2} & -\frac{15}{2} \\ -\frac{15}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}, \quad T_2^{(45)} = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя двумерные и одномерные маргинальные плотности исходного распределения, нетрудно получить равенства

$$F_{2|1}(x_2|\,x_1) = \frac{\sqrt{3}\,x_2}{2\sqrt{1 + x_1^2 + 3x_2^2}} + \frac{1}{2}, \; F_{3|1}(x_3|\,x_1) = \frac{x_3}{\sqrt{1 + x_1^2 + 4x_3^2}} + \frac{1}{2};$$

$$F_{4|1}(x_4|\,x_1) = \frac{\sqrt{5}\,x_4}{\sqrt{2}\,\sqrt{1 + x_1^2 + 10x_4^2}} + \frac{1}{2}, \; F_{5|1}(x_5|\,x_1) = \frac{x_5}{\sqrt{2}\sqrt{1 + x_1^2 + 2x_5^2}} + \frac{1}{2};$$

$$F_{1|2}(x_1|\,x_2) = \frac{x_1}{2\sqrt{1 + x_1^2 + 3x_2^2}} + \frac{1}{2}, \; F_{3|2}(x_3|\,x_2) = \frac{x_3}{\sqrt{1 + 3x_2^2 + 4x_3^2}} + \frac{1}{2};$$

$$F_{4|2}(x_4|\,x_2) = \frac{\sqrt{5}\,x_4}{\sqrt{2}\,\sqrt{1 + 3x_2^2 + 10x_4^2}} + \frac{1}{2}, \; F_{5|2}(x_5|\,x_2) = \frac{x_5}{\sqrt{2}\,\sqrt{1 + 3x_2^2 + 2x_5^2}} + \frac{1}{2};$$

$$F_{1|3}(x_1|\,x_3) = \frac{x_1}{2\sqrt{1 + x_1^2 + 4x_3^2}} + \frac{1}{2}, \; F_{2|3}(x_2|\,x_3) = \frac{\sqrt{3}\,x_2}{2\sqrt{1 + 3x_2^2 + 4x_3^2}} + \frac{1}{2};$$

$$F_{4|3}(x_4|\,x_3) = \frac{\sqrt{5}\,x_4}{\sqrt{2}\,\sqrt{1 + 4x_3^2 + 10x_4^2}} + \frac{1}{2}, \; F_{5|3}(x_5|\,x_3) = \frac{x_5}{\sqrt{2}\,\sqrt{1 + 4x_3^2 + 2x_5^2}} + \frac{1}{2};$$

$$F_{1|4}(x_1|\,x_4) = \frac{x_1}{2\sqrt{1 + x_1^2 + 10x_4^2}} + \frac{1}{2}, \; F_{2|4}(x_2|\,x_4) = \frac{\sqrt{3}\,x_2}{2\sqrt{1 + 3x_2^2 + 10x_4^2}} + \frac{1}{2};$$

$$F_{3|4}(x_3|\,x_4) = \frac{x_3}{\sqrt{1 + 4x_3^2 + 10x_4^2}} + \frac{1}{2};$$

$$F_{5|4}(x_5|\,x_4) = \frac{1}{3}\,C^{(1)}(x_5|\,x_4) + \frac{2}{3}\,C^{(2)}(x_5|\,x_4) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{-5x_4 + 3x_5}{2\sqrt{2 + 45x_4^2 - 30x_4x_5 + 9x_5^2}} + \frac{\sqrt{10}\,(2x_4 + x_5)}{\sqrt{1 + 50x_4^2 + 40x_4x_5 + 10x_5^2}}\right) + \frac{1}{2}.$$

Большая часть производных двумерных условных квантилей вычисляется легко:

$$\begin{array}{lll} \dot q_{1|2}^{(x_1,x_2)}=\frac{3x_1x_2}{1+3x_2^2}, & \dot q_{2|1}^{(x_1,x_2)}=\frac{x_1x_2}{1+x_1^2}, & \dot q_{1|3}^{(x_1,x_3)}=\frac{4x_1x_3}{1+4x_3^2},\\ \dot q_{3|1}^{(x_1,x_3)}=\frac{x_1x_3}{1+x_1^2}, & \dot q_{1|4}^{(x_1,x_4)}=\frac{10x_1x_4}{1+10x_4^2}, & \dot q_{4|1}^{(x_1,x_4)}=\frac{x_1x_4}{1+x_1^2},\\ \dot q_{2|3}^{(x_2,x_3)}=\frac{4x_2x_3}{1+4x_3^2}, & \dot q_{3|2}^{(x_2,x_3)}=\frac{3x_2x_3}{1+3x_2^2}, & \dot q_{2|4}^{(x_2,x_4)}=\frac{10x_2x_4}{1+10x_4^2},\\ \dot q_{4|2}^{(x_2,x_4)}=\frac{3x_2x_4}{1+3x_2^2}, & \dot q_{3|4}^{(x_3,x_4)}=\frac{10x_3x_4}{1+10x_4^2}, & \dot q_{4|3}^{(x_3,x_4)}=\frac{4x_3x_4}{1+4x_3^2},\\ \dot q_{5|1}^{(x_1,x_5)}=\frac{x_1x_5}{1+x_1^2}, & \dot q_{5|2}^{(x_2,x_5)}=\frac{3x_2x_5}{1+3x_2^2}, & \dot q_{5|3}^{(x_3,x_5)}=\frac{4x_3x_5}{1+4x_3^2}. \end{array} \tag{16}$$

Вычислим $\dot q_{5|4}^{(x_4,x_5)}$. Для этого отметим, что условная квантиль $q_{5|4}^{\left(x_4^0,x_5^0\right)}(x_4)$ удовлетворяет системе:

$$\{\, F_{\;5|4}\left(q_{5|4}^{\left(x_4^0,x_5^0\right)}(x_4)\,\middle|\, x_4\right)=F_{5|4}\left(x_5^0\middle| x_4^0\right) q_{5|4}^{\left(x_4^0,x_5^0\right)}\left(x_4^0\right)=x_5^0.$$

Дифференцируем первое равенство по x_4, подставляя $x_4=x_4^0$, и, используя второе равенство системы, приходим к выражению

$$\dot q_{5|4}^{(x_4,x_5)}(x_4)=$$

$$=\frac{2\sqrt{10}\,(-1+5x_4x_5)\left(2+45x_4^2-30x_4x_5+9x_5^2\right)^{3/2}+5\,(1+6x_4x_5)\left(1+10\left(5x_4^2+4x_4x_5+x_5^2\right)\right)^{3/2}}{\left(1+10x_4^2\right)\left(\sqrt{10}\,(2+45x_4^2-30x_4x_5+9x_5^2)^{3/2}+3\,(1+10\,(5x_4^2+4x_4x_5+x_5^2))^{3/2}\right)}. \tag{17}$$

Квантильное уравнение Пфаффа

$$\omega=\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 & dx_5\\ 1 & \dot q_{2|1}^{(x_1,x_2)}(x_1) & \dot q_{3|1}^{(x_1,x_3)}(x_1) & \dot q_{4|1}^{(x_1,x_4)}(x_1) & \dot q_{5|1}^{(x_1,x_5)}(x_1)\\ \dot q_{1|2}^{(x_1,x_2)}(x_2) & 1 & \dot q_{3|2}^{(x_2,x_3)}(x_2) & \dot q_{4|2}^{(x_2,x_4)}(x_2) & \dot q_{5|2}^{(x_2,x_5)}(x_2)\\ \dot q_{1|3}^{(x_1,x_3)}(x_3) & \dot q_{2|3}^{(x_2,x_3)}(x_3) & 1 & \dot q_{4|3}^{(x_3,x_4)}(x_3) & \dot q_{5|3}^{(x_3,x_5)}(x_3)\\ \dot q_{1|4}^{(x_1,x_4)}(x_4) & \dot q_{2|4}^{(x_2,x_4)}(x_4) & \dot q_{3|4}^{(x_3,x_4)}(x_4) & 1 & \dot q_{5|4}^{(x_4,x_5)}(x_4) \end{vmatrix}=0$$

с учетом равенств (16) и (17) принимает вид:

$$\omega=\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 & dx_5\\ 1 & \frac{x1x2}{1+(x1)^2} & \frac{x1x3}{1+(x1)^2} & \frac{x1x4}{1+(x1)^2} & \frac{x1x5}{1+(x1)^2}\\ \frac{3x1x2}{1+3(x2)^2} & 1 & \frac{3x2x3}{1+3(x2)^2} & \frac{3x2x4}{1+3(x2)^2} & \frac{3x2x5}{1+3(x2)^2}\\ \frac{4x1x3}{1+4(x3)^2} & \frac{4x2x3}{1+4(x3)^2} & 1 & \frac{4x3x4}{1+4(x3)^2} & \frac{4x3x5}{1+4(x3)^2}\\ \frac{10x1x4}{1+10(x4)^2} & \frac{10x2x4}{1+10(x4)^2} & \frac{10x3x4}{1+10(x4)^2} & 1 & \dot q_{5|4}^{(x_4,x_5)}(x_4) \end{vmatrix}=0. \tag{18}$$

Или

$$\tilde\omega:=\left(1+x_1^2\right)\left(1+3x_2^2\right)\left(1+4x_3^2\right)\left(1+10x_4^2\right)\omega=$$

$$=-\left(1+10x_4^2\right)(x_5-x_4\dot q_{5|4}^{(x_4,x_5)}(x_4))(x_1dx_1+3x_2dx_2+4x_3dx_3)+$$

$$+\left(10\left(x_1^2+3x_2^2+4x_3^2\right)x_4x_5-\left(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2\right)\left(1+10x_4^2\right)\dot q_{5|4}^{(x_4,x_5)}(x_4)\right)dx_4+$$

$$+\left(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+10x_4^2\right)dx_5=0.$$

Для того чтобы определить максимальную размерность решения квантильного уравнения Пфаффа, вычислим класс Дарбу формы $\tilde\omega$. Вычисления показывают, что

$$d\tilde\omega\neq 0;$$

$$d\tilde{\omega}\wedge\tilde{\omega} = -\left(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+10x_4^2\right)(x_1dx_1\wedge dx_4\wedge dx_5+3x_2dx_2\wedge dx_4\wedge dx_5+4x_3dx_3\wedge dx_4\wedge dx_5)\times$$

$$\times(5x_4^2+10x_4x_5+x_5^2)\frac{363\sqrt{10}\sqrt{(2+45x4^2-30x4x5+9x5^2)(1+50x4^2+40x4x5+10x5^2)}}{3(1+50x4^2+40x4x5+10x5^2)^{3/2}+\sqrt{10}(2+45x4^2-30x4x5+9x5^2)^{3/2}};$$

$$d\tilde{\omega}\wedge d\tilde{\omega}\equiv 0.$$

Нетрудно показать, что

$$(2+45x4^2-30x4x5+9x5^2)(1+50x4^2+40x4x5+10x5^2)\geqslant 2,$$

поэтому внешнее произведение $d\tilde{\omega}\wedge\tilde{\omega}$ может обращаться в нуль только в точках множества[5]

$$\mathcal{D} := \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5): x_1=x_2=x_3=0\}\cup\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5): 5x_4^2+10x_4x_5+x_5^2=0\right\}.$$

Так как для смеси двух 5-мерных распределений Коши

$$\mathbb{P}\{(X_1,\,X_2,\,X_3,\,X_4,\,X_5)\in\mathcal{D}\} = \int\int\int_{\mathcal{D}}\int\int f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_5=0,$$

то

$$\mathbb{P}\{\,d\tilde{\omega}\wedge\tilde{\omega}\neq 0\} = 1. \tag{19}$$

Итак, класс Дарбу формы ω почти наверное равен 3, максимальная размерность решения квантильного уравнения Пфаффа (18) также почти наверное равна 3.

Используя лемму 1 ($k=3,\ n=5$) и сокращенные обозначения для производных условных квантилей, запишем равенство

$$\omega=\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 & dx_5\\ 1 & \dot q_{2|1} & \dot q_{3|1} & \dot q_{4|1} & \dot q_{5|1}\\ \dot q_{1|2} & 1 & \dot q_{3|2} & \dot q_{4|2} & \dot q_{5|2}\\ \dot q_{1|3} & \dot q_{2|3} & 1 & \dot q_{4|3} & \dot q_{5|3}\\ \dot q_{1|4} & \dot q_{2|4} & \dot q_{3|4} & 1 & \dot q_{5|4}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & \dot q_{2|1} & \dot q_{3|1} & \dot q_{4|1}\\ \dot q_{1|2} & 1 & \dot q_{3|2} & \dot q_{4|2}\\ \dot q_{1|3} & \dot q_{2|3} & 1 & \dot q_{4|3}\\ \dot q_{1|4} & \dot q_{2|4} & \dot q_{3|4} & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dot q_{2|1} & \dot q_{3|1}\\ \dot q_{1|2} & 1 & \dot q_{3|2}\\ \dot q_{1|3} & \dot q_{2|3} & 1\end{vmatrix}}\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_5\\ 1 & \dot q_{2|1} & \dot q_{3|1} & \dot q_{5|1}\\ \dot q_{1|2} & 1 & \dot q_{3|2} & \dot q_{5|2}\\ \dot q_{1|3} & \dot q_{2|3} & 1 & \dot q_{5|3}\end{vmatrix}+$$

$$+\frac{\begin{vmatrix} 1 & \dot q_{2|1} & \dot q_{3|1} & \dot q_{5|1}\\ \dot q_{1|2} & 1 & \dot q_{3|2} & \dot q_{5|2}\\ \dot q_{1|3} & \dot q_{2|3} & 1 & \dot q_{5|3}\\ \dot q_{1|4} & \dot q_{2|4} & \dot q_{3|4} & \dot q_{5|4}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dot q_{2|1} & \dot q_{3|1}\\ \dot q_{1|2} & 1 & \dot q_{3|2}\\ \dot q_{1|3} & \dot q_{2|3} & 1\end{vmatrix}}\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4\\ 1 & \dot q_{2|1} & \dot q_{3|1} & \dot q_{4|1}\\ \dot q_{1|2} & 1 & \dot q_{3|2} & \dot q_{4|2}\\ \dot q_{1|3} & \dot q_{2|3} & 1 & \dot q_{4|3}\end{vmatrix}.$$

[5]Заметим, что лебегова мера (в $\mathbb{R}^5$) множества $\mathcal{D}$ равна нулю.

Отсюда по формулам (16) и (17) будем иметь

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \dot{q}_{2|1} & \dot{q}_{3|1} & \dot{q}_{4|1} \\ \dot{q}_{1|2} & 1 & \dot{q}_{3|2} & \dot{q}_{4|2} \\ \dot{q}_{1|3} & \dot{q}_{2|3} & 1 & \dot{q}_{4|3} \\ \dot{q}_{1|4} & \dot{q}_{2|4} & \dot{q}_{3|4} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dot{q}_{2|1} & \dot{q}_{3|1} \\ \dot{q}_{1|2} & 1 & \dot{q}_{3|2} \\ \dot{q}_{1|3} & \dot{q}_{2|3} & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1 + x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2 + 10x4^2}{(1 + x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2)(1 + 10x4^2)},$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \dot{q}_{2|1} & \dot{q}_{3|1} & \dot{q}_{5|1} \\ \dot{q}_{1|2} & 1 & \dot{q}_{3|2} & \dot{q}_{5|2} \\ \dot{q}_{1|3} & \dot{q}_{2|3} & 1 & \dot{q}_{5|3} \\ \dot{q}_{1|4} & \dot{q}_{2|4} & \dot{q}_{3|4} & \dot{q}_{5|4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dot{q}_{2|1} & \dot{q}_{3|1} \\ \dot{q}_{1|2} & 1 & \dot{q}_{3|2} \\ \dot{q}_{1|3} & \dot{q}_{2|3} & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\dot{q}_{5|4}^{(x_4,x_5)}(x_4)(1 + x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2)(1 + 10x4^2) - 10(x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2)x4x5}{(1 + x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2)(1 + 10x4^2)},$$

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_5 \\ 1 & \dot{q}_{2|1} & \dot{q}_{3|1} & \dot{q}_{5|1} \\ \dot{q}_{1|2} & 1 & \dot{q}_{3|2} & \dot{q}_{5|2} \\ \dot{q}_{1|3} & \dot{q}_{2|3} & 1 & \dot{q}_{5|3} \end{vmatrix} = \frac{x_5\, d\left(x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right)}{2\left(1 + x_1^2\right)\left(1 + 3x_2^2\right)\left(1 + 4x_3^2\right)} - \frac{\left(1 + x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right)}{\left(1 + x_1^2\right)\left(1 + 3x_2^2\right)\left(1 + 4x_3^2\right)}\, dx_5,$$

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ 1 & \dot{q}_{2|1} & \dot{q}_{3|1} & \dot{q}_{4|1} \\ \dot{q}_{1|2} & 1 & \dot{q}_{3|2} & \dot{q}_{4|2} \\ \dot{q}_{1|3} & \dot{q}_{2|3} & 1 & \dot{q}_{4|3} \end{vmatrix} = \frac{x_4\, d\left(x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right)}{2\left(1 + x_1^2\right)\left(1 + 3x_2^2\right)\left(1 + 4x_3^2\right)} - \frac{\left(1 + x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right)}{\left(1 + x_1^2\right)\left(1 + 3x_2^2\right)\left(1 + 4x_3^2\right)}\, dx_4,$$

а квантильное уравнение (18) можно переписать в виде

$$\omega = -\frac{x_5(1 + x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2 + 10x4^2)}{\left(1 + x_1^2\right)\left(1 + 3x_2^2\right)\left(1 + 4x_3^2\right)\left(1 + 10x4^2\right)}\left[\frac{d\left(x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right)}{2(1 + x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2)} - \frac{dx_5}{x_5}\right] +$$

$$+\frac{x_4(\dot{q}_{5|4}^{(x_4,x_5)}(x_4)(1 + x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2)(1 + 10x4^2) - 10(x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2)x4x5)}{\left(1 + x_1^2\right)\left(1 + 3x_2^2\right)\left(1 + 4x_3^2\right)\left(1 + 10x4^2\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{d\left(x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right)}{2(1 + x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2)} - \frac{dx_4}{x_4}\right] = 0.$$

Учитывая равенства

$$d\left(\frac{1}{2}\ln\left(1 + x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x_5^2\right)\right) = \frac{d\left(x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right)}{2(1 + x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2)} - \frac{dx_5}{x_5},$$

$$d\left(\frac{1}{2}\ln\left(1 + x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x_4^2\right)\right) = \frac{d\left(x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right)}{2(1 + x1^2 + 3x2^2 + 4x3^2)} - \frac{dx_4}{x_4},$$

квантильное уравнение (18) можно записать в следующем виде:

$$d\left(\frac{1}{2}\ln\left(1 + x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x_5^2\right)\right) +$$

$$+\frac{x_4(\dot{q}_{5|4}^{(x_4,x_5)}(x_4)\,(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2)(1+10x_4^2)-10(x_1^2+3x_2^2+4x_3^2)x4x5)}{x_5(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+10x_4^2)}\times$$

$$\times\, d\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x_4^2\right)\right)=0.$$

Введем функции

$$y_1=\frac{1}{2}\ln\left(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x_5^2\right),$$

$$y_2=\frac{1}{2}\ln\left(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x_4^2\right),$$

$$z=\frac{x_4(\dot{q}_{5|4}^{(x_4,x_5)}(x_4)\,(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2)(1+10x_4^2)-10(x_1^2+3x_2^2+4x_3^2)x4x5)}{x_5(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+10x_4^2)}.$$

Тогда квантильное уравнение Пфаффа можно представить в следующем виде:

$$dy_1-z\,dy_2=0. \tag{20}$$

Покажем, что это уравнение являет собой каноническое представление исходного квантильного уравнения (18). Для этого найдем ранг матрицы Якоби функций y_1, y_2, z

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_1}{\partial x_4} & \frac{\partial y_1}{\partial x_5}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_4} & \frac{\partial y_2}{\partial x_5}\\ \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_3} & \frac{\partial z}{\partial x_4} & \frac{\partial z}{\partial x_5}.\end{pmatrix}.$$

Вычисления показывают[6], что

$$rank\,\boldsymbol{J}=3,$$

за исключением точек множества $\mathcal{D}$, т. е. аналогично равенству (19) будем иметь

$$\mathbb{P}\{\,rank\,\boldsymbol{J}=3\}\;=\;1.$$

Таким образом, на множестве $\mathbb{R}^5\setminus\mathcal{D}$ функции y_1, y_2, z независимы, а равенство (20) есть каноническое представление квантильного уравнения Пфаффа (18).

Запишем первые интегралы квантильного уравнения (20) :

$$y_1=\frac{1}{2}\ln\left(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x_5^2\right)=\frac{1}{2}\ln C_1=const,$$

$$y_2=\frac{1}{2}\ln\left(1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x_4^2\right)=\frac{1}{2}\ln C_2=const.$$

Тогда $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}^\circ)$ — интегральное многообразие максимальной размерности, проходящее через точку

$$\boldsymbol{x}^\circ=(x_1^\circ,x_2^\circ,x_3^\circ,x_4^\circ,x_5^\circ),$$

задается равенствами

$$x_4=x_4^\circ\sqrt{\frac{1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2}{1+(x_1^\circ)^2+3(x_2^\circ)^2+4(x_3^\circ)^2}};$$

$$x_5=x_5^\circ\sqrt{\frac{1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2}{1+(x_1^\circ)^2+3(x_2^\circ)^2+4(x_3^\circ)^2}}.$$

[6]Использовалась система MATHEMATICA-8.

Или

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}^\circ)=\left\{\left(x_1,\,x_2,\,x_3,\;x_4^\circ\sqrt{\frac{1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2}{1+(x_1^\circ)^2+3(x_2^\circ)^2+4(x_3^\circ)^2}},\;x_5^\circ\sqrt{\frac{1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2}{1+(x_1^\circ)^2+3(x_2^\circ)^2+4(x_3^\circ)^2}}\right)\right\}.$$

Вычислим условные квантили $\dot{q}_{4|123}^{(x^0)}(x_1,x_2)$ и $\dot{q}_{5|123}^{(x^0)}(x_1,x_2)$:

$$\begin{aligned} q_{4|123}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_1,x_2,x_3)=x_4^\circ\sqrt{\tfrac{1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2}{1+(x_1^\circ)^2+3(x_2^\circ)^2+4(x_3^\circ)^2}},\\ q_{5|123}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_1,x_2,x_3)=x_5^\circ\sqrt{\tfrac{1+x_1^2+3x_2^2+4x_3^2}{1+(x_1^\circ)^2+3(x_2^\circ)^2+4(x_3^\circ)^2}}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}^\circ)=\left\{\left(x_1,\,x_2,\,x_3,\;q_{4|123}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_1,x_2,x_3)\,,\;q_{5|123}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_1,x_2,x_3)\right)\right\}.$$

Итак, поверхность, задаваемая 3-мерными условными квантилями, представляет собой решение максимальной возможной размерности три квантильного уравнения Пфаффа.

Наконец, заметим, что для этих 3-мерных условных квантилей выполняется свойство воспроизводимости при сужении на одмерные условные квантили.

Нетрудно убедиться в том, что и 2-мерные условные квантили

$$q_{3|12}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_1,x_2)=x_3^0\sqrt{\tfrac{1+x_1^2+3x_2^2}{1+(x_1^0)^2+3(x_2^0)^2}};$$

$$q_{4|12}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_1,x_2)=x_4^0\sqrt{\tfrac{1+{x_1}^2+3{x_2}^2}{1+(x_1^0)^2+3(x_2^0)^2}};$$

$$q_{5|12}^{(\boldsymbol{x}^\circ)}(x_1,x_2)=x_5^0\sqrt{\tfrac{1+{x_1}^2+3{x_2}^2}{1+(x_1^0)^2+3(x_2^0)^2}}$$

также являются решениями квантильного уравнения Пфаффа

$$w\left(x_1,x_2,q_{3|12}^{(x^0)}(x_1,x_2)\,,q_{4|12}^{(x^0)}(x_1,x_2)\,,q_{5|12}^{(x^0)}(x_1,x_2)\right)=0$$

и что для этих условных квантилей также выполняется свойство воспроизводимости при сужении на одмерные условные квантили.

Проверим теперь, лежат ли найденные решения квантильного уравнения Пфаффа на "большой" условной квантили.

Вычислим $F_{5|1234}(x_5|\,x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)$. Поскольку

$$\begin{aligned} &f_{5|1234}(x_5|\,x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)=\tfrac{f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}{f_{1234}(x_1,x_2,x_3,x_4)}=\\ &=\tfrac{\sqrt{2}}{3}\left(1+{x_1}^2+3{x_2}^2+4{x_3}^2+10{x_4}^2\right)^{5/2}\cdot\\ &\cdot\left(\tfrac{4}{\pi\left(1+{x_1}^2+3{x_2}^2+4{x_3}^2+\frac{45{x_4}^2}{2}-15x_4x_5+\frac{9{x_5}^2}{2}\right)^3}+\right.\\ &\left.+\tfrac{80}{\sqrt{45}\,\pi(1+{x_1}^2+3{x_2}^2+4{x_3}^2+50{x_4}^2+40x_4x_5+10{x_5}^2)^3}\right),\end{aligned}$$

произведя преобразования, получим

$$F_{5|1234}(x_5|\,x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)=\int_{-\infty}^{x_5}f_{5|1234}(y|\,x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)\,dy=$$

$$=\frac{8}{9\pi}\int_{-\infty}^{s_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}\frac{1}{(u^2+1)^3}\,du+\frac{16}{9\pi}\int_{-\infty}^{s_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}\frac{1}{(u^2+1)^3}\,du,$$

где

$$s_1\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right)=\frac{\sqrt{2}(-15x_4+9x_5)}{6\sqrt{1+{x_1}^2+3{x_2}^2+4{x_3}^2+10{x_4}^2}},$$
$$s_2\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right)=\frac{20x_4+10x_5}{\sqrt{10}\sqrt{1+{x_1}^2+3{x_2}^2+4{x_3}^2+10{x_4}^2}}.$$

"Большая" условная квантиль $q_{5|1234}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\right)$ является решением уравнения

$$F_{5|1234}\left(x_5|\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\right)=F_{5|1234}\left(x_5^0|x_1^0,\, x_2^0,\, x_3^0,\, x_4^0\right)$$

относительно x_5.

Теперь заметим, что

$$s_1\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, q_{4|123}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,x_2,x_3\right),\, q_{5|123}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,x_2,x_3\right)\right)=s_1\left(x_1^0,\, x_2^0,\, x_3^0,\, x_4^0,\, x_5^0\right),$$

$$s_2\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, q_{4|123}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,\, x_2,\, x_3\right),q_{5|123}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,\, x_2,\, x_3\right)\right)=s_2\left(x_1^0,\, x_2^0,\, x_3^0,\, x_4^0,\, x_5^0\right).$$

Следовательно,

$$\left\{\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, q_{4|123}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,\, x_2,\, x_3\right),\, q_{5|123}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,\, x_2,\, x_3\right)\right)\right\}\subset$$
$$\subset\left\{\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, q_{5|1234}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\right)\right)\right\}.$$

Таким образом, имеет место воспроизводимость "большой" условной квантили $q_{5|1234}^{(\boldsymbol{x}^0)}$ при сужении на пару 3-мерных условных квантилей $q_{4|123}^{(\boldsymbol{x}^0)}$ и $q_{5|123}^{(\boldsymbol{x}^0)}$.

Кроме того, нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$s_1\left(x_1,x_2,q_{3|12}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,x_2\right),q_{4|12}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,x_2\right),q_{5|12}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,x_2\right)\right)=s_1\left(x_1^0,\, x_2^0,\, x_3^0,\, x_4^0,\, x_5^0\right),$$

$$s_2\left(x_1,x_2,q_{3|12}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,x_2\right),q_{4|12}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,x_2\right),q_{5|12}^{(\boldsymbol{x}^0)}\left(x_1,x_2\right)\right)=s_1\left(x_1^0,\, x_2^0,\, x_3^0,\, x_4^0,\, x_5^0\right),$$

которые влекут за собой воспроизводимость "большой" условной квантили $q_{5|1234}^{(\boldsymbol{x}^0)}$ при сужении на тройку 2-мерных условных квантилей $q_{3|12}^{(\boldsymbol{x}^0)}$, $q_{4|12}^{(\boldsymbol{x}^0)}$ и $q_{5|12}^{(\boldsymbol{x}^0)}$.

Литература

[1] Комлев А.Н., Шатских С.Я. Условные распределения вероятностей как преобразования независимости случайных величин // Вестник СамГУ. 2007. № 6(56). С. 204–222.

[2] Шатских С.Я. Необходимое условие воспроизводимости условных квантилей многомерных вероятностных распределений // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 2000. Т. 4. № 4. С. 67–72.

[3] Орлова И.С., Шатских С.Я. Дифференциальные уравнения Пфаффа для условных квантилей многомерных вероятностных распределений // Вестник СамГУ. 2010. № 2(76). С. 32–46.

[4] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: МИР, 1971. С. 302.

[5] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 28. С. 297.

[6] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. С. 188.
[7] Шатских С.Я., Кнутова Е.М. Воспроизводимость условных квантилей многомерного распределения Стьюдента // Известия РАЕН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1. № 1. С. 36–58.
[8] Мелкумова Л.Э., Шатских С.Я. Решение уравнений Пфаффа для условных квантилей при отсутствии полной интегрируемости // ВШКСМ/ВСППМ'2011. Адлер, 2011. Вып. 5.
[9] Bhattacharya P.K. On an analog of regression analysis. // Annals of mathematical statistics. 1963. V. 34. № 4. P. 1459–1473.
[10] Bhattacharya P., Gangopadhyay A. Kernel and Nearest-Neighbor Estimation of a Conditional Quantile. // Annals of statistics. 1990. V. 18. № 3. P. 1400–1415.
[11] Chaudhuri P. Global nonparametric estimation of conditional quantile functions and their derivatives. // Journal of multivariate analysis. 1991. № 39. P. 246–269.
[12] Poiraud-Casanova S., Thomas-Agan Ch. Quantiles conditionnels // Journal de la Société Française de Statistiques. 1998. V. 139. № 4. P. 31–41.

Поступила в редакцию 20/I/2012;
в окончательном варианте — 20/I/2012.

SOLVING NOT COMPLETELY INTEGRABLE QUANTILE PFAFFIAN DIFFERENTIAL EQUATIONS

 L.E. Melkumova, S. Ya. Shatskikh[7]

The present work deals with quantile Pfaffian differential equations which are constructed using two-dimensional conditional quantiles of multidimensional probability distributions. As it was shown in [3] in case when the initial probability distributions have reproducible conditional quantiles this kind of Pfaffian equations is completely integrable and the integral manifold is the conditional quantile of maximum dimension. In this paper we discuss properties of integral manifolds of maximum possible dimension for quantile Pfaffian equations which are not completely integrable. Manifolds of this type are described in terms of conditional quantiles of intermediate dimensions.

Key words: multidimensional probability distributions, conditional quantile reproducibility, quantile Pfaffian equations, Darboux class of differential 1-forms, first integrals, manifolds of maximum dimensions, mixture distributions.

Paper received $20/I/2012$.
Paper accepted $20/I/2012$.

[7]Melkumova Lana Eduardovna (`lame@uni-smr.ac.ru`), Shatskikh Sergei Yakovlevich (`shatskih@ssu.samara.ru`), Dept. of Theory Probability and Mathematical Statistics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.