УДК 517.2

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЗАДАЧИ ШВАРЦА

© 2012 В.Г. Николаев[1]

Рассмотрена задача Шварца для вектор-функций, аналитических по Дуглису. При выполнении определенных условий на матрицу она сведена к задаче Дирихле для равносильной ей системы однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Доказана обратимость преобразований, и на основании ее установлена теорема единственности. Также рассмотрен особый случай, когда редукция невозможна. Приведены примеры.

Ключевые слова: функция, аналитическая по Дуглису, задача Шварца, эквивалентная редукция, единственность.

1. Предварительные сведения

Настоящая статья посвящена исследованию свойств функций, аналитических по Дуглису (Douglis). Они представляют собой естественное обобщение голоморфных функций. Сделаем прежде всего несколько вводных замечаний.

Всюду для краткости будем обозначать ϕ_x и ϕ_y как частные производные скалярной или вектор-функции $\phi(x, y)$ по x и по y соответственно. Символы $\operatorname{Re}\lambda$, $\operatorname{Im}\lambda$ обозначают, соответственно, реальную и мнимую часть комплексного числа λ.

Определение 1.1. Пусть комплексная n-вектор-функция $\phi(x, y)$ двух вещественных переменных x, y имеет в области G первые частные производные по x и по y. Обозначим через J некоторую $n \times n$-матрицу, *среди собственных чисел которой нет вещественных,* и пусть в области G выполнено равенство

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \tag{1.1}$$

Тогда функцию $\phi(x, y)$ назовем аналитической по Дуглису, или J-аналитической с матрицей J в области G.

Определение 1.2. Будем говорить, что функция $\phi(x, y)$ соответствует матрице J, если для них выполнено (1.1).

Замечание 1.1. В скалярном случае, то есть при $J = \lambda$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, функцию $\phi(z)$, удовлетворяющую (1.1), можно называть λ-голоморфной. При $\lambda = i$ она совпадает с обычной голоморфной функцией.

[1]Николаев Владимир Геннадьевич (vg14@inbox.ru), кафедра алгебры и геометрии Новгородского государственного университета, 173003, Российская Федерация, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41.

Можно показать [1], что условий (1.1) или (1.2) достаточно для аналитичности функции $\phi(x,y)$ (в обычном смысле). При этом даже не нужно требовать непрерывности ее первых частных производных.

Важнейшим свойством J-аналитических функций является то, что если α и C — константы, то функции $\phi(z)$, $\alpha\cdot\phi(z)$, $\phi(z)+C$ будут соответствовать одной и той же матрице J. Это вытекает непосредственно из их определений. При $z = x + iy$ принято обозначение $[z]$ для матрицы $[z] = xE + yJ$, где E – единичная матрица. Примером J-аналитической функции может служить любой векторный многочлен вида

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{m} [z]^k v_k, \quad v_k \in \mathbb{C}^n, \ k = 0, \ldots, m.$$

Нелишне отметить, что аналитические по Дуглису функции широко применяются при исследовании краевых задач для эллиптических уравнений и систем в частных производных [1], поэтому их изучение представляет большой самостоятельный интерес.

2. Постановка задачи Шварца

Здесь мы ее приводим в формулировке проф. А.П. Солдатова.

Пусть односвязная область G ограничена гладким контуром Γ. Требуется найти аналитическую по Дуглису с матрицей J в области G функцию $\phi(z)$, которая непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ и удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re}\phi\big|_{\Gamma} = f(x,y), \tag{2.1}$$

где вещественная вектор-функция $f(x,y) \in C(\Gamma)$ задана.

Проблема, которая будет изучена в этой статье, состоит в следующем: *для каких матриц J однородная* ($f = 0$) *задача* (2.1) *имеет только постоянные решения.* Это и есть так называемая проблема единственности задачи Шварца.

Мной предложен следующий метод ее решения: *преобразовать задачу Шварца к некоторой сильно отличной от исходной, но равносильной форме.* Тогда мы получим уже совсем иную задачу, к ее решению можно применить специфические методы, использовать которые до преобразований было бы затруднительно. На основании такого подхода в пункте 4 будет доказана теорема единственности задачи (2.1) для некоторых типов матриц J.

Отмеченная выше редукция не всегда возможна. Но, как будет показано ниже в пункте 5, в случае, когда она невозможна, нет и единственности решения задачи Шварца.

Прежде чем приступить к преобразованиям, остановимся на уже изученных случаях единственности или отсутствия таковой. Как хорошо известно, *для скалярной* λ-голоморфной функции $\phi(x,y)$ выполняется следующее свойство: если $\operatorname{Re}\phi\big|_{\Gamma} = 0$, то функция равна константе. Как показано в [2], данное свойство верно и для J-аналитических 2-вектор-функций, соответствующих 2×2-матрицам, имеющим хотя бы один вещественный собственный вектор. Однако до недавнего времени оставался неясным следующий вопрос: верно ли данное утверждение в общем случае для всех аналитических по Дуглису вектор-функций? В работе [2] *было показано, что это неверно.* Именно были построены примеры неединственности в классе векторных многочленов второго порядка. Приведем один новый пример неединственности решения задачи Шварца в этом классе.

Пример 2.1. Пусть $n = 2$. Матрица

$$J = \begin{pmatrix} -1+3i & 1 \\ 3+4i & 1-i \end{pmatrix}$$

имеет собственное число $\lambda = i$ кратности два, поскольку сумма ее диагональных элементов равна $2i$, а определитель равен -1. Непосредственно проверяется, что вектор-функция

$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+3y^2-1-2xyi \\ x^2+3y^2-1-(4x^2+2xy+4y^2)i \end{pmatrix}$$

удовлетворяет (1.1) и, значит, является J-аналитической функцией. Имеем: $\operatorname{Re}\phi\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma : x^2+3y^2 = 1$.

Указанные примеры подчеркивают, что проблема единственности для задачи Шварца не является тривиальной.

3. Алгоритм преобразований

Обозначим $n \times n$-матрицу $J = A + Bi$, где A и B — вещественные матрицы. Пусть также J не имеет вещественных собственных чисел. Все такие матрицы разделим на два класса: Sl_- и Sl_+.

Определение 3.1. Будем говорить, что $J \in \mathrm{Sl}_-$, если $\det B \neq 0$. Если же $\det B = 0$, то обозначим $J \in \mathrm{Sl}_+$.

В пункте 5 будет показано, что для матриц из класса Sl_+ и только для них существуют соответствующие им и *не равные константе* линейные функции $\phi(x,y)$ такие, что $\operatorname{Re}\phi \equiv 0$ (тождественный нуль). Поэтому для таких матриц однородная задача Шварца a priori имеет решение не только в виде константы, и их с этой точки зрения не стоит изучать дальше.

Все дальнейшие преобразования этого пункта используют свойство $\det B \neq 0$, то есть будут проведены для матриц $J \in \mathrm{Sl}_-$. Для них проблема единственности не решается так просто, как для класса Sl_+.

Суть метода заключается в том, что для $n\times n$-матрицы $J = A+Bi$ при условии $\det B \neq 0$ уравнение (1.1) сводится к системе n линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. После этого доказываем, что однородная задача Шварца для функции $\phi(x,y)$, удовлетворяющей (1.1), и задача Дирихле для полученной системы одновременно имеют либо только тривиальное, либо нетривиальное решения. Алгоритм сведéния (1.1) к системе уравнений следующий.

Обозначим $\phi(x,y) = u + iv$, где $u(x,y)$, $v(x,y)$ — вещественные n-вектор-функции двух переменных. Тогда (1.1) перепишется в виде

$$(u+iv)_y - (A+Bi)\cdot(u+iv)_x = 0. \tag{3.1}$$

Приравнивая в последнем равенстве к нулю вещественную и мнимую части, получим следующую $2n$-систему, зависящую от векторов-переменных u_x, u_y, v_x, v_y :

$$\begin{cases} u_y - Au_x + Bv_x = 0, \\ v_y - Av_x - Bu_x = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Выразим из (3.2) векторы v_x, v_y через векторы u_x, u_y :

$$\begin{cases} Bv_x = Au_x - u_y, \\ -Av_x + v_y = Bu_x, \end{cases} \tag{3.3}$$

откуда

$$\begin{cases} v_x = B^{-1}Au_x - B^{-1}u_y, \\ v_y = Bu_x + Av_x = Bu_x + AB^{-1}Au_x - AB^{-1}u_y = \\ = (B + AB^{-1}A)u_x - AB^{-1}u_y, \end{cases} \tag{3.4}$$

так как матрица B^{-1} существует в силу условия $\det B \neq 0$.

Используя теперь условие замкнутости

$$(v_x)_y = (v_y)_x\,, \tag{3.5}$$

которое выполняется покоординатно, из (3.4) окончательно имеем

$$B^{-1}Au_{xy} - B^{-1}u_{yy} = (B + AB^{-1}A)u_{xx} - AB^{-1}u_{xy},$$

то есть

$$(B + AB^{-1}A)u_{xx} - (AB^{-1} + B^{-1}A)u_{xy} + B^{-1}u_{yy} = 0. \tag{3.6}$$

Это и есть искомая $n \times n$-система уравнений в частных производных второго порядка, которую мы хотели построить по (1.1). Она имеет n уравнений, а неизвестными являются функции $u(x,y) = u_1(x,y), \dots, u_n(x,y)$.

Определение 3.2. Пусть $J = A + Bi$, где $\det B \neq 0$. Тогда будем говорить, что система (3.6) построена по матрице J.

Как нетрудно видеть, $u(x,y) \equiv \operatorname{Re}\phi(x,y)$ в (3.1). Поэтому решение задачи $\operatorname{Re}\phi\big|_\Gamma = f(x,y)$ для (3.1) переходит в решение задачи Дирихле

$$u(x,y)\big|_\Gamma = f(x,y) \tag{3.7}$$

для (3.6) в области G.

Теперь осталось показать, что приведенный выше алгоритм обратим. Пусть $\det B \neq 0$. Обозначим $u(x,y)$ — решение задачи (3.7) для (3.6). Подставим его в правую часть (3.4), а через v_x, v_y обозначим частные производные некоторой вектор-функции $v(x,y) = (v_1, \dots, v_n)$, подлежащей определению. Для (3.4) выполнено условие замкнутости (3.5), так как вектор-функция $u(x,y)$ по условию есть решение (3.6). Поэтому вектор-функцию $v(x,y)$, удовлетворяющую (3.4), можно восстановить (покоординатно). Тогда все $2n$ функций $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, \dots, v_n)$ будут решением системы (3.3), то есть и (3.1).

В результате имеем функцию $\phi(x,y)$, аналитическую по Дуглису с матрицей J и такую, что $\operatorname{Re}\phi(x,y) \equiv u(x,y)$, что и доказывает обратимость алгоритма.

Замечание 3.1. Мнимая часть функции $\phi(z)$, то есть $v(x,y)$, может не быть непрерывной в $\overline{G}$. Поэтому, строго говоря, алгоритм обратим, если в постановке задачи Шварца от функции $\phi(z)$ потребовать непрерывности в $\overline{G}$ только ее реальной части.

Приведенные выше построения резюмируем в виде двух лемм.

Лемма 3.1. Пусть система (3.6) построена по $n \times n$-матрице J. Пусть также аналитическая по Дуглису функция $\phi(x,y)$ соответствует этой матрице и определена в односвязной области G с границей Γ. Тогда для одной и той же функции $f \in C(\Gamma)$ решение $\phi(x,y)$ задачи (2.1) и решение $u(x,y)$ задачи Дирихле (3.7) для (3.6) существуют или нет одновременно, причем $\operatorname{Re}\phi \equiv u$.

Лемма 3.2. Пусть в (2.1) и в (3.7) функция $f \equiv 0$. Тогда однородная задача Шварца для матрицы J и однородная задача Дирихле (3.7) для системы (3.6), построенной по J, имеют одновременно либо только тривиальные решения, либо решения нетривиальные.

Под тривиальным решением задачи Шварца подразумевается ее решение в виде вектор-константы.

Таким образом, изучение задачи Шварца можно свести к рассмотрению задачи Дирихле для систем вида (3.6). С другой стороны, теоремы единственности задачи Шварца для конкретных типов матриц можно использовать для доказательства единственности задачи Дирихле для систем типа (3.6), построенным по этим матрицам.

Замечание 3.2. Рассмотрим произвольную систему дифференциальных уравнений, аналогичную (3.6):

$$A_1 \cdot u_{xx} + C_1 \cdot u_{xy} + B_1 \cdot u_{yy} = 0, \tag{3.8}$$

где A_1, C_1, B_1 — вещественные $n \times n$-матрицы.

На основании (3.6) можно сделать вывод о том, что (3.8) построена по матрице $J = A + Bi$ тогда и только тогда, если $A_1 = (B + AB^{-1}A)$, $C_1 = -(AB^{-1} + B^{-1}A)$, $B_1 = B^{-1}$. Очевидно, что такие матрицы A, B не всегда можно подобрать. Это ясно даже в одномерном случае $n = 1$, когда матрицы являются числами.

4. Возможные применения полученных преобразований

Как уже говорилось вначале, преобразования пункта 3 производились для того, чтобы затем применить их к проблеме единственности решения задачи Шварца. И вот пришла пора это сделать. Приложения системы (3.6), так сказать к практике, оформим в виде следующего утверждения.

Теорема 4.1 (достаточное условие единственности). Пусть $n \times n$-матрица J имеет вещественный жорданов базис Q. Тогда однородная задача (2.1) имеет только постоянные решения.

Доказательство. Как известно, $J = QJ_1Q^{-1}$, где J_1 — жорданова форма матрицы J. Сделаем в (1.1) подстановку $\phi = Q\psi$, тогда это равенство перепишется в виде

$$Q\psi_y - QJ_1Q^{-1} \cdot Q\psi_x = 0,$$

откуда

$$\psi_y - J_1 \cdot \psi_x = 0. \tag{4.1}$$

Условие $\operatorname{Re}\phi\big|_\Gamma = 0$ для $\phi(z)$ перейдет в условие $\operatorname{Re}\psi\big|_\Gamma = 0$ для $\psi(z)$ в силу вещественности Q.

Матрица J_1 состоит из блоков — жордановых клеток. Поэтому (4.1) распадается на независимые подсистемы, соответствующие этим блокам, и достаточно рассмотреть случай, когда в (4.1) J_1 является жордановой клеткой.

Пусть $\lambda = \alpha + \beta i$ — единственное собственное число жорданова блока J_1. Пусть также $J_1 = A + Bi$. Тогда $B = \beta \cdot E$, а A — вещественная жорданова клетка с элементом α на диагонали. При этом $\beta \neq 0$, так как матрица J по условию не имеет вещественных собственных чисел. Отсюда, в частности, следует, что матрица B неособая. Поэтому $J_1 \in \mathrm{Sl}_-$ и применим алгоритм редукции из п. 3.

Систему (3.6) можно переписать в виде

$$(B + B^{-1}A^2)u_{xx} - (2B^{-1}A)u_{xy} + B^{-1}u_{yy} = 0.$$

Умножая последнее равенство на B, имеем:

$$\left(B^2 + A^2\right) u_{xx} - 2A \cdot u_{xy} + u_{yy} = 0. \tag{4.2}$$

Матрицы B^2+A^2 и A нижнетреугольные. Вдоль главной диагонали B^2+A^2 будет стоять вещественное число $\beta^2+\alpha^2$, а на главной диагонали A стоит число α.

Пусть для системы (4.2), *то есть для каждой ее строки,* поставлена однородная задача Дирихле. Обозначим $p(x,y)$ первую компоненту вектор-функции $u(x,y)$. Тогда первая строка (4.2) имеет вид

$$(\beta^2+\alpha^2)p_{xx}-2\alpha\cdot p_{xy}+p_{yy}=0. \tag{4.3}$$

Из (4.3) вытекает, что

$$(\beta^2+\alpha^2)\cdot 1-\alpha^2=\beta^2>0, \tag{4.4}$$

поскольку $\beta\neq 0$. Следовательно, уравнение (4.3) будет эллиптическим, и однородная задача Дирихле для него имеет только нулевое решение, то есть $p(x,y)\equiv 0$.

Применяя теперь к (4.2) тривиальную индукцию, получим тождество $u(x,y)\equiv 0$. А поскольку все преобразования, сводившие (3.6) к (4.2), являются обратимыми, то согласно лемме 3.2 функция $\psi(x,y)\equiv\mathrm{const}$, откуда $\phi=Q\psi\equiv\mathrm{const}$, что и требовалось. Тем самым, теорема 4.1 доказана.

Заметим, что утверждение теоремы выполняется в следующем частном случае: если матрица $J=kE+Bi$, где k — произвольное вещественное число, а матрица B имеет только вещественные собственные числа. Действительно, жорданов базис Q матрицы B будет вещественным. Обозначим через J_1 ее жорданову форму, тогда $J_1=Q^{-1}BQ$. В этом случае

$$Q^{-1}JQ=Q^{-1}(k\cdot E+Bi)Q=kE+Q^{-1}BQ=kE+J_1,$$

то есть матрица Q будет жордановым базисом и для J. Таким образом, для J выполнены условия теоремы 4.1.

5. Особый случай $\det B=0$

Как видим, преобразования пункта 3 некорректны для матриц $J=A+$ $+Bi\in\mathrm{Sl}_+$, то есть когда $\det B=0$. Возникает закономерный вопрос: что же можно сказать о проблеме единственности в этом случае? Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. Для того чтобы для данной $n\times n$-матрицы $J=A+Bi$ существовала непостоянная линейная вектор-функция $\phi(x,y)$, удовлетворяющая однородному условию $\mathrm{Re}\,\phi\equiv 0$, необходимо и достаточно выполнение условия $\det B=0$.

Доказательство. Положим

$$\phi(x,y)=i[x\mathbf{a}+y\mathbf{b}], \tag{5.1}$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — вещественные n-векторы, подлежащие определению. Тогда $\mathrm{Re}\,\phi(x,y)\equiv 0$. Нам нужно, чтобы эта функция была аналитической по Дуглису. Для этого подставим (5.1) в (1.1) и найдем векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $i\mathbf{b}=(A+Bi)i\mathbf{a}$, то есть

$$i\mathbf{b}=iA\mathbf{a}-B\mathbf{a}. \tag{5.2}$$

Как нетрудно видеть, (5.2) возможно только при выполнении условия

$$B\mathbf{a}=0. \tag{5.3}$$

Если в (5.2) вектор $\mathbf{a}=0$, то в (5.2) $\mathbf{b}=0$, откуда в силу (5.1) функция $\phi(x,y)$ есть константа. Если же мы хотим, чтобы она константой не была, то должно быть выполнено условие $\mathbf{a} \neq 0$, а это согласно (5.3) возможно, только если $\det B = 0$. Тем самым доказана необходимость.

Достаточность. Пусть $\det B = 0$. Подставив любое нетривиальное решение (5.3) в (5.2), подберем вектор $\mathbf{b} = A\mathbf{a}$ и тем самым восстановим не равную константе линейную функцию $\phi(x, y)$ вида (5.1). Теорема 5.1 доказана.

Итак, *для матриц* $J \in \mathrm{Sl}_+$ *единственности однородной задачи Шварца быть не может. Приведем два примера.*

Пример 5.1. Функция $\phi(x, y) = [(x + y)i,\ (y - x)i]$ соответствует матрице

$$J = \begin{pmatrix} i+1 & i \\ i & i-1 \end{pmatrix}.$$

Это проверяется подстановкой в (1.1). Матрица J имеет кратное собственное число $\lambda = i$. При этом для J выполнен критерий $\det B = 0$, а функция $\phi(x, y)$ имеет свойство $\mathrm{Re}\, \phi(x, y) \equiv 0$.

Коль скоро речь идет о функциях с тождественно нулевой реальной частью, то приведем следующий

Пример 5.2. Функция $\phi(x, y) = [(3x^2y - y^3)i,\ 2(x^3 - 3xy^2)i]$ соответствует матрице

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

имеющей собственные числа $\lambda = \pm i$. Здесь также $\det B = 0$. Как видим, $\phi(x, y)$ *не является линейной,* но при этом $\mathrm{Re}\, \phi \equiv 0$.

Заключение

В пункте 5 был исключен из рассмотрения целый класс матриц $J = A + Bi$ со свойством $\det B = 0$. Для них задача Шварца не может иметь единственного решения. Дальнейшее изучение проблемы, обозначенной в пункте 2, сводится к рассмотрению случая $\det B \neq 0$. Алгоритм пункта 3 является одним из возможных путей ее решения. Как видим, он может быть с успехом использован, чему свидетельствует теорема 4.1.

Такой метод сведения исходной задачи к равносильным, но не похожим на нее формам представляется довольно эффективным.

Литература

[1] Солдатов А.П. Функции, аналитические по Дуглису. Новгород: Изд-во НовГУ, 1995. 195 с.

[2] Николаев В.Г. О единственности решения однородной задачи Шварца для функций, аналитических по Дуглису // Научные ведомости БелГУ. Сер.: Математика, физика. 2011. № 17(112). Вып. 24. С. 94–101.

[3] Николаев В.Г. О применении Sw-классификации матриц для решения проблемы единственности задачи Шварца // Вестник НовГУ. Сер.: Технические науки. 2011. № 65. С. 87–90.

[4] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1988. 334 с.

Поступила в редакцию 4/*VI*/2012;
в окончательном варианте — 4/*VI*/2012.

ABOUT A TRANSFORMATION OF SCHWARZ PROBLEM

© 2012 V.G. Nikolaev[2]

We consider the Schwarz problem for vector-valued functions analytic according to Douglis. We prove that under certain conditions on the matrix this problem is reduced to the Dirichlet problem for some equivalent system of second-order PDEs. The reversebility of transformations is proved, and on that ground the theorem of uniqueness is established. A special case when reduction is impossible is also viewed. The examples are given.

Key words: analytic functions according to Douglis, Schwarz problem, equivalent reduction, uniqueness.

Paper received 4/ *VI*/2012.
Paper accepted 4/ *VI*/2012.

[2]Nikolaev Vladimir Gennadievich (`vg14@inbox.ru`), the Dept. of Algebra and Geometry, Novgorod State University, Velikiy Novgorod, 173003, Russian Federation.