

УДК 517.96: 574.34

ДВ-МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ "ХИЩНИК-ЖЕРТВА"© 2009 В.В. Зайцев, А.В. Карлов-младший, С.С. Телегин¹

Принцип импульсной инвариантности теории синтеза цифровых фильтров использован для перехода к дискретному времени в модели Вольтерра с запаздыванием. Система "хищник-жертва" представлена как дискретная автоколебательная система. Приведены результаты имитационного моделирования автоколебаний в системе со случайным запаздыванием.

Ключевые слова: модель Вольтерра, запаздывающие связи, автоколебания, дискретное время.

Введение

Математическое моделирование процессов в био- и экосистемах является одним из основных методов их теоретического исследования. Знаменитая модель Вольтерра [1], описывающая систему "хищник-жертва", известна уже более семидесяти лет. Тем не менее, исследования в рамках различных модификаций этой классической модели активно проводились и в последнее время [2]. Известны недостатки модели, главный из которых — ее консервативность, не позволяющие проводить количественных оценок характеристик процессов в системе "хищник-жертва". Согласно сложившимся в последние десятилетия представлениям о динамике системы ее основным движением являются устойчивые автоколебания численностей видов [3]. Следовательно, при формулировке динамической модели система должна рассматриваться как автоколебательная.

Одним из возможных способов преобразования модели Вольтерра к автоколебательной системе является учет естественных запаздываний в скоростях изменения видов по отношению к факторам, вызывающим данные изменения. При этом принимается во внимание способность запаздывающей

¹Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Карлов-младший Александр Владимирович, Телегин Сергей Сергеевич, кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

обратной связи кардинально изменять характер динамической системы [4]. Динамические модели системы "хищник-жертва" с запаздыванием предложены и исследованы в работах Колесова [5] и Вангерски и Каннингема [6]. В математическом плане модели с запаздыванием представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Они не имеют точных аналитических решений, и при анализе моделей речь идет в основном о численных результатах. Ситуация еще более усложняется с введением в динамические модели флуктуаций параметров [7] и случайных внешних воздействий для описания реально существующих в системе стохастических процессов [8]. Для расчета вероятностных характеристик стохастических автоколебаний не удастся воспользоваться методами теории марковских процессов, т. к. в данном случае из-за наличия в системе последствия предположение о марковости неправомерно.

В этих условиях численный эксперимент в системе "хищник-жертва" становится ведущим методом исследования. В настоящей работе представлена имитационная модель системы "хищник-жертва" с запаздыванием, основанная на уравнениях движения в дискретном времени (ДВ-модель), и приведены некоторые результаты статистического эксперимента в системе со случайным запаздыванием.

1. Дифференциальная модель системы. Стационарные режимы и их устойчивость

В терминах физической модели исследуемая система может быть описана следующим образом. В ограниченной области пространства обитают два биологических вида. Один из них — жертвы — получает энергию из окружающей среды, питаясь растительной пищей, другой — хищники — может существовать только при наличии жертв, питаясь последними. Обозначив через $N_1(t)$ и $N_2(t)$ численности жертв и хищников, динамику их взаимодействия опишем системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \nu_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 - P_m(N_1(t - \theta)), \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\nu_2 N_2 + \gamma_2 N_1(t - \tau) N_2(t - \tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ν_1 , ν_2 , γ_1 , γ_2 — положительные постоянные: ν_1 — коэффициент прироста (репродуктивности) жертв, ν_2 — коэффициент вымирания хищников, γ_1 — коэффициент гибели жертв из-за встречи с хищниками, γ_2 — коэффициент размножения хищников. Запаздывание τ имеет смысл усредненного интервала времени между моментом гибели одной особи жертвы и моментом соответствующего увеличения числа взрослых хищников. Аналогично интервал θ учитывает запаздывающую реакцию жертв на изменение условий поступления энергии из окружающей среды. В первом уравнении слагаемое $P_m(N_1(t - \theta))$, где P_m — полином четной степени m , описывает внутривидовую конкуренцию у жертв, ограничивая рост их численности в

отсутствие хищников. Заметим, что при $\theta = 0$ и $P_m(N_1) = P_2(N_1) = \beta N_1^2$ уравнения (1) описывают модель Вангерски — Каннингема [6], а при $\gamma_1 = 0$ и $P_m(N_1) = P_2(N_1) = \beta N_1(t)N_1(t - \theta)$ первое уравнение системы (1) — модель Ферхюльста-Перла [10] с запаздыванием.

В уравнениях (1) целесообразно перейти к нормированным численностям видов:

$$n_1(t) = \frac{\gamma_2}{\nu_2} N_1(t), \quad n_2(t) = \frac{\gamma_1}{\nu_1} N_2(t).$$

После чего система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= \nu_1 n_1 - \nu_1 n_1 n_2 - p_m(n_1(t - \theta)), \\ \frac{dn_2}{dt} &= -\nu_2 n_2 + \nu_2 n_1(t - 1) n_2(t - \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $p_m(n_1(t - \theta)) = \gamma_2 P_m(\nu_2 n_1(t - \theta)/\gamma_2)/\nu_2$. Дальнейшее обсуждение модели проведем для частного случая $\theta = 0$, полагая, что $p_m(n_1(t - \theta)) = \mu n_1^m(t)$.

Система уравнений (2) имеет стационарное решение

$$n_{10} = 1, \quad n_{20} = 1 - \frac{\mu}{\nu_1} = 1 - \mu_1, \quad (3)$$

описывающее состояние системы с неменяющимися во времени численностями видов.

Введем в рассмотрение новые переменные $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — отклонения численностей от стационарных значений:

$$n_1(t) = n_{10} + y_1(t), \quad n_2(t) = n_{20} + y_2(t).$$

Для переменных $y_1(t)$ и $y_2(t)$ уравнения (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\mu(m - 1)y_1 - \nu_1 y_2 - \nu_1 y_1 y_2 - \mu \varphi_m(y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\nu_2 y_2 + \nu_2(1 - \mu_1)y_1(t - \tau) + \nu_2 y_2(t - \tau) + \nu_2 y_1(t - \tau)y_2(t - \tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varphi_m(y_1) = (1 + y_1)^m - (1 + m y_1)$ — нелинейная функция.

Устойчивость стационарного состояния (3) исследуется на основе анализа поведения решений вида $y_1(t) = A_1 \exp(st)$, $y_2(t) = A_2 \exp(st)$ линеаризованной системы уравнений (4). Этой системе соответствует характеристическое уравнение

$$s^2 + (\mu(m - 1) + \nu_2)s + \mu(m - 1)\nu_2 + (\nu_1\nu_2 - \mu m \nu_2 - \nu_2 s) \exp(-s\tau) = 0. \quad (5)$$

Комплексные корни $s = s_r + j s_i$ уравнения (5) удастся найти лишь численно. Устойчивость обеспечивается выполнением условия $s_r \leq 0$. Для отыскания границ областей устойчивости в пространстве параметров ν_1, ν_2, μ можно воспользоваться методом D -разбиений Неймарка [9].

На рис. 1 показано сечение поверхности $s_r = 0$ в пространстве координат (ν_1, ν_2, μ) плоскостями $\nu_1\tau = 0,25$, $\nu_1\tau = 0,5$ и $\nu_1\tau = 0,75$. Ниже

кривой $\mu = \mu(\nu_2)$ находятся значения μ , при которых малые колебания не затухают, а развиваются в предельный цикл. При значениях μ , лежащих выше поверхности, малые отклонения от положения равновесия затухают, и система возвращается в стационарное состояние n_{10}, n_{20} .

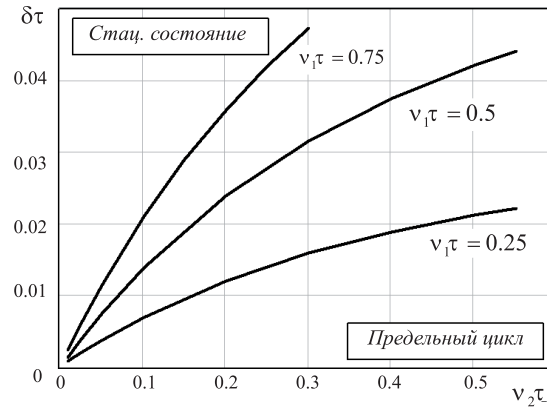


Рис. 1. Области устойчивого стационарного состояния и автоколебательного режима

Что же касается нулевого решения ($n_{10} = 0, n_{20} = 0$) системы (2), то его устойчивость характеризуется линеаризованными уравнениями

$$\frac{d\Delta n_1}{dt} = \nu_1 \Delta n_1, \quad \frac{d\Delta n_2}{dt} = -\nu_2 \Delta n_2.$$

При этом вполне очевидно, что при любых положительных значениях ν_1 любые малые отклонения выводят процесс либо на предельный цикл, либо в ненулевое стационарное состояние.

2. Уравнения движения системы в дискретном времени

В работах [10, 11] предложен способ перехода к дискретному времени в нелинейных динамических системах и формирования алгоритмов генерации ДВ-автоколебаний. Следуя [11], выделим в системе (4) устойчивую диссипативную подсистему, записав уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\mu(m-1)y_1 - \nu_1 y_2 + f_1(t, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\nu_2 y_2 + f_2(t, y_1, y_2). \end{aligned} \quad (6)$$

При этом введены обозначения

$$\begin{aligned} f_1(t, y_1, y_2) &= -\nu_1 y_1(t) y_2(t) - \mu \varphi_m(y_1(t)), \\ f_2(t, y_1, y_2) &= \nu_2 (1 - \mu_1) y_1(t - \tau) + \nu_2 y_2(t - \tau) + \nu_2 y_1(t - \tau) y_2(t - \tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Формально считая выделенные линейные части уравнений (6) уравнениями состояния некой линейной системы с двумя независимыми входами и двумя выходами, введем в рассмотрение матричную системную функцию

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-s_1} & \frac{B}{s-s_1} - \frac{B}{s-s_2} \\ 0 & \frac{1}{s-s_2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

с полюсами $s_1 = -\mu(m-1)$ и $s_2 = -\nu_2$; $B = \nu_1 / (\mu(m-1) - \nu_2)$.

Для перехода к дискретному времени с интервалом дискретизации Δ предлагается применить принцип инвариантности импульсных характеристик, широко используемый в практике синтеза линейных цифровых фильтров [12]. В рамках такого подхода в элементах системной функции НВ-системы (8) проводится замена простых дробей вида

$$\frac{1}{s-s_i} = \frac{\Delta}{1-\exp(s_i\Delta)z^{-1}}.$$

В результате получается системная функция ДВ-системы

$$\bar{H}(z) = \Delta \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\exp(s_1\Delta)z^{-1}} & \frac{B}{1-\exp(s_1\Delta)z^{-1}} - \frac{B}{1-\exp(s_2\Delta)z^{-1}} \\ 0 & \frac{1}{1-\exp(s_2\Delta)z^{-1}} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Учитывая, что слагаемое с аргументом z^{-1} в системной функции соответствует временной задержке Δ в уравнении движения, по элементам матрицы (9) можно записать следующие уравнения движения ДВ-системы:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)}[n] &= a_1^{(11)} y_1^{(1)}[n-1] + b_0^{(11)} f_1[n, y_1, y_2], \\ y_1^{(2)}[n] &= a_1^{(12)} y_1^{(2)}[n-1] + a_2^{(12)} y_1^{(2)}[n-2] + b_1^{(12)} f_2[n-1, y_1, y_2], \\ y_1[n] &= y_1^{(1)}[n] + y_1^{(2)}[n], \\ y_2[n] &= a_1^{(22)} y_2[n-1] + b_0^{(22)} f_2[n, y_1, y_2]. \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты в уравнениях (10) связаны с параметрами НВ-системы соотношениями

$$\begin{aligned} a_1^{(11)} &= \exp(s_1\Delta), \quad a_1^{(12)} = \exp(s_1\Delta) + \exp(s_2\Delta), \quad a_1^{(22)} = \exp(s_2\Delta), \\ a_2^{(12)} &= -\exp(s_1\Delta + s_2\Delta), \\ b_0^{(11)} &= \Delta, \quad b_1^{(12)} = \Delta B (\exp(s_1\Delta) - \exp(s_2\Delta)), \quad b_0^{(22)} = \Delta, \end{aligned}$$

а нелинейные функции дискретного временного аргумента в соответствии с выражениями (7) имеют вид

$$\begin{aligned} f_1[n, y_1, y_2] &= -\nu_1 y_1[n] y_2[n] - \mu \varphi_m(y_1[n]), \\ f_2[n, y_1, y_2] &= \nu_2 (1 - \mu_1) y_1[n-N] + \nu_2 y_2[n-N] + \nu_2 y_1[n-N] y_2[n-N]. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом предполагается, что интервал дискретизации составляет целую часть времени запаздывания: $\tau = N\Delta$.

Система уравнений движения (10) содержит лишь одно нелинейное разностное уравнение (первое соотношение). К нему можно применить метод

последовательных приближений. Все остальные соотношения являются рекуррентными формулами, что обеспечивает высокую вычислительную эффективность дискретной модели (10).

Пример результатов, полученных в рамках модели (10), представлен на рис. 2: график процесса возбуждения автоколебаний (а) и их амплитудный спектр (б). При этом параметры модели имеют следующие значения: $\Delta = \tau/10$, $\nu_1\tau = 0,5$, $\nu_2\tau = 0,1$, $\mu\tau = 0,003$, $m = 4$. Сплошная линия соответствует автоколебаниям жертв $Y_1[n] = y_1[n] + n_{10}$, пунктирная — хищников $Y_2[n] = y_2[n] + n_{20}$. Частота на графике спектра измеряется в единицах частоты $\Omega = 2\pi/\tau$.

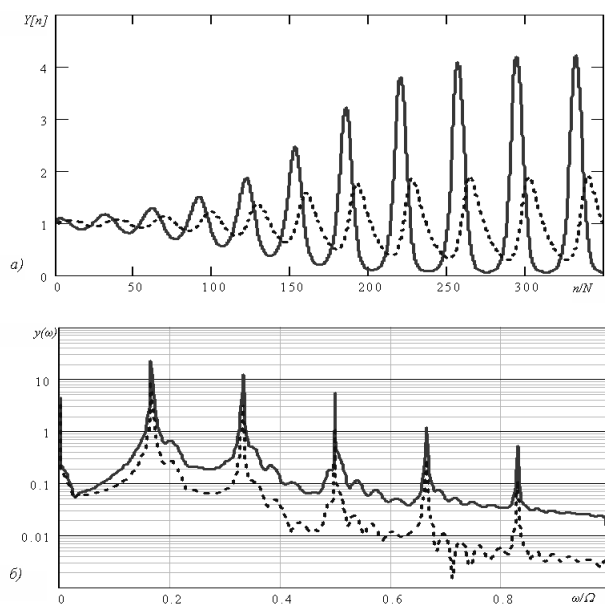


Рис. 2. Процесс возбуждения (а) и амплитудный спектр (б) автоколебаний численностей видов

Как видно из графиков, в рассматриваемом примере в системе возбуждаются существенно нелинейные одночастотные автоколебания, характеризующиеся высоким уровнем гармоник основной частоты. Наличие постоянной составляющей в спектре автоколебаний означает, что закон сохранения средних, имеющий место в классической модели Вольтерра [1], в данном случае не выполняется.

3. Стохастическая модель со случайным запаздыванием

Динамическую модель (10) нетрудно дополнить шумовыми источниками, моделирующими случайные аддитивные и мультипликативные воздей-

ствия на систему. Стохастическая модель системы при наличии случайных изменений коэффициентов репродуктивности жертв ν_1 и хищников ν_2 приведена в [13]. Здесь мы рассмотрим автоколебания в системе со случайным запаздыванием. Отметим, что вопрос о наличии в системе "хищник-жертва" распределенного во времени запаздывания также обсуждался Вольтера в монографии [1].

Будем считать, что дискретное время запаздывания N в уравнениях движения (10) является элементом временной последовательности случайных целых чисел с заданным распределением вероятностей $P(N)$ в интервале значений от N_{\min} до N_{\max} . Тогда движение системы будет представлять собой реализацию автоколебаний со случайным запаздыванием.

В процессе моделирования последовательность N_n может быть получена путем выборки значений $N_{\min} \leq N_n \leq N_{\max}$ из программно генерируемых псевдослучайных чисел с нужным законом распределения. Требуемые спектрально-корреляционные характеристики последовательности можно получить методами передискретизации или цифровой фильтрации.

На рис. 3 представлен отрезок реализации случайного дискретного времени запаздывания, полученной путем выборки с $N_{\min} = 2$, $N_{\max} = 18$ из гауссова белого шума со средним значением $\langle w_n \rangle = 10$ и дисперсией $\sigma_w^2 = 100$ и последующей повышающей дискретизации (интерполяции) с коэффициентом $I = 10$. Последовательность N_n характеризуется выборочными средним $N_a = 10$ и дисперсией $\sigma_N^2 = 21,9$. Нормированная корреляционная функция $k(n) = K(n)/\sigma_N^2$ последовательности показана на рис. 4.

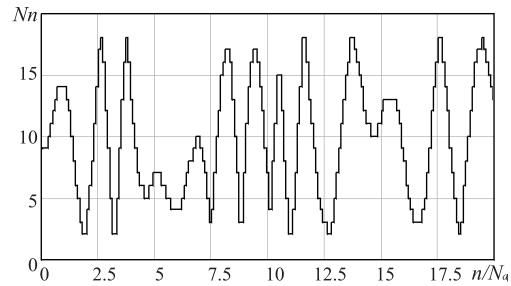


Рис. 3. Реализация случайного запаздывания

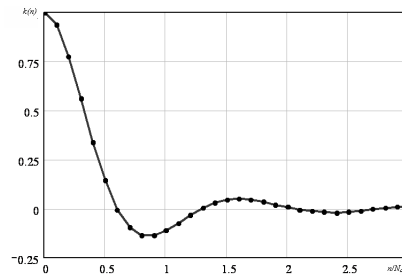


Рис. 4. Корреляционная функция случайного запаздывания

Приведем некоторые результаты моделирования стохастических автоколебаний в системе со значениями параметров, соответствующими рис. 2, при наличии случайного запаздывания с указанными статистическими характеристиками.

График процесса возбуждения автоколебаний представлен на рис. 5, *а*, усредненные амплитудные спектры автоколебаний $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — на рис. 5, *б*. Спектры рассчитаны методом Бартлетта по отрезкам реализаций установившихся автоколебаний: число отсчетов в реализации равно 16384, число реализаций в псевдоансамбле — 8. Фазовый портрет системы в координатах $Y_1[n]$ и $Y_2[n]$ показан на рис. 6.

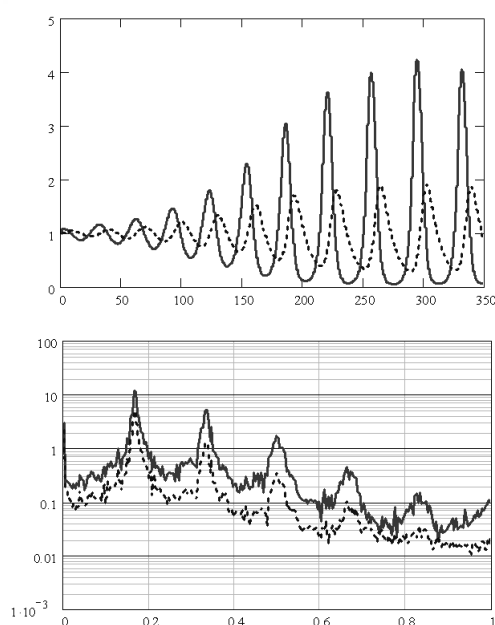


Рис. 5. Процесс возбуждения (*а*) и амплитудный спектр (*б*) автоколебаний численностей видов в модели со случайным запаздыванием

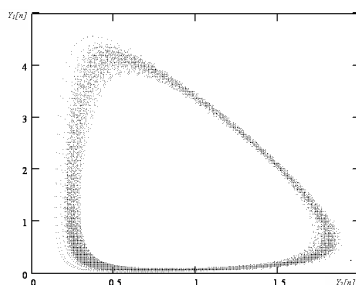


Рис. 6. Фазовый портрет автоколебаний численностей видов в модели со случайным запаздыванием

Как и следовало ожидать, случайным образом меняющееся во времени запаздывание приводит к уширению спектральной линии автоколебаний и размыванию их предельного цикла. Однако даже весьма существенные флуктуации запаздывания не вызывают фиксируемой в наблюдениях степени размывания вольтерровских циклов [14]. По-видимому, в системе "хищник-жертва" случайное запаздывание на является основным фактором стохастизации колебаний численностей видов.

Заключение

Описанный здесь способ формирования дискретной временной модели нелинейной системы путем выделения линейной диссипативной подсистемы и использования принципа импульсной инвариантности применим к различным модификациям модели Вольтерра (А.Д. Базыкина [2], Ю.С. Колесова [5] и др.). Отметим также, что вольтерровские модели находят применение в формирующемся направлении современной экономики, ставшим известным в последнее десятилетие под названием "Эконофизика" [15] или "Динамическая экономика".

Литература

- [1] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.
- [2] Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М.: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
- [3] Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях / пер. с англ. М.: Мир, 1983. 400 с.
- [4] Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
- [5] Колесов Ю.С. Математические модели экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1979. С. 3–40.
- [6] Бабский В.Г., Мышкис А.Д. Математические модели в биологии, связанные с учетом последствия // Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир, 1983. 400 с.
- [7] Музычук О.В. Вероятностные характеристики системы "хищник-жертва" со случайно изменяющимися параметрами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. № 2. С. 80–86.
- [8] Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
- [9] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

- [10] Зайцев В.В., Давыденко С.В., Зайцев О.В. Динамика автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т. 3. № 2. С. 64–67.
- [11] ДВ-осцилляторы, порождаемые томсоновскими автоколебательными системами / В.В. Зайцев [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. № 4. С. 98–103.
- [12] Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
- [13] Зайцев В.В., Телегин С.С. Интегральная модель автоколебаний в системе "хищник-жертва" // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2009. Т. 12. № 2.
- [14] Hall C.A.S. An assessment of several of the historically most influential theoretical models used in ecology end of the data provided in their support // Ecological modeling. 1988. V. 43. P. 5–31.
- [15] Романовский М.Ю., Романовский Ю.М. Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 280 с.

Поступила в редакцию 17/IV/2009;
в окончательном варианте — 17/IV/2009.

THE DISCRETE TIME "PREDATOR-PREY" MODEL

© 2009 V.V. Zaitsev, A.V. Karlov-junior, S.S. Telegin²

Method of impulse invariance, which is often used to design digital filters, was used to create the discrete time Volterra model with lagging. The predator-prey system was studied as a discrete self-oscillating system. The results of simulation modeling of a system with random lagging are listed.

Key words: Volterra model, lagging links, self-oscillations, discrete time.

Paper received 17/IV/2009.

Paper accepted 17/IV/2009.

²Zaitsev Valeriy Vasilievich (zaitsev.ssu.samara.ru), Karlov-junior Alexander Vladimirovich, Telegin Sergey Sergeevich, Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiosystems, Samara State University, Samara, 443011, Russia.