МАТЕМАТИКА

УДК 517.988

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2009 И.А. Бахтин, С.Д. Ле[1]

В настоящей работе в вещественном банаховом пространстве с конусом приводятся новые признаки существования неподвижных точек экстремальных операторов. Нормальность конуса и непрерывность исследуемых операторов, вообще говоря, не предполагаются.

Ключевые слова: конус, неподвижная точка, экстремальный оператор.

1. Предварительные сведения

Приведем вначале некоторые определения и вспомогательные утверждения, которые используются в дальнейшем.

Пусть оператор A действует в вещественном банаховом пространстве E, полуупорядоченном при помощи конуса K: пишут $x \leqslant y$, если $y - x \in K$ [1–5].

Определение 1. Монотонный на множестве $M \subset E$ оператор A называется h-экстремальным на этом множестве [5], если для любой монотонной ограниченной снизу и сверху последовательности $(x_n) \subset M$ существуют элементы $\sup(Ax_n)$ и $\inf(Ax_n)$.

Определение 2. Линейный (непрерывный) оператор B, действующий в вещественном банаховом пространстве E с конусом K, называется положительно обратимым [2], если у него существует обратный, положительный на конусе K оператор $B^{-1} : B^{-1}K \subset K$.

Лемма 1. В вещественном банаховом пространстве E с конусом $K \subset E$ возрастающие (убывающие) последовательности элементов (x_n) и

$$y_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \ \ (n \in \mathbf{N})$$

[1]Бахтин Иван Алексеевич, Ле Суан Дай (ytkadai@yahoo.com), кафедра математического анализа Воронежского государственного педагогического университета, 394043, Россия, г. Воронеж, ул. Ленина, 86.

могут иметь точные верхние (точные нижние) границы только одновременно, и при этом выполняется равенство

$$\sup(x_n) = \sup(y_n) \ \Big(\inf(x_n) = \inf(y_n)\Big).$$

Лемма 2. Пусть
1) в вещественном банаховом пространстве E с конусом $K \subset E$ линейный оператор $B - I$, где $I-$ тождественный оператор, положительно обратим;
2) монотонный на конусном отрезке $< x_0, y_0 > (x_0 \leqslant y_0)$ оператор A обладает свойствами:

$$Ax_0 \leqslant x_0, Ay_0 \geqslant y_0, \text{ и если } x_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y_0, \text{ то } Ay - Ax \leqslant B(y - x).$$

Тогда последовательность

$$x_n = (B - I)^{-1}(Bx_{n-1} - Ax_{n-1}) \ \ (n \in \mathbf{N}) \tag{1}$$

монотонно возрастает, содержится в отрезке $< x_0, y_0 >$, и выполняются неравенства

$$Ax_n \leqslant x_n \ \ (n \in \mathbf{N}). \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$\widetilde{A} = (B - I)^{-1}(B - A). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что последовательность (1) можно записать так:

$$x_n = \widetilde{A}x_{n-1} \ \ (n \in \mathbf{N}). \tag{4}$$

Покажем, что оператор $\widetilde{A}$ монотонен на отрезке $< x_0, y_0 >$ и преобразует его в себя. Действительно, если $x_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y_0$, то в силу условия 2) теоремы

$$\widetilde{A}y - \widetilde{A}x = (B - I)^{-1}(By - Ay) - (B - I)^{-1}(Bx - Ax) =$$
$$= (B - I)^{-1}[(By - Bx) - (Ay - Ax)] \geqslant 0,$$

так как элемент $z = (By - Bx) - (Ay - Ax) \geqslant 0$ и, значит, в силу положительности оператора $(B - I)^{-1}$ элемент $(B - I)^{-1}z \geqslant 0$.

Итак $\widetilde{A}y - \widetilde{A}x \geqslant 0$ и, следовательно, $\widetilde{A}x \leqslant \widetilde{A}y$. Монотонность оператора (3) на отрезке $< x_0, y_0 >$ установлена. Теперь докажем, что последовательность $(x_n) \subset < x_0, y_0 >$ и возрастает. Так как $Ax_0 \leqslant x_0$ и $y_0 \leqslant Ay_0$, то

$$\widetilde{A}x_0 = (B - I)^{-1}(Bx_0 - Ax_0) = (B - I)^{-1}[(Bx_0 - x_0) + (x_0 - Ax_0)] =$$
$$= x_0 + (B - I)^{-1}(x_0 - Ax_0) \geqslant x_0$$

и

$$\widetilde{A}y_0 = (B - I)^{-1}(By_0 - Ay_0) = (B - I)^{-1}[(By_0 - y_0) + (y_0 - Ay_0)] =$$
$$= y_0 - (B - I)^{-1}(Ay_0 - y_0) \leqslant y_0.$$

Но тогда в силу монотонности оператора $\widetilde{A}$ на отрезке $< x_0, y_0 >$ из $x_0 \leqslant x \leqslant y_0$ следует

$$x_0 \leqslant \widetilde{A}x_0 \leqslant \widetilde{A}x \leqslant \widetilde{A}y_0 \leqslant y_0.$$

Поэтому оператор $\widetilde{A}$ преобразует отрезок $< x_0, y_0 >$ в себя. Следовательно, ввиду $x_0 \in < x_0, y_0 >$ последовательность $x_n = \widetilde{A}x_{n-1} \subset < x_0, y_0 > (n \in \mathbf{N})$, а в силу $x_0 \leqslant \widetilde{A}x_0 = x_1$ и монотонности оператора $\widetilde{A}$ она монотонно возрастает.

Нам остается доказать, что

$$Ax_n \leqslant x_n \ \ (n \in \mathbf{N}).$$

Так как из $x_0 \leqslant x_1 \leqslant y_0$ и $x_1 = (B - I)^{-1}(Bx_0 - Ax_0)$ следует $Bx_1 - x_1 = = Bx_0 - Ax_0$, то

$$x_1 = Bx_1 - Bx_0 + Ax_0 \geqslant Ax_1 - Ax_0 + Ax_0 = Ax_1,$$

то есть $Ax_1 \leqslant x_1$. Пусть установлено, что $Ax_{n-1} \leqslant x_{n-1}$. Тогда ввиду $x_0 \leqslant \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n \leqslant y_0$ и

$$x_n = \widetilde{A}x_{n-1} = (B - I)^{-1}(Bx_{n-1} - Ax_{n-1})$$

будет

$$Bx_n - x_n = Bx_{n-1} - Ax_{n-1},$$

откуда

$$x_n = Bx_n - Bx_{n-1} + Ax_{n-1} \geqslant Ax_n - Ax_{n-1} + Ax_{n-1} = Ax_n$$

и, значит, $Ax_n \leqslant x_n$.

Лемма доказана.

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть
1) в вещественном банаховом пространстве E с конусом K линейный оператор $B - I$ положительно обратим;
2) h-экстремальный на конусном отрезке $< x_0, y_0 >$, где $x_0 < y_0-$ фиксированные элементы, оператор A обладает свойствами:

$$Ax_0 \leqslant x_0, Ay_0 \geqslant y_0 \text{ и, если } x_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y_0, \text{то } Ay - Ax \leqslant B(y - x).$$

Тогда существует элемент $x_* \in < x_0, y_0 >$ такой, что $Ax_* = x_*$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\widetilde{A} = (B - I)^{-1}(B - A)$ и последовательность

$$x_n = \widetilde{A}x_{n-1} = (B - I)^{-1}(Bx_{n-1} - Ax_{n-1}) \ \ (n \in \mathbf{N}).$$

В силу леммы 2 она монотонно возрастает, содержится в отрезке $< x_0, y_0 >$ и $Ax_n \leqslant x_n (n \in \mathbf{N})$. Далее, так как

$$x_1 = (B - I)^{-1}(Bx_0 - Ax_0) = x_0 + (B - I)^{-1}(x_0 - Ax_0),$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n = (B - I)^{-1}(Bx_{n-1} - Ax_{n-1}) = x_{n-1} + (B - I)^{-1}(x_{n-1} - Ax_{n-1},$$

то

$$x_n = x_0 + (B - I)^{-1}[(x_0 + \ldots + x_{n-1}) - (Ax_0 + \ldots + Ax_{n-1})],$$

откуда

$$(B - I)(x_n - x_0) = x_0 + \ldots + x_{n-1} - (Ax_0 + \ldots + Ax_{n-1}).$$

Поэтому ввиду $Ax_n \leqslant x_n$ имеем

$$0 \leqslant x_1 + \ldots + x_{n-1} - (Ax_0 + \ldots + Ax_{n-1}) =$$

$$= B(x_n - x_0) - (x_n - x_0) = (B - I)(x_n - x_0) \leqslant B(y_0 - x_0),$$

и, значит,

$$\frac{Ax_0 + \ldots + Ax_{n-1}}{n} \leqslant \frac{x_0 + \ldots + x_{n-1}}{n} \leqslant B\frac{y_0 - x_0}{n} + \frac{Ax_0 + \ldots + Ax_{n-1}}{n}.$$

Пусть

$$u_n = \frac{x_0 + \ldots + x_{n-1}}{n}, \ \ v_n = \frac{Ax_0 + \ldots + Ax_{n-1}}{n}.$$

Тогда будем иметь

$$v_n \leqslant u_n \leqslant v_n + B\frac{y_0 - x_0}{n} \ \ (n \in \mathbf{N}).$$

Так как возрастающая последовательность $(x_n) \subset < x_0, y_0 >$ ограничена снизу и сверху, то в силу h-экстремальности оператора A существует элемент $x_* = \sup(Ax_n)$, и, значит, в силу леммы 1 и элемент $\sup(v_n) = \sup(Ax_n) = x_*$.

Теперь покажем, что $\sup(u_n) = x_*$. Так как

$$u_n \leqslant u_m \leqslant v_m + B\frac{y_0 - x_0}{m} \ \ (m > n),$$

то

$$u_n \leqslant x_* + B\frac{y_0 - x_0}{m} \ \ (m > n),$$

и, значит, $u_n \leqslant x_*(n \in \mathbf{N})$.

С другой стороны, если $y \geqslant u_n(n \in \mathbf{N})$, то ввиду $v_n \leqslant u_n(n \in \mathbf{N})$ верно $v_n \leqslant y(n \in \mathbf{N})$ и, следовательно, $x_* = \sup(v_n) \leqslant y$. Но тогда $x_* = \sup(u_n)$. Поэтому в силу леммы 1 $\sup(x_n) = x_*$.

Значит, элемент $x_* \in < x_0, y_0 >$ и $x_n \leqslant x_*$. Поэтому в силу монотонности оператора A на отрезке $< x_0, y_0 >$ будет $Ax_n \leqslant Ax_*(n \in \mathbf{N})$ и потому $x_* = \sup(Ax_n) \leqslant Ax_*$.

Далее, так как $x_n = \widetilde{A}x_{n-1} \leqslant \widetilde{A}x_*(n \in \mathbf{N})$, то $x_* \leqslant \widetilde{A}x_*$. С другой стороны, так как

$$\widetilde{A}x_* = (B - I)^{-1}(Bx_* - Ax_*) = x_* + (B - I)^{-1}(x_* - Ax_*) \leqslant x_*,$$

то $\widetilde{A}x_* = (B - I)^{-1}(Bx_* - Ax_*) = x_*$, откуда $Bx_* - Ax_* = Bx_* - x_*$ и, значит, $Ax_* = x_*$.

Теорема доказана.

Приведем еще одну теорему такого сорта.

Определение. Монотонный на множестве $M \subset E$ оператор A называется d-экстремальным на этом множестве [5], если для любой монотонной ограниченной по норме последовательности $(x_n) \subset M$ существуют элементы $\sup(Ax_n)$ и $\inf(Ax_n)$.

Теорема 2. Пусть
1) в вещественном банаховом пространстве E с конусом K линейный оператор $B - I$ положительно обратим;
2) d-экстремальный на конусном отрезке $< Ax_0, y_0 >$, где $x_0 < y_0$– фиксированные элементы, оператор A обладает свойствами:
а) $Ax_0 \leqslant x_0$, $Ay_0 \geqslant y_0$;
б) если $x_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant y_0$, то $Ay - Ax \leqslant B(y - x)$;
в) оператор A преобразует отрезок $< Ax_0, y_0 >$ в ограниченное по норме множество;
3) множество $B^2 < 0, y_0 - x_0 > \subset K$.
Тогда существует элемент $x_* \in < x_0, y_0 >$ такой, что $Ax_* = x_*$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\widetilde{A} = (B - I)^{-1}(B - A)$. Так же, как и при доказательстве леммы 2, показано, что оператор $\widetilde{A}$ монотонен на отрезке $< x_0, y_0 >$ и преобразует его в себя.

Построим последовательность

$$x_n = \widetilde{A}x_{n-1} = (B - I)^{-1}(Bx_{n-1} - Ax_{n-1}) \ \ (n \in \mathbf{N}).$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, показано, что последовательность (x_n) монотонно возрастает, содержится в отрезке $< x_0, y_0 >$, выполняются неравенства $Ax_n \leqslant x_n (n \in \mathbf{N})$ и

$$\frac{Ax_0 + \ldots + Ax_{n-1}}{n} \leqslant \frac{x_0 + \ldots + x_{n-1}}{n} \leqslant B\frac{y_0 - x_0}{n} + \frac{Ax_0 + \ldots + Ax_{n-1}}{n} \ \ (n \in \mathbf{N}).$$

Далее, так как возрастающая последовательность (Ax_n) в силу условия 2 в) теоремы ограничена по норме, то в силу d-экстремальности оператора A существует элемент $x_* = \sup(A^2x_n)$. Поэтому по лемме 1 существует элемент $\sup(w_n) = x_*$,
где

$$w_n = \frac{A^2x_0 + \ldots + A^2x_{n-1}}{n} \ \ (n \in \mathbf{N}).$$

Введем в рассмотрение элементы

$$u_n = \frac{x_0 + \ldots + x_{n-1}}{n}, \ \ v_n = \frac{Ax_0 + \ldots + Ax_{n-1}}{n}.$$

Покажем, что $\sup(u_n) = \sup(v_n) = x_*$. Вначале докажем, что $\sup(v_n) = x_*$. Так как $Ax_n \leqslant x_n$, то в силу монотонности оператора A на отрезке $< Ax_0, y_0 >$ будет $A^2x_n \leqslant Ax_n$. Далее, так как в силу условия 2 б) теоремы

$$Ax_n - A^2x_n \leqslant B(x_n - Ax_n),$$

то

$$v_n = \frac{Ax_0 + \ldots + Ax_{n-1}}{n} \leqslant \frac{A^2x_0 + \ldots + A^2x_{n-1}}{n} +$$

$$+B\left(\frac{x_0+\ldots+x_{n-1}}{n}-\frac{Ax_0+\ldots+Ax_{n-1}}{n}\right)\leqslant x_*+B^2\frac{y_0-x_0}{n},$$

и, значит,

$$v_n\leqslant v_m\leqslant x_*+B^2\frac{y_0-x_0}{m}\ \ (m>n).$$

Но тогда $v_n\leqslant x_*(n\in\mathbf{N})$.

С другой стороны, если $v_n\leqslant y(n\in\mathbf{N})$, то ввиду $w_n\leqslant v_n$ будем иметь $w_n\leqslant y(n\in\mathbf{N})$, откуда $x_*\leqslant y$, и, значит, $\sup(v_n)=x_*$.

Далее, так как

$$u_n\leqslant u_m\leqslant v_m+B\frac{y_0-x_0}{m}\leqslant x_*+B\frac{y_0-x_0}{m}\ \ (m>n),$$

то $u_n\leqslant x_*(n\in\mathbf{N})$.

С другой стороны, если $u_n\leqslant y(n\in\mathbf{N})$, то ввиду $v_n\leqslant u_n(n\in\mathbf{N})$ будет $v_n\leqslant y(n\in\mathbf{N})$, и, значит, $x_*=\sup(v_n)\leqslant y$. Поэтому $\sup(u_n)=x_*$.

Итак, $\sup(u_n)=\sup(v_n)=x_*$, поэтому в силу леммы 1 $\sup(x_n)= =\sup(Ax_n)=x_*$.

Из $x_n\leqslant x_*$ в силу монотонности операторов A и $\widetilde{A}$ следует, что

$$Ax_n\leqslant Ax_*,\ \ x_{n+1}=\widetilde{A}x_n\leqslant\widetilde{A}x_*.$$

Поэтому $x_*\leqslant Ax_*, x_*\leqslant\widetilde{A}x_*$.

Далее, так как

$$\widetilde{A}x_*=(B-I)^{-1}(Bx_*-Ax_*)=x_*+(B-I)^{-1}(x_*-Ax_*)\leqslant x_*,$$

то $\widetilde{A}x_*=(B-I)^{-1}(Bx_*-Ax_*)=x_*$ откуда $Bx_*-Ax_*=Bx_*-x_*$ и, следовательно, $Ax_*=x_*$.

Теорема доказана.

Литература

[1] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 394 с.

[2] Красносельский М.А., Лифший Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985. 256 с.

[3] Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // УМН. 1948. № 1. С. 3–95.

[4] Бахтин И.А. Конусы в пространствах Банаха. Воронеж: ВГПИ, 1975. Ч. 1. 183 с.

[5] Бахтин И.А. Нелинейные уравнения с монотонными операторами. Воронеж: ВГПИ, 1988. 64 с.

Поступила в редакцию 05/IV/2009;
в окончательном варианте — 19/IV/2009.

FIXED POINTS OF EXTREME OPERATORS

 I.A. Bakhtin, X.D. Le[2]

In this paper new signs of existence of fixed points of extreme operators in Banach space with a cone are resulted. The normality of cone and continuity of operators are not supposed.

Key words: cone, fixed point, extreme operator.

Paper received 05/IV/2009.
Paper accepted 19/IV/2009.

[2]Bakhtin Ivan Alekseevich, Le Xuan Dai (ytkadai@yahoo.com), Dept. of Mathematical Analysis, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, 394043, Russia.