

УДК 531.36: 534.1

УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ¹

© 2009 Б.В. Иванов²

Рассматривается движение вокруг центра масс упругой тросовой системой, состоящей из двух концевых тел и невесомого упругого троса, а также находящейся в развернутом положении. Центр масс системы движется по эллиптической траектории. С помощью уравнения Лагранжа второго рода построены уравнения движения упругой тросовой системы, в качестве независимой переменной выбран угол истинной аномалии. Найдено аналитическое решение, описывающее упругие колебания растянутого троса.

Ключевые слова: тросовая система, упругие колебания, гравитационный момент, хаос.

1. Формулировка проблемы

Аналізу космічних тросових систем (ТС) присвячені численні наукові роботи, наприклад [1–8], в яких об'єктами досліджень являлись трос, корисний вантаж і КА. Орбітальні тросові системи можуть застосовуватися для різних завдань переміщення корисного вантажу в космічному просторі, в тому числі і для доставки корисного вантажу на поверхню Землі. В роботах [1–5] вивчається рух тросової системи, в роботах [6, 7] розглядається поведінка КА відносно центру мас під впливом гравітаційного моменту [8] і моменту від сили натягу троса. В монографії [1] відзначаються еластичні властивості троса, в нинішній статті розглядається поведінка тросової системи під впливом гравітаційного моменту і сил еластичності троса. Будемо вважати, що тросова система складається з двох кінцевих матеріальних точок масою m_1 і m_2 , еластичного троса, який завжди знаходиться в розтягнутому положенні. Побудуємо з допомогою рівняння Лагранжа другого роду математичну модель системи, досить просту, легко інтерпретовану, зберігає

¹Робота виконана при підтримці Російського фонду фундаментальних досліджень (проект № 09-01-00384-а).

²Іванов Борис Всеволодович (boris063@mail.ru), кафедра теоретическої механіки Самарського державного аерокосмічного університету ім. акад. С.П. Королева, 443086, Росія, г. Самара, Московське шосе, 34.

основные особенности физической модели и отражающую основные закономерности движения. Это позволит проверить основные предположения по поведению системы.

2. Уравнения Лагранжа второго рода

При выводе уравнений движения будем пренебрегать массой троса, аэродинамическими силами и солнечным давлением. Полная масса системы

$$m = m_1 + m_2.$$

Кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии центра масс T_C и кинетической энергии двух материальных точек T_1 и T_2 относительно поступательно движущейся системы координат $C_{x_C y_C}$ с началом в центре масс

$$T = T_C + T_1 + T_2. \quad (2.1)$$

В качестве обобщенных координат примем:

$$q_1 = r, q_2 = l, q_3 = \vartheta, q_4 = \varphi, \quad (2.2)$$

где $r = OC$ — расстояние между центром Земли и центром масс системы C , l — длина троса, ϑ — угол истинной аномалии центра масс системы (система координат Oxy располагается в плоскости орбиты, ось Ox направлена на перигей), φ — угол отклонения троса относительно местной вертикали (см. рисунок).

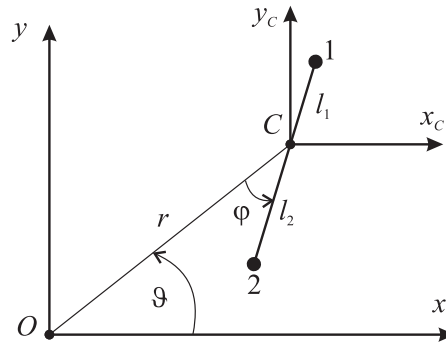


Рис. Тросовая система

Кинетическая энергия центра масс соответствует абсолютному движению центра масс системы по орбите и включает в себя радиальную и трансверсальную скорости:

$$T_C = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2. \quad (2.3)$$

Кинетическая энергия относительного движения материальных точек определяется формулами

$$T_i = \frac{1}{2}m_i V_{ir}^2, \quad (2.4)$$

где V_{ir} — скорости концевых точек тросовой системы относительно центра масс системы C ($i = 1, 2$). Относительные скорости точек 1 и 2 в системе координат $C_{x_C y_C}$ имеют вид

$$V_i r = (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos(\vartheta + \varphi), y_1 = l_1 \sin(\vartheta + \varphi), \\ x_2 &= -l_2 \cos(\vartheta + \varphi), y_2 = -l_2 \sin(\vartheta + \varphi), \\ l_1 &= \frac{m_2}{m} l, l_2 = \frac{m_1}{m} l. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Дифференцируя координаты (2.6) по времени и подставляя производные в (2.5), а также имея в виду формулы (2.3) и (2.4), запишем кинетическую энергию системы (2.1) следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) + \frac{m_*}{2} \dot{l}^2 + \frac{I_*}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2, \quad (2.7)$$

где $m = (m_1 m_2) / m$, $I_* = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = m_* l^2$ — момент инерции.

Потенциальная энергия системы состоит из потенциала центрального поля силы тяжести [8] и потенциальной энергии силы упругости троса

$$W = -\mu \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) + \frac{c}{2} (l - l_0)^2, \quad (2.8)$$

где μ — гравитационный параметр, c — коэффициент упругости, l_0 — длина ненапряженного троса, r_1, r_2 — расстояние между центром Земли и точками 1 и 2 . Выразим r_1 и r_2 в выражении (2.6) через обобщенные координаты (2.2)

$$W = -\frac{\mu}{r} \left(\frac{m_1}{\sqrt{1 + \frac{l_1^2}{r^2} + 2\frac{l_1}{r} \cos \varphi}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 + \frac{l_2^2}{r^2} - 2\frac{l_2}{r} \cos \varphi}} \right) + \frac{c}{2} (l - l_0)^2$$

и упростим это выражение, имея в виду, что длина троса существенно меньше расстояния от центра масс тросовой системы до центра Земли

$$\frac{l}{r} \ll 1.$$

В результате имеем

$$W = -\frac{\mu m}{r} + \frac{\mu I_*}{2r^3} (1 - 3 \cos^2 \varphi) + \frac{c}{2} (l - l_0)^2. \quad (2.9)$$

С учетом (2.7) и (2.9) для лагранжиана

$$\begin{aligned} L = T - W &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) + \frac{m_*}{2} \dot{l}^2 + \frac{I_*}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 - \frac{\mu m}{r} - \\ &\quad - \frac{\mu I_*}{2r^3} (1 - 3 \cos^2 \varphi) - \frac{c}{2} (l - l_0)^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

уравнения Лагранжа второго рода примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad (2.11)$$

где Q_j — силы управления, демпфирования, аэродинамические и иные непотенциальные силы, $j = \overline{1,4}$, $q_1 = r$, $q_2 = l$, $q_3 = \vartheta$, $q_4 = \varphi$.

Для лагранжиана (2.10) уравнения Лагранжа (2.11) имеют вид

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 + \frac{\mu}{r^2} - \frac{3\mu I_*}{2mr^4} (1 - 3\cos^2 \varphi) = Q_r, \quad (2.12)$$

$$\ddot{l} + \frac{c}{m_*} (l - l_0) + \frac{\mu l}{r^3} (1 - 3\cos^2 \varphi) - l (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 = Q_l, \quad (2.13)$$

$$(mr^2 + I_*) \ddot{\vartheta} + I_* \ddot{\varphi} + 2mrr\dot{\vartheta} + 2m_* l \dot{l} (\dot{\vartheta} + \dot{\varphi}) = Q_{\vartheta}, \quad (2.14)$$

$$I_* (\ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi}) + 2m_* l \dot{l} (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) + \frac{3\mu I_*}{r^3} \sin \varphi \cos \varphi = Q_{\varphi}. \quad (2.15)$$

Применим известный прием [1] и перейдем в уравнениях движения (2.12)–(2.15) к новой независимой переменной — углу истинной аномалии ϑ . При этом будем полагать, что движение центра масс системы не зависит от относительного движения системы и центр масс движется по эллиптической траектории

$$r = \frac{p}{k}, \quad \dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} k^2 = nk^2, \quad (2.16)$$

где $k = 1 + e \cos \theta$, p — параметр орбиты, e — эксцентриситет орбиты. Для произвольной функции $f(t)$ первая и вторая производные в силу (2.16) имеют вид

$$\dot{f} = nk^2 f', \quad (2.17)$$

$$\ddot{f} = n^2 k^3 (k f'' - 2e f' \sin \theta), \quad (2.18)$$

где $(\cdot)' = \frac{d}{d\theta}$, $(\cdot)'' = \frac{d^2}{d\theta^2}$. Дифференцирование по времени t второй формулы из (2.16) дает следующий результат:

$$\ddot{\theta} = -2n^2 k^3 e \sin \theta. \quad (2.19)$$

Перепишем уравнения относительного движения тросовой системы (2.13) и (2.15) с учетом (2.16)–(2.18) в виде

$$kl'' - 2el' \sin \vartheta + \frac{c}{n^2 k^3 m_*} (l - l_0) + l (1 - 3\cos^2 \varphi) - kl (1 + \varphi')^2 = \frac{Q_l}{n^2 k^3}, \quad (2.20)$$

$$I_* (k\varphi'' - 2e\varphi' \sin \theta) + 2km_* l l' (1 + \varphi') - 2eI_* \sin \theta + 3I_* \sin \varphi \cos \varphi = \frac{Q_{\varphi}}{n^2 k^3}. \quad (2.21)$$

3. Упругие колебания тросовой системы

Будем считать, что обобщенные силы Q_l и Q_{φ} отсутствуют. Тогда уравнения (2.20) и (2.21) примут вид

$$l'' + \frac{c}{m_* n^2 k^4} (l - l_0) + \frac{l}{k} (1 - 3\cos^2 \varphi) - l (1 + \varphi')^2 = 2\frac{e}{k} l' \sin \theta, \quad (3.1)$$

$$\varphi'' + 2\frac{l'}{l}(1 + \varphi') + \frac{3}{k} \sin \varphi \cos \varphi = 2\frac{c}{k}(1 + \varphi') \sin \theta. \quad (3.2)$$

Отметим, что уравнение (3.2) является обобщением уравнения (39) из [2] для упругого троса, а уравнение (3.1) – обобщением уравнения (8) из [3].

Рассмотрим случай, когда центр масс тросовой системы движется по круговой орбите $e = 0$, тогда уравнения (3.1) и (3.2) примут вид

$$l'' + \frac{c}{m_* n^2}(l - l_0) + l(1 - 3 \cos^2 \varphi) - l(1 + \varphi')^2 = 0, \quad (3.3)$$

$$\varphi'' + 3 \sin \varphi \cos \varphi = -2\frac{l'}{l}(1 + \varphi'). \quad (3.4)$$

Предположим, что трос развернут по местной вертикали и не меняет своего углового положения ($\varphi, \varphi', \varphi'' = 0$), тогда уравнение (3.3) можно упростить

$$l'' + \frac{c}{m_* n^2}(l - l_0) - 3l = 0. \quad (3.5)$$

Перейдем в уравнении (3.5) к безразмерной длине троса

$$L = \frac{l}{l_0},$$

в результате получим следующее линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$$L'' + \Omega^2 L = 3 + \Omega^2, \quad (3.6)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{c}{m_*}}.$$

Равновесное положение троса из уравнения (3.6) определяется формулой

$$L_1 = \frac{3 + \Omega^2}{\Omega^2}.$$

При начальных условиях: $t_0 = 0$:

$$L = L_1, L' = L'_0$$

решение уравнения (2.7) имеет вид

$$L = L_1 + \frac{L'_0}{\Omega} \sin \Omega \theta. \quad (3.7)$$

Если рассматривать случаи движения, когда трос всегда находится в растянутом положении ($L > 1$), тогда начальная скорость груза не должна превышать следующего значения:

$$L'_0 < \frac{3}{\Omega}.$$

Заключение

В статье получены уравнения движения упругой тросовой системы, которые обобщают известные математические модели, например [2, 3], и позволяют проводить исследование движения космической тросовой системы с учетом упругости троса. Очевидно, что уравнения (3.1) и (3.2), имея в виду колебательный характер движения концевых грузов (3.7), позволяют исследовать хаотическое поведение тросовой системы не только в силу малого эксцентриситета [3], но и в силу упругих колебаний троса.

Автор выражает благодарность за постановку задачи и постоянное внимание к работе профессору В.С. Асланову.

Литература

- [1] Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 329 с.
- [2] Williams P., Blanksby C., Trivailo P. Tethered planetary capture: controlled maneuvers // *Acta Astronautica*. 2003. V. 53. P. 681–708.
- [3] Misra A.K. Dynamics and control of tethered satellite systems // *Acta Astronautica*. 2008. V. 63. P. 1169–1177.
- [4] Сидоров И.М. Об использовании тросовых систем для создания постоянно действующего транспортного канала в космическом пространстве // *Полет*. 2000. № 8. С. 36–39.
- [5] Асланов В.С., Ледков А.С., Стратилатов Н.Р. Пространственное движение космической тросовой системы, предназначенной для доставки груза на Землю // *Полет*. 2007. № 2. С. 28–33.
- [6] Асланов В.С. Колебания тела с орбитальной тросовой системой // *Прикладная математика и механика*. 2007. Т. 71. Вып. 6. С. 1027–1033.
- [7] Aslanov V.S. The oscillations of a spacecraft under the action of the tether tension moment and the gravitational moment // *AIP. Conf. Proc.* 2008. V. 1048. P. 56–59.
- [8] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.

Поступила в редакцию 18/VI/2009;
в окончательном варианте — 18/VI/2009.

THE ELASTIC VIBRATIONS OF THE CABLE SYSTEM³© 2009 B.V. Ivanov⁴

The motion of elastic cable system around the center of mass is considered. Cable system consists of two end objects and an imponderable elastic cable which is in an unrolled position. The center of mass of a system moves on an elliptical trajectory. By means of Lagrange's equations of the second kind, the equations of motion of the elastic cable system are constructed, as an independent variable the angle of true anomaly is chosen. The analytical solution describing elastic vibrations of the stretched cable is found.

Key words: tethered system, elastic vibrations, gravitational moment, chaos.

Paper received 18/VI/2009.

Paper accepted 18/VI/2009.

³This research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № 09-01-00384-a).

⁴Ivanov Boris Vsevolodovich (boris063@mail.ru), Dept. of Theoretical Mechanics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russia.