

## ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2009 Ю.Г. Полкунов, Е.В. Спиридонова<sup>1</sup>

Представлены численные решения задач о стационарных трещинах I и II типов, когда на их берегах заданы смешанные краевые условия. Решение задач осуществлялось методом разрывных смещений. Нормальные и сдвиговые раскрытия участков трещины, на которых заданы нормальные и касательные напряжения, аппроксимировались функциональными зависимостями. Коэффициенты интенсивности напряжений первого и второго типов  $K_I$ ,  $K_{II}$  для трещин, на берегах которых заданы смешанные краевые условия, определялись с использованием критериев, основанных на разрывных смещениях.

**Ключевые слова:** зияющая трещина, смешанные краевые условия, коэффициенты интенсивности напряжений I и II типов.

### Введение

Создание и совершенствование новых методов и моделей оценок контроля сдвижений земной поверхности имеет важное актуальное значение.

Задачи, связанные одновременно со сжатием и сдвигом трещины, представляют особый интерес и находят свое большое практическое приложение при сдвижении горных пластов, устойчивости бортов карьеров и выработок. Экспериментальные данные показали, что при движении горных пород образуются сдвиги, опускание и поднятие пласта при скольжении.

При сжатии и сдвиге в трещинах горного массива возникают нормальные раскрытия и сдвиги по берегам трещины. Для описания данного процесса были разработаны модели дилатационной [1] и пилообразной трещины [2]. В работе [3] были разработаны вязкопластические модели, устанавливающие зависимости смещений от их скорости и времени. Приведенные модели рассматривают случай, когда к берегам трещины приложены напряжения.

---

<sup>1</sup>Полкунов Юрий Григорьевич ([matan@mail.osu.ru](mailto:matan@mail.osu.ru)), Спиридонова Екатерина Владимировна ([skatyusha@rambler.ru](mailto:skatyusha@rambler.ru)), кафедра математического анализа Оренбургского государственного университета, 460018, Россия, г. Оренбург, пр. Победы, 13.

В настоящей работе построена математическая модель развития трещины, на берегах которой заданы не только напряжения, но и смещения. Кроме того, численное моделирование подобных задач позволяет выйти на новый класс задач, который невозможно решить аналитическими методами.

Целью данного исследования является разработка новой процедуры вычисления коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго типов для трещин, имеющих на берегах смешанные краевые условия.

## 1. Постановка задач и метод решения

Плоскодеформированное состояние упругой среды описывается в декартовой системе координат уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0,$$

уравнением совместности деформаций

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

и законом Гука

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1 + \nu}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1 + \nu}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy}. \end{aligned}$$

Компоненты деформаций определяются выражениями

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

В уравнениях использованы следующие обозначения:  $u_x$ ,  $u_y$  — компоненты вектора перемещений;  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$  — компоненты тензора напряжений;  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{yy}$  — компоненты тензора деформаций;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль Юнга.

Для достижения поставленной цели была рассмотрена серия задач с различными видами краевых условий, приведенных на рис. 1.1–1.3. Следуя работе [2], введем понятие зияющей трещины, для такого ее участка, на котором заданы напряжения.

На рис. 1.1 приведен математический разрез плоскости  $AO$ , который находится под действием нормальных сжимающих и касательных смещений. Краевые условия имели следующий вид:

$$\begin{aligned} u_s^i &= -u_s^0, \quad u_n^i = u_n^0 \quad \text{при } y = 0, \quad A \leq x \leq O; \\ \sigma_s^i &= 0, \quad \sigma_n^i = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad O \leq x \leq B. \end{aligned}$$

Здесь  $u_s^0$ ,  $u_n^0$  — заданные величины.

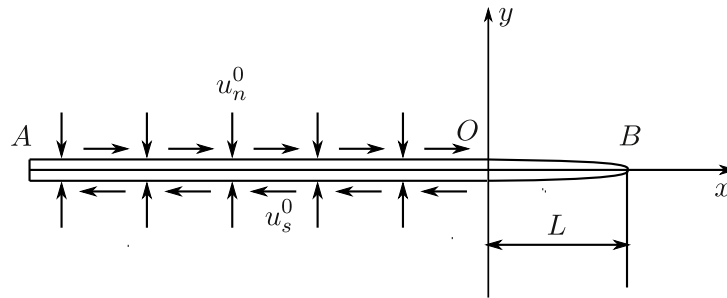


Рис. 1.1 Математический разрез упругой плоскости с зияющей трещиной

На рис. 1.2 приведена схема, на которой основная трещина находится под действием сдвиговых и нормальных сжимающих смещений, а зияющая под действием сжимающих напряжений. Краевые условия для этого случая имели следующий вид:

$$\begin{aligned} u_s^i &= -u_s^0, u_n^i = u_n^0 \text{ при } y = 0, A \leq x \leq O; \\ \sigma_s^i &= 0, \sigma_n^i = q \text{ при } y = 0, O \leq x \leq B. \end{aligned}$$

Здесь  $u_s^0, u_n^0, q$  — заданные величины.

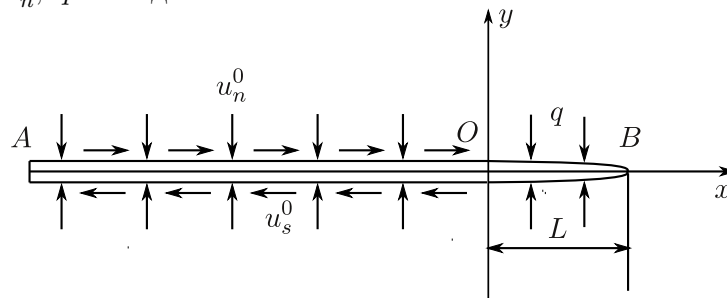


Рис. 1.2. Математический разрез упругой плоскости с зияющей трещиной, которая находится под действием сжимающих напряжений

Схема поперечного сдвига разреза упругой плоскости касательными смещениями с зияющей трещиной приведена на рис. 1.3. Краевые условия для данной задачи имели следующий вид:

$$\begin{aligned} u_s^i &= -u_s^0, u_n^i = u_n^0 \text{ при } y = 0, A \leq x \leq O; \\ \sigma_s^i &= p, \sigma_n^i = 0 \text{ при } y = 0, O \leq x \leq B. \end{aligned}$$

Здесь  $u_s^0, u_n^0, p$  — заданные величины.

Система координат вводилась таким образом, чтобы ось  $Ox$  была направлена вдоль основной трещины. Граничные интегральные уравнения для данных задач сводились к следующей системе линейных алгебраических уравнений [4]:

$$u_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{1, M};$$





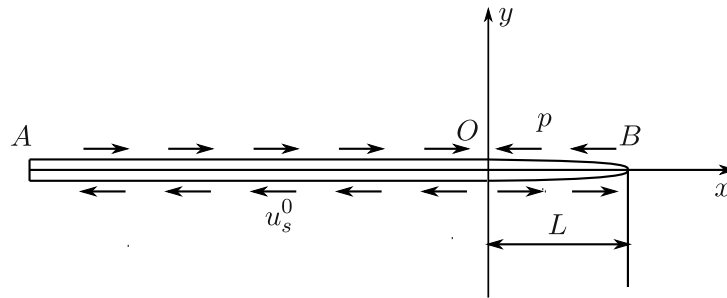


Рис. 2.2. Математический разрез упругой плоскости с зияющей трещиной, которая находится под действием касательных напряжений

В табл. 2.1 приведен пример сопоставления численных результатов  $D_s$  и  $D_n$ . Расчет производился при следующих входных данных:  $L = 0,01$  м;  $OA = 0,1$  м — длина разреза;  $p = q = 9,8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>2</sup>;  $K$  — количество граничных элементов, на которые разбивалась зияющая трещина;  $\nu = 0,3$ ;  $E = 3 \cdot 10^4$  МПа. Нормальные и сдвиговые смещения имели следующие значения:  $u_s^0 = u_n^0 = 12 \cdot 10^{-7}$  м.

Таблица 2.1

### Результаты моделирования нормального и касательного раскрытия зияющей трещины

K	x, см	D <sub>n</sub> , см		D <sub>s</sub> , см
		аналитическое решение	численное решение	численное решение
1	0,05	-0,0002045	-0,0001922	-0,0001922
2	0,15	-0,0001775	-0,0001677	-0,0001677
3	0,25	-0,0001580	-0,0001487	-0,0001487
4	0,35	-0,0001411	-0,0001323	-0,0001323
5	0,45	-0,0001253	-0,0001171	-0,0001171
6	0,55	-0,0001101	-0,0001026	-0,0001026
7	0,65	-0,0000945	-0,0000882	-0,0000882
8	0,75	-0,0000780	-0,0000732	-0,0000733
9	0,85	-0,0000591	-0,0000569	-0,0000569
10	0,95	-0,0000335	-0,0000369	-0,0000369

На основании анализа результатов, приведенных в табл. 2.1, следует, что нормальные и касательные раскрытия зияющей трещины совпадают. Таким образом, функция суммарного сдвигового раскрытия берегов зияющей трещины  $L$  будет иметь ту же функциональную зависимость (2.1):

$$D_s = -\frac{4u_s^0}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) + \frac{2p(1-\nu)}{G} \sqrt{x(L-x)}. \quad (2.2)$$

При подстановке (2.2) в (1.2) получаем коэффициент интенсивности напряжения второго типа

$$K_{II} = \frac{Gu_s^0\sqrt{2}}{\sqrt{L\pi}(1-\nu)} - p\sqrt{\frac{\pi L}{2}}.$$

### 3. Численное решение задач

Для решения поставленных задач со смешанными краевыми условиями использовались аналитические аппроксимации (2.1) и (2.2).

Результаты численных решений данных задач методом разрывных смещений подтвердили предложенные аппроксимации.

В результате исследований аппроксимация нормального  $D_n$  и сдвигового  $D_s$  раскрытия зияющей трещины осуществлялась на основе следующих функциональных зависимостей:

$$D_n = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \varphi(u_s^0, u_n^0) + a_3 \frac{2q(1-\nu)}{G} \sqrt{x(L-x)},$$

$$D_s = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \psi(u_s^0, u_n^0) + b_3 \frac{2p(1-\nu)}{G} \sqrt{x(L-x)},$$

где соотношения

$$\varphi(u_s^0, u_n^0) = 0,2209u_s^0 - 1,035u_n^0 \text{ и } \psi(u_s^0, u_n^0) = 1,035u_s^0 + 0,2209u_n^0$$

имели одни и те же значения для трех типов задач, а константы перед смещениями и  $a_3, b_3$  определялись методом наименьших квадратов.

#### 3.1. Численное исследование первой задачи

Результаты численного решения задачи, когда на зияющей трещине заданы нулевые напряжения (рис. 1.1), позволили установить следующие зависимости нормального и сдвигового раскрытия зияющей трещины:

$$D_n = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \varphi(u_s^0, u_n^0), \quad (3.1)$$

$$D_s = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \psi(u_s^0, u_n^0). \quad (3.2)$$

В табл. 3.1 приведены результаты сравнения расчетов раскрытия берегов трещины  $OB$ , вычисленные по формуле (3.2) и численно, при следующих входных значениях:  $L = 0,01$  м;  $h = 1,2 \cdot 10^{-6}$  м;  $K = 50$  — количество граничных элементов, на которые разбивалась зияющая трещина;  $\nu = 0,3$ ;  $E = 3 \cdot 10^4$  МПа.

Анализ данных, приведенных в табл.3.1, показал, что результаты численного решения отличаются от аналитического в среднем на 4,5 %.

Таким образом, приведенная аппроксимация суммарного раскрытия зияющей трещины удовлетворяет численным значениям.

Таблица 3.1

**Результаты моделирования сдвигового раскрытия  
зияющей трещины**

K	x, см	D <sub>s</sub> , см	
		аналитическое решение	численное решение
16	0,31	-0,0001881	-0,0001798
17	0,33	-0,0001839	-0,0001756
18	0,35	-0,0001799	-0,0001715
19	0,37	-0,0001759	-0,0001675
20	0,39	-0,0001719	-0,0001635
...	...	...	...
31	0,61	-0,0001294	-0,0001217
32	0,63	-0,0001255	-0,0001179
33	0,65	-0,0001215	-0,0001140
34	0,67	-0,0001174	-0,0001102
35	0,69	-0,0001133	-0,0000898
...	...	...	...
46	0,91	-0,0000585	-0,0000553
47	0,93	-0,0000514	-0,0000489
48	0,95	-0,0000433	-0,0000417
49	0,97	-0,0000334	-0,0000332
50	0,99	-0,0000192	-0,0000221

Подставляя (3.1) и (3.2) в (1.1) и (1.2), получаем коэффициенты интенсивности напряжения первого и второго типов:

$$K_I = \frac{Gu_n^0 \sqrt{2}}{\sqrt{L\pi}(1-\nu)} \left( 0, 2209 \frac{u_s^0}{u_n^0} - 1, 035 \right), \quad \frac{u_s^0}{u_n^0} \geq 6,$$

$$K_{II} = \frac{Gu_s^0 \sqrt{2}}{\sqrt{L\pi}(1-\nu)} \left( 1, 035 + 0, 2209 \frac{u_n^0}{u_s^0} \right), \quad \frac{u_n^0}{u_s^0} \geq 1.$$

### 3.2. Численное исследование второй задачи

На рис. 1.2 приведена схема, на которой зияющая трещина находится под действием сжимающих нормальных напряжений  $\sigma_s^i = 0$ ,  $\sigma_n^i = q$ . В результате численного решения задачи были получены следующие аппроксимирующие зависимости нормального и сдвигового суммарного раскрытия зияющей трещины:

$$D_n = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \varphi(u_s^0, u_n^0) + \frac{2q(1-\nu)}{G} \sqrt{x(L-x)} (-0,9244), \quad (3.3)$$

$$D_s = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \psi(u_s^0, u_n^0). \quad (3.4)$$



В табл. 3.2 приведены результаты сравнения численных и аналитических расчетов нормального раскрытия зияющей трещины для случая, когда  $u_s = 10u_n$ , при входных данных, приведенных для первой задачи, и  $q = 9,8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>2</sup>.

Таблица 3.2

**Результаты моделирования нормального раскрытия зияющей трещины**

K	x, см	D <sub>n</sub> , см	
		аналитическое решение	численное решение
16	0,31	-0,0001778	-0,0001891
17	0,33	-0,0001740	-0,0001829
18	0,35	-0,0001703	-0,0001769
19	0,37	-0,0001665	-0,0001712
20	0,39	-0,0001628	-0,0001657
...	...	...	...
31	0,61	-0,0001231	-0,0001129
32	0,63	-0,0001194	-0,0001087
33	0,65	-0,0001156	-0,0001044
34	0,67	-0,0001118	-0,0001001
35	0,69	-0,0001079	-0,0000959
...	...	...	...
46	0,91	-0,0000558	-0,0000465
47	0,93	-0,0000491	-0,0000409
48	0,95	-0,0000415	-0,0000347
49	0,97	-0,0000319	-0,0000275
50	0,99	-0,0000184	-0,0000181

Из табл. 3.2 следует, что результаты численных расчетов нормального раскрытия зияющей трещины и раскрытие смещений по формуле (3.3) отличаются друг от друга в среднем на 8,2 %.

Подставляя (3.3) и (3.4) в (1.1) и (1.2), получаем коэффициенты интенсивности напряжения первого и второго типов:

$$K_I = \frac{Gu_n^0 \sqrt{2}}{\sqrt{L\pi}(1-\nu)} \left( 0,2209 \frac{u_s^0}{u_n^0} - 1,035 \right) + q \sqrt{\frac{\pi L}{2}} (-0,9244), \quad (3.5)$$

$$K_{II} = \frac{Gu_s^0 \sqrt{2}}{\sqrt{L\pi}(1-\nu)} \left( 1,035 + 0,2209 \frac{u_n^0}{u_s^0} \right).$$

Формула (3.5) справедлива, когда  $u_s \geq 4,4u_n$ .

### 3.3. Численное исследование третьей задачи

На рис. 1.3 представлена картина, на которой зияющая трещина находится под влиянием сдвиговых напряжений  $\sigma_s^i = p$ ,  $\sigma_n^i = 0$ . В результате

моделирования данной задачи были установлены следующие функции нормального и сдвигового раскрытия зияющей трещины:

$$D_n = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \varphi(u_s^0, u_n^0), \quad (3.6)$$

$$D_s = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) \psi(u_s^0, u_n^0) + \frac{2p(1-\nu)}{G} \sqrt{x(L-x)}(-0,9244). \quad (3.7)$$

Результаты сравнения численных и аналитических расчетов сдвигового раскрытия зияющей трещины для случая, когда  $u_s = u_n$ , приведены в табл. 3.3, а для случая, когда  $u_s = 10u_n$ , представлены в табл. 3.4.

Таблица 3.3

**Результаты моделирования сдвигового раскрытия зияющей трещины**

K	x, см	D <sub>s</sub> , см	
		аналитическое решение	численное решение
16	0,31	-0,0001901	-0,0001741
17	0,33	-0,0001860	-0,0001698
18	0,35	-0,0001819	-0,0001656
19	0,37	-0,0001780	-0,0001615
20	0,39	-0,0001741	-0,0001575
...	...	...	...
31	0,61	-0,0001315	-0,0001157
32	0,63	-0,0001275	-0,0001119
33	0,65	-0,0001235	-0,0001082
34	0,67	-0,0001194	-0,0001044
35	0,69	-0,0001153	-0,0001006
...	...	...	...
46	0,91	-0,0000597	-0,0000517
47	0,93	-0,0000525	-0,0000457
48	0,95	-0,0000442	-0,0000389
49	0,97	-0,0000341	-0,0000310
50	0,99	-0,0000196	-0,0000206

На основании анализа табл. 3.3 следует, что касательные раскрытия зияющей трещины отличаются в среднем на 8,9 %.

Из табл. 3.4 следует, что результаты численных расчетов раскрытия зияющей трещины и раскрытие смещений по формуле (3.6) отличаются друг от друга в среднем на 6,4 %.

Подставляя (3.6) и (3.7) в (1.1) и (1.2), получаем коэффициенты интенсивности напряжения первого и второго типов:

$$K_I = \frac{Gu_n^0 \sqrt{2}}{\sqrt{L\pi}(1-\nu)} \left( 0,2209 \frac{u_s^0}{u_n^0} - 1,035 \right), \quad (3.8)$$

$$K_{II} = \frac{G u_s^0 \sqrt{2}}{\sqrt{L\pi}(1-\nu)} \left( 1,035 + 0,2209 \frac{u_n^0}{u_s^0} \right) + p \sqrt{\frac{\pi L}{2}} (-0,9244).$$

Формула (3.8) справедлива, когда  $u_s \geq 4,4u_n$ .

Таблица 3.4

**Результаты моделирования нормального раскрытия  
зияющей трещины**

K	x, см	D <sub>n</sub> , см	
		аналитическое решение	численное решение
16	0,31	-0,0001759	-0,0001951
17	0,33	-0,0001719	-0,0001891
18	0,35	-0,0001682	-0,0001831
19	0,37	-0,0001645	-0,0001775
20	0,39	-0,0001608	-0,0001720
...	...	...	...
31	0,61	-0,0001209	-0,0001192
32	0,63	-0,0001174	-0,0001148
33	0,65	-0,0001136	-0,0001105
34	0,67	-0,0001098	-0,0001061
35	0,69	-0,0001059	-0,0001018
...	...	...	...
46	0,91	-0,0000546	-0,0000502
47	0,93	-0,0000480	-0,0000442
48	0,95	-0,0000405	-0,0000376
49	0,97	-0,0000312	-0,0000298
50	0,99	-0,0000180	-0,0000197

## Выводы

1. Проведенные исследования установили количественную сопоставимость нормального раскрытия зияющей трещины в аналитических и численных решениях.

2. Разработаны аналитические представления коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго типов для трещин, на берегах которых заданы смешанные краевые условия. Установлена связь между сдвиговыми и нормальными смещениями, заданными на участках берегов трещин, при которых осуществляются нормальные раскрытия зияющей трещины.

## Литература

- [1] Николаевский В.Н. Механика деформаций и разрушения горных пород. М.: Недра, 1984. 232 с.
- [2] Черепанов Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. М.: Недра, 1992. 308 с.
- [3] Кашников Ю.А., Якушина Е.М., Яшихмин С.Г. Деформирование скального массива по системам трещин // Горный журнал. 1992. № 3. С. 75–80.
- [4] Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир. 1987. 328 с.
- [5] Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.

Поступила в редакцию 9/VII/2009;  
в окончательном варианте — 9/VII/2009.

## NUMERAL DETERMINATION OF STRESS INTENSITY FACTORS IN TASKS WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

© 2009 J.G. Polkunov, E.V. Spiridonova<sup>2</sup>

Numeral solutions of tasks of I–II types stationary cracks when mixed boundary conditions are set on their borders, are presented in this article. The tasks solution is fulfilled with method of disconnected biases. Normal and shearing openings of cracks length where normal and shearing stresses are set are approximated with functional dependences. Stress intensity factors of the first and second types  $K_I$ ,  $K_{II}$  for cracks, on borders of which mixed boundary conditions are set, are determined by using the criteria based on disconnected biases.

**Key words:** hiatal crack, mixed boundary conditions, stress intensity factors of I and II types.

Paper received 9/VII/2009.

Paper accepted 9/VII/2009.

---

<sup>2</sup>Polkunov Juriy Grigorievich ([matan@mail.osu.ru](mailto:matan@mail.osu.ru)), Spiridonova Ekaterina Vladimirovna ([skatyusha@rambler.ru](mailto:skatyusha@rambler.ru)), Dept. of Mathematical Analysis, Orenburg State University, Orenburg, 460018, Russia.