УДК 517.99

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2009 С.В. Лексина[1]

В данной работе приведена формула, определяющая общее решение для матричного волнового уравнения. Выписаны граничные управления в условиях второй краевой задачи.

Ключевые слова: общее решение, волновое уравнение, граничное управление.

Введение

Известно [1], что развитие теории управления началось с процессов, чьи модели математически можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, термин "управление", был введен Л.С. Понтрягиным и его последователями в монографии [2]. В настоящее время круг задач существенно расширился и включает задачи управления, использующие дифференциальные уравнения в частных производных [3–13], стахостические дифференциальные уравнения [14], системы с распределенными параметрами [1, 15] и другие задачи.

Цель управления состоит в том, чтобы изменить динамику поведения физической системы в соответствии с предъявляемыми требованиями. Эта задача естественным образом распадается на две части [16, 17]:

– получить математическое описание динамических свойств объекта, подлежащего управлению;

– найти "средство" достижения желаемого поведения управляемой системы.

[1] Лексина Светлана Валентиновна (lesveta@rambler.ru), кафедра математики, информатики и математических методов в экономике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Математическая теория процессов управления — раздел математики, родившийся в 50-е годы XX века. Она возникла из потребностей прикладных дисциплин.

Управляемые колебательные системы [18] получили широкое распространение в технике, механике и других областях науки. В связи с этим возникают задачи управления колебаниями в технических объектах и системах.

Проблемы управления системами различной природы имеют свою историю развития [19, 20], их решение имеет большое научное и практическое значение, а разнообразие физических и технологических процессов открывает большие научные перспективы для дальнейших работ в области управления. В процессе своего развития математическая теория задач управления системами с распределенными параметрами претерпела два больших изменения. Первое изменение теории — переход от классических решений к обобщенным решениям уравнения состояния системы. Второе изменение связано с новым подходом к теоремам существования управления на основе расширения исходных задач [21]. При изучении довольно широкого класса процессов пользуются уравнениями математической физики [22].

Известно [23], что волновое уравнение служит математической моделью многих физических процессов (акустические и электромагнитные колебания, колебание струны, мембраны, а также является основой для описания явлений, связанных с землетрясением), необходимость управлять которыми возникает, как правило, одновременно с изучением этих явлений.

Возможности управления обуславливаются как наличием точных аналитических решений обратных волновых задач (задач управления), так и в большей степени формулировкой математических моделей, позволяющих теоретически описать все возможное многообразие, все мыслимые волновые поля.

В последние годы в работах В. А. Ильина [5–13] и его учеников [24, 25] приведены решения задач управления процессом колебаний в классе обобщенных решений $L_2(Q_{l,T})$, $W_2^2(Q_{l,T})$, $W_2^1(Q_{l,T})$. Отдельно исследовались случаи управления по двум концам и управления по одному концу.

Подробную библиографию, посвященную задаче граничного управления, можно найти в обзоре А.И. Егорова и Л.Н. Знаменской [26], монографии [24].

1. Постановка задачи

В данной работе исследуем систему дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{w}_{tt} - A\mathbf{w}_{xx} = 0 \tag{1.1}$$

в области $Q_{l,T} = [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, где A — действительная квадратная матрица порядка m с действительными, положительными собственными значениями, $\mathbf{w}(x,t) = (w_1(x,t), ..., w_m(x,t))^{\mathrm{T}}$ — вектор-функция.

Пусть $\Lambda = diag\{\Lambda_1(\lambda_1), \Lambda_2(\lambda_2), ...\Lambda_s(\lambda_s)\}$ — жорданова матрица, подобная матрице A, где $\Lambda_i(\lambda_i) = \lambda_i E + E_k$, k — степень элементарного делителя, отвечающего жордановой клетке $\Lambda_i(\lambda_i)$ (порядок блока $\Lambda_i(\lambda_i)$), E_k — матрица сдвига [28].

Известно [29], что матрицы A и Λ связаны соотношением $A = S\Lambda S^{-1}$. Матрица перехода S, приводящая матрицу A к виду Λ, составляется из векторов всех серий, соответствующих корням характеристического уравнения.

В системе (1.1) выполним замену $\mathbf{w} = S^{-1}\mathbf{u}$, получим:

$$\mathbf{u}_{tt} - \Lambda \mathbf{u}_{xx} = 0, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_m(x,t))^{\mathrm{T}}$— вектор-функция.

Выделим в системе (1.2) группу уравнений, соответствующих жордановой клетке $\Lambda_1(\lambda_1) = \Lambda^*$ порядка n, $n < m$, в которой на главной диагонали стоит одно и то же число $\lambda_1 = \lambda^2 > 0$, и без ограничения общности все элементы одного ряда ниже диагонали равны единице.

Пусть

$$\mathbf{u}_{tt} - \Lambda^* \ \mathbf{u}_{xx} = 0, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \varphi(x), \mathbf{u}_t(x,0) = \psi(x), 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.4}$$

$$2.5) trivial \mathbf{u}(x,T) = \widetilde{\varphi}(x), \mathbf{u}_t(x,T) = \widetilde{\psi}(x), 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{u}_x(0,t) = \mu(t), \mathbf{u}_x(l,t) = \nu(t), 0 \leqslant t \leqslant T \leqslant \frac{l}{\lambda}, \tag{1.6}$$

где $\varphi(\mathbf{x}), \widetilde{\varphi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C^2[0,l]}$, $\psi(\mathbf{x}), \widetilde{\psi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C^1[0,l]}$, $\mu(\mathbf{t}), \nu(\mathbf{t}) \in \mathbf{C^2[0,T]}$— вектор-функции размерности n.

Естественно, возникает задача о существовании и о явном аналитическом представлении граничных управлений второго рода (1.6), обеспечивающих переход колебательного процесса из состояния $\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ при $t = 0$ в состояние $\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}), \widetilde{\psi}(\mathbf{x})$ при $t = T$.

Отметим, что в случае $m = 2$ матричное уравнение (1.1) описывает движение естественно закрученной нити [30].

2. Общее решение матричного волнового уравнения

Система (1.3) представляет собой систему неоднородных волновых уравнений со специальной правой частью:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}, \quad u_0(x,t) = 0. \tag{2.1}$$

Общее решение данного неоднородного волнового уравнения определяется формулой [23]:

$$u_i(x,t) = u_i^0 + \frac{1}{2\lambda} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-\lambda(t-\tau)}^{x+\lambda(t-\tau)} u''_{i-1}(\xi,\tau) d\xi, \tag{2.2}$$

где u_i^0 — решение соответствующего однородного волнового уравнения, определяемое формулой

$$u_i^0(x,t) = f_i(x+\lambda t) + g_i(x-\lambda t).$$

При $i=2$ формула (2.2) после несложных преобразований принимает вид:

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = {} & f_2(x+\lambda t) + g_2(x-\lambda t) + \\ & + \tfrac{t}{2\lambda}\left\{f_1'(x+\lambda t) - g_1'(x-\lambda t)\right\} - \\ & - \tfrac{1}{4\lambda^2}\left\{f_1(x+\lambda t) + g_1(x-\lambda t)\right\} + \\ & + \tfrac{1}{4\lambda^2}\left\{f_1(x-\lambda t) + g_1(x+\lambda t)\right\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Аналогичным образом получим следующие представления решений:

$$\begin{aligned} u_3(x,t) = {} & f_3(x+\lambda t) + g_3(x-\lambda t) + \\ & + \tfrac{t}{2\lambda}\left\{f_2'(x+\lambda t) - g_2'(x-\lambda t)\right\} - \\ & - \tfrac{1}{4\lambda^2}\left\{f_2(x+\lambda t) + g_2(x-\lambda t)\right\} + \\ & + \tfrac{1}{4\lambda^2}\left\{f_2(x-\lambda t) + g_2(x+\lambda t)\right\} + \\ & + \tfrac{t^2}{8\lambda^2}\left\{f_1''(x+\lambda t) + g_1''(x-\lambda t)\right\} - \\ & - \tfrac{t}{4\lambda^3}\left\{f_1'(x+\lambda t) - g_1'(x-\lambda t)\right\} - \\ & - \tfrac{t}{8\lambda^3}\left\{f_1'(x-\lambda t) - g_1'(x+\lambda t)\right\} + \\ & + \tfrac{3}{16\lambda^4}\left\{f_1(x+\lambda t) + g_1(x-\lambda t)\right\} - \\ & - \tfrac{3}{16\lambda^4}\left\{f_1(x-\lambda t) - g_1(x+\lambda t)\right\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

и т.д.

Общее решение для соответствующего неоднородного волнового уравнения системы (1.3) можно представить, используя введенный нами ранее в [32] оператор $\delta \equiv \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}$, в виде:

$$\begin{aligned}
& u_1 = u_1^0; \\
& u_2 = u_2^0 + \delta u_1^0 - \tfrac{1}{4\lambda^2}\left[u_1^0 - u_1^0(x,-t)\right]; \\
& u_3 = u_3^0 + \delta u_2^0 + \tfrac{1}{2}\delta^2 u_1^0 - \tfrac{1}{4\lambda^2}\left[(u_2^0 - u_2^0(x,-t)) + (\delta u_1^0 - \delta u_1^0(x,-t))\right] + \\
& \qquad + \tfrac{3}{16\lambda^4}\left[u_1^0 - u_1^0(x,-t)\right]; \\
& u_4 = u_4^0 + \delta u_3^0 + \tfrac{1}{2}\delta^2 u_2^0 + \tfrac{1}{6}\delta^3 u_3^0 - \\
& \qquad - \tfrac{1}{4\lambda^2}\left[(u_3^0 - u_3^0(x,-t)) + (\delta u_2^0 - \delta u_2^0(x,-t)) + \tfrac{1}{2}(\delta^2 u_1^0 - \delta^2 u_1^0(x,-t))\right] + \\
& \quad + \tfrac{3}{16\lambda^4}\left[(u_2^0 - u_2^0(x,-t)) + (\delta u_1^0 - \delta u_1^0(x,-t))\right] - \tfrac{10}{64\lambda^6}\left[u_1^0 - u_1^0(x,-t)\right]; \\
& u_5 = u_5^0 + \delta u_4^0 + \tfrac{1}{2}\delta^2 u_3^0 + \tfrac{1}{6}\delta^3 u_2^0 + \tfrac{1}{24}\delta^4 u_1^0 - \\
& \qquad - \tfrac{1}{4\lambda^2}\left[(u_4^0 - u_4^0(x,-t)) + (\delta u_3^0 - \delta u_3^0(x,-t))\right] - \\
& \quad - \tfrac{1}{4\lambda^2}\left[\tfrac{1}{2}(\delta^2 u_2^0 - \delta^2 u_2^0(x,-t)) + \tfrac{1}{6}(\delta^3 u_1^0 - \delta^3 u_1^0(x,-t))\right] + \\
& \qquad + \tfrac{3}{16\lambda^4}\left[(u_3^0 - u_3^0(x,-t)) + (\delta u_2^0 - \delta u_2^0(x,-t)) + \tfrac{1}{2}(\delta^2 u_1^0 - \delta^2 u_1^0(x,-t))\right] - \\
& \quad - \tfrac{10}{64\lambda^6}\left[(u_2^0 - u_2^0(x,-t)) + (\delta u_1^0 - \delta u_1^0(x,-t))\right] + \tfrac{35}{256\lambda^8}\left[u_1^0 - u_1^0(x,-t)\right],
\end{aligned}$$

......

$$u_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{\delta^{(i-k)}u_k^0}{(i-k)!} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(-1)^k C_{2k-1}^{k-1}}{(2\lambda)^{2k}} \sum_{m=1}^{i-k} \frac{\delta^{(i-k-m)}(u_m^0 - u_m^0(x,-t))}{(i-k-m)!}, i \geqslant 2. \tag{2.5}$$

Справедливость данной формулы проверяется непосредственной подстановкой (2.5) в уравнение (2.1).

Выделим в системе (1.2) группу уравнений, соответствующих жордановой клетке Λ^{**}, которая представляет собой диагональную матрицу, с различными собственными значениями матрицы A на диагонали:

$$\mathbf{u}_{tt} - \Lambda^{**}\mathbf{u}_{xx} = 0. \tag{2.6}$$

Матричное уравнение (2.5) равносильно системе однородных волновых уравнений. Общее решение $\mathbf{u}(x,t) = colon(u_{n+1}, ..., u_s)^T$ данной системы представимо:

$$u_i(x,t) = f_i(x + \lambda_i t) + g_i(x - \lambda_i t). \tag{2.7}$$

Возвращаясь к системе (1.1), получаем, что ее общее решение примет вид:

$$\mathbf{w} = S^{-1} \cdot \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}(x,t) = colon(u_1, ..., u_n, ..., u_{n+1}, ..., u_s)$,

при $i = \overline{1, n}$ $u_i(x,t)$ определяется формулой (2.5);

при $i = \overline{n+1,\ s}$ формулой (2.7).

3. Задачи управления

Задача I (задача управления). Найти вектор-функции $\mu(\mathbf{t}), \nu(\mathbf{t})$ такие, чтобы для решения $\mathbf{u}(x,t)$ второй краевой задачи с начальными условиями (1.4) в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия с заданными функциями (1.5).

Задача II (вторая краевая задача с начальными (финальными) условиями). Найти вектор-функцию $\mathbf{u}(x,t) \in C^2(Q_{l,T})$, удовлетворяющую системе (1.3) в $Q_{l,T}$, начальным условиям (1.4) (финальным условиям (1.5)) на отрезке $[0, l]$ и краевым условиям (1.6).

Теорема 1. Если $\Phi_s \in C^{2+i-s}[0,l]$, $\Psi_s \in C^{1+i-s}[0,l]$, Φ_s, Ψ_s – продолжения вектор-функций φ_s, ψ_s на отрезки $[-l;0]$ и $[l;2l]$, функции $\mu_s(t), \nu_s(t) \in$ $\in C^{1+i-s}[-T;T]$, $([0,2T])$ и выполнены условия согласования начальных (финальных) и граничных условий, тогда классическое решение второй краевой задачи представимо:

$$u_i(x,t) = \sum_{s=1}^{i} \tfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)} F_\lambda(\Phi_s, \Psi_s, \mu_s, \nu_s), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

Для второй краевой задачи с начальными условиями F_λ имеет вид [22]:

$$\begin{gathered} F_\lambda(\Phi, \Psi, \underline{\mu}, \underline{\nu}) = \frac{\Phi(x+\lambda t) + \Phi(x - \lambda t)}{2} + \frac{1}{2\lambda}\int\limits_{x-\lambda t}^{x+\lambda t} \Psi(z)dz - \\ -\lambda \int\limits_0^{\frac{\lambda t - x}{\lambda}} \underline{\mu}(s)ds + \lambda \int\limits_0^{\frac{x+\lambda t - l}{\lambda}} \underline{\nu}(s)ds, \end{gathered} \tag{3.2}$$

с финальными условиями

$$F_\lambda(\widetilde{\Phi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}) = \frac{\widetilde{\Phi}(x+\lambda(t-T))+\widetilde{\Phi}(x-\lambda(t-T))}{2}+ \\ +\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{x-\lambda(t-T)}^{x+\lambda(t-T)}\widetilde{\Psi}(z)dz+\lambda\int\limits_{T}^{\frac{x+\lambda t}{\lambda}}\widetilde{\mu}(s)ds-\lambda\int\limits_{T}^{\frac{l-x+\lambda t}{\lambda}}\widetilde{\nu}(s)ds, \tag{3.3}$$

причем функции $\underline{\mu}_s, \underline{\nu}_s$ удовлетворяют условиям $\underline{\mu}_s(t) = \mu_s(t)$ на отрезке $[0,T]$, $\underline{\mu}_s \equiv 0$ при $t \leqslant 0$, аналогичным условиям удовлетворяет и функция $\underline{\nu}_s$; функции $\widetilde{\mu}_s, \widetilde{\nu}_s$ удовлетворяют условиям $\widetilde{\mu}_s(t) = \mu_s(t)$ на отрезке $[0,T]$, $\widetilde{\mu}_s \equiv 0$ при $t \geqslant T$, аналогичным условиям удовлетворяет и функция $\widetilde{\nu}_s$.

Используя методики, предложенные В. А. Ильиным в работах [5–12], для решения задачи управления сформулируем две вспомогательные задачи – задача о гашении колебаний и о переводе первоначально покоящейся системы в заданное состояние.

Задача (о гашении колебаний). Найти вектор-функции $\mu(\mathbf{t}), \nu(\mathbf{t})$ такие, что для решения $\mathbf{u}(x,t)$ второй краевой задачи с заданными начальными условиями (1.4) в момент времени $t = T$ выполнялись нулевые финальные условия

$$\mathbf{u}(x,T) = 0, \quad \mathbf{u}_t(x,T) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3.4}$$

Теорема 2. Если $0 < T < \frac{l}{\lambda}$, вектор-функции $\varphi(\mathbf{x}) = (\varphi_\mathbf{1}, \varphi_\mathbf{2}, ..., \varphi_\mathbf{n})^{\mathrm{T}}$, $\psi(\mathbf{x}) = (\psi_\mathbf{1}, \psi_\mathbf{2}, ..., \psi_\mathbf{n})^{\mathrm{T}}$ удовлетворяют условиям:

а) $\varphi_s(x) \in C^{2+i-s}[0,l]$, $\psi_s(x) \in C^{1+i-s}[0,l]$;

б) $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{l}) = \mathbf{0}$, $\psi(\mathbf{0}) = \psi(\mathbf{l}) = \mathbf{0}$;

в) для любого $t \in [-\infty; 0]$ и для любого $i \in \overline{1,n}$ справедливы тождества:

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{i} \dfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)}P_\lambda(\varphi_s(t),\psi_s(t)) \equiv 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{i} \dfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)}R_\lambda(\varphi_s(t),\psi_s(t)) \equiv 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

где

$$P_\lambda = \frac{\lambda}{2}\varphi_s'(\lambda t) + \frac{1}{2}\psi_s(\lambda t), \quad t = \frac{\lambda T - x}{\lambda},$$

$$R_\lambda = -\frac{\lambda}{2}\varphi_s'(l-\lambda t) + \frac{1}{2}\psi_s(l-\lambda t), \quad t = \frac{x+\lambda T - l}{\lambda},$$

тогда вектор-функции, определяющие граничные условия второго рода, представимы

$$\begin{cases} \mu_i(x,t) = \sum\limits_{s=1}^{i} \dfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)}M_\lambda^1(\varphi_s,\psi_s), \\ \nu_i(x,t) = \sum\limits_{s=1}^{i} \dfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)}N_\lambda^1(\varphi_s,\psi_s), \end{cases} \tag{3.6}$$

$$M_\lambda^1(\varphi,\psi) = \frac{\varphi'(\lambda t)}{2} + \frac{1}{2\lambda}\psi(\lambda t), \tag{3.7}$$

$$N^1_\lambda(\varphi,\psi)=\frac{\varphi'(l-\lambda t)}{2}-\frac{1}{2\lambda}\psi(l-\lambda t). \tag{3.8}$$

Задача (о переводе первоначально покоящейся системы в заданное состояние): найти вектор-функции $\mu(\mathbf{t}),\nu(\mathbf{t})$ такие, чтобы для решения $\mathbf{u}(x,t)$ второй краевой задачи с нулевыми начальными условиями

$$\mathbf{u}(x,0)=0,\quad \mathbf{u}_t(x,0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l \tag{3.9}$$

в момент времени $t=T$ выполнились финальные условия (1.5).

Теорема 3. Если $0<T<\frac{l}{\lambda}$, вектор-функции $\widetilde{\varphi}(\mathbf{x})=(\widetilde{\varphi}_\mathbf{1},\widetilde{\varphi}_\mathbf{2},...,\widetilde{\varphi}_\mathbf{n})^{\mathrm{T}}$, $\widetilde{\psi}(\mathbf{x})=(\widetilde{\psi}_\mathbf{1},\widetilde{\psi}_\mathbf{2},...,\widetilde{\psi}_\mathbf{n})^{\mathrm{T}}$ удовлетворяют условиям:

а) $\widetilde{\varphi}_s(x)\in C^{2+i-s}[0,l]$, $\widetilde{\psi}_s(x)\in C^{1+1-s}[0,l]$;

б) $\widetilde{\varphi}(\mathbf{0})=\widetilde{\varphi}(\mathbf{l})=\mathbf{0}$, $\widetilde{\psi}(\mathbf{0})=\widetilde{\psi}(\mathbf{l})=\mathbf{0}$;

в) для любого $t\in[-\infty;0]$ и для любого $i\in\overline{1,n}$ справедливы тождества:

$$\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{i}\dfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)}P_\lambda(\widetilde{\varphi}_s(t),\widetilde{\psi}_s(t))\equiv 0,\\ \sum\limits_{s=1}^{i}\dfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)}R_\lambda(\widetilde{\varphi}_s(t),\widetilde{\psi}_s(t))\equiv 0,\end{cases} \tag{3.10}$$

где

$$P_\lambda=-\frac{\lambda}{2}\widetilde{\varphi}'_s(\lambda T-\lambda t)+\frac{1}{2}\widetilde{\psi}_s(\lambda T-\lambda t),\quad t=\frac{x}{\lambda},$$
$$R_\lambda=\frac{\lambda}{2}\widetilde{\varphi}'_s(l+\lambda t-\lambda T)+\frac{1}{2}\widetilde{\psi}_s(l+\lambda t-\lambda T),\quad t=\frac{l-x}{\lambda},$$

тогда функции $\mu_i(t),\nu_i(t)$, определяющие граничные условия второго рода, представимы:

$$\begin{cases}\mu_i(x,t)=\sum\limits_{s=1}^{i}\dfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)}M^2_\lambda(\widetilde{\varphi}_s,\widetilde{\psi}_s),\\ \nu_i(x,t)=\sum\limits_{s=1}^{i}\dfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)}N^2_\lambda(\widetilde{\varphi}_s,\widetilde{\psi}_s),\end{cases} \tag{3.11}$$

$$M^2_\lambda(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})=\frac{\widetilde{\varphi}'(\lambda t)}{2}-\frac{1}{2\lambda}\widetilde{\psi}(l-\lambda t), \tag{3.12}$$

$$N^2_\lambda(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})=\frac{\widetilde{\varphi'}(\lambda t)}{2}+\frac{1}{2\lambda}\widetilde{\psi}(\lambda t). \tag{3.13}$$

Граничные управления $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)^T$, $\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)^T$ задачи I найдены как сумма решений задач о полном успокоении системы и о приведении в наперед заданное состояние первоначально покоящейся системы:

$$\begin{cases}\mu_i(x,t)=\sum\limits_{s=1}^{i}\dfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)}M_\lambda(\varphi_s,\psi_s,\widetilde{\varphi}_s,\widetilde{\psi}_s),\\ \nu_i(x,t)=\sum\limits_{s=1}^{i}\dfrac{1}{(i-s)!}\delta^{(i-s)}N_\lambda(\varphi_s,\psi_s,\widetilde{\varphi}_s,\widetilde{\psi}_s),\end{cases} \tag{3.14}$$

где $i=\overline{1,n}$,

$$M_\lambda=M^1_\lambda+M^2_\lambda,$$
$$N_\lambda=N^1_\lambda+N^2_\lambda.$$

Данная работа является продолжением исследований, начатых в работах [31, 32].

Литература

[1] Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 474 с.

[2] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.] М.: ФИЗМАТЛИТ, 1961. 384 с.

[3] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.

[4] Егоров А.И. Основы теории управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[5] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 5. С. 592—596.

[6] Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 12. С. 1640—1659.

[7] Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 11. С. 1517—1534.

[8] Ильин В.А., Тихомиров В.В. Волновое уравнение с краевым управлением // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 34. № 1. С. 137—138.

[9] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергии // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513—1528.

[10] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний струны на двух концах при условии существования конечной энергии // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 3. С. 295—299.

[11] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний струны на одном ее конце при закрепленном втором конце и при условии существования конечной энергии // Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 6. С. 743—747.

[12] Ильин В.А., Моисеев Е.И. О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. РАН. 2002. Т. 387. № 5. С. 600—603.

[13] Ильин В.А., Моисеев Е.И. Граничное управление радиально-симметричными колебаниями круглой мембраны // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 6. С. 730—734.

[14] Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975. 280 с.

[15] Александров Ю.Л. О существовании решений некоторого класса задач управления системами с распределлнными параметрами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Мат., мех. 1985. № 5. С. 24—28.

[16] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.

[17] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.

[18] Волны в сплошных средах / А. Г. Горошков [и др.] М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 472 с.

[19] Бутковский А.Г., Пустыльников Л.Н. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980.

[20] Бутковский А.Г., Даринский Ю.В., Пустыльников Л.Н. Подвижное управление системами с распределенными системами // Автоматика и техника. 1976. № 2.

[21] Райтум У.Е. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 277 с.

[22] Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 232 с.

[23] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

[24] Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 176 с.

[25] Знаменская Л.Н. Управление колебаниями струны в классе обобщенных решений из L_2 // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 666—672.

[26] Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями (обзор) // Оптимизация, Управление, Интеллект: труды международной конференции CDS'2000. Иркутск: Изд-во Иркутского государственного университета, 2001. С. 104—112.

[27] Терлецкий В.А. К оптимизации гиперболических систем // Методы оптимизации и их приложения: труды XII Байкальской международной конференции (Иркутск, 24.06–01.07.2001 г.). Иркутск, 2001. Т. 2. С. 167—171.

[28] Лившиц Н.А., Виноградов В.Н., Голубев Г.А. Корреляционная теория оптимального управления многомерными процессами. М.: Советское радио, 1974. 328 с.

[29] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.

[30] Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971.

[31] Андреев А.А., Лексина С.В. Задача граничного управления для системы волновых уравнений // Вестник СамГТУ. Серия "Физико-математические науки". 2008. № 1(16). С. 5—10.

[32] Андреев А.А., Лексина С.В. Система волновых уравнений с граничным управлением на двух концах // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. № 8/1(67). С. 21—34.

Поступила в редакцию 22/*III*/2009;
в окончательном варианте — 22/*III*/2009.

THE TASK OF THE BOUNDARY CONTROL IN CONDITIONS OF THE SECOND BOUNDARY VALUE FOR THE MATRIX WAVE EQUATION

© 2009 S.V. Lexina[2]

In the given paper the formula defining the general solution for the matrix wave equation is obtained. The boundary controls in conditions of the second boundary value are described.

Key words and phrases: general solution, wave equation, boundary control.

Paper received 22/*III*/2009.
Paper accepted 22/*III*/2009.

[2]Lexina Svetlana Valentinovna (`lesveta@rambler.ru`), Dept. of Mathematics, Computer Science, and Mathematical Methods in Economics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.