УДК 517.982

# ИНДЕКСЫ БАНАХА — САКСА ДЛЯ ПОДПРОСТРАНСТВ РАДЕМАХЕРА[1]

© 2009 А.И. Новикова[2]

В данной работе рассматриваются подпространства перестановочно-инвариантных пространств, порожденные системой Радемахера, и исследуется индекс Банаха — Сакса.

**Ключевые слова:** система Радемахера, перестановочно-инвариантное пространство, индекс Банаха — Сакса.

Перестановкой измеримой на $[0,1]$ функции $x(t)$ [1, гл. 2.2] называется убывающая непрерывная слева функция $x^*(t)$, определяемая формулой

$$x^*(t) = \inf\{\tau : n_{|x|}(\tau) < t\},$$

где $n_x(\tau) = mes\{t : \ x(t) > \tau\}$ — функция распределения. Банахово пространство $E = E[0,1]$ с мерой Лебега называется симметричным или перестановочно-инвариантным (rearrangement invariant, далее — r.i.), если из того, что $y \in E$ и $x^*(t) \leqslant y^*(t)$ для всех $t \in [0,1]$, следует $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$ [1, гл. 2.4; 2, гл. 2а]. Примерами r.i. пространств служат пространства $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, пространства Орлича $L_M$ :

$$\|x\|_{L_M} = \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ \int\limits_0^1 M(\frac{|x(t)|}{\lambda})dt \leqslant 1\},$$

где $M$ — положительная выпуклая на $[0,\infty)$ функция, $M(0) = 0$. Через $G$ будем обозначать сепарабельную часть пространства Орлича $L_{N_2}$, $N_2(t) = e^{t^2} - 1$.

R.i. пространством является также пространство Марцинкевича $M_\psi$ измеримых на $[0,1]$ функций $x$, для которых

$$\|x\|_{M_\psi} = \sup_{0<t<1} \frac{t}{\psi(t)} \int\limits_0^1 x^*(s)ds < \infty,$$

где $\psi$ — возрастающая, вогнутая функция на $[0,1]$ и $\psi(0) = 0$.

---

[1]Статья поддержана грантом РФФИ 08-01-00226а.

[2]Новикова Анна Игоревна (annnovikova@mail.ru), кафедра теории функций и геометрии Воронежского государственного университета, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

Пространства $l_{p,q}$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ состоят из последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для которых конечно выражение

$$\|x\|_{p,q} = \begin{cases} (\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k^*)^q k^{q/p-1})^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup\limits_k x_k^* k^{1/p}, & q = \infty, \end{cases}$$

где $\{x_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка последовательности $\{|x_k|\}_{k=1}^{\infty}$. Данное выражение является нормой для $1 \leqslant q \leqslant p$ и квазинормой, эквивалентной некоторой норме, при $p < q$. Пространство $l_{p,\infty}$ несепарабельно, через $l_{p,\infty}^0$ обозначим замыкание $l_1$ в норме $l_{p,\infty}$.

Если $0 < \tau < \infty$, то семейство операторов растяжения

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & 0 \leqslant t \leqslant \min(\tau, 1), \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0,1] \end{cases}$$

действует ограниченно в любом r.i. пространстве $E$. Числа $\alpha_E$ и $\beta_E$, заданные формулами

$$\alpha_E = \lim_{\tau \to +0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau},$$
$$\beta_E = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau},$$

называются индексами Бойда (индексами растяжения) пространства $E$ [2, гл. 2b; 1, гл. 2.4]. Для любого r.i. пространства $E$ $0 \leqslant \alpha_E \leqslant \beta_E \leqslant 1$.

Индексом Банаха — Сакса $\gamma(E)$ банахова пространства $E$ [3] называется $\sup p$, удовлетворяющих следующему условию: любая слабо сходящаяся к 0 последовательность $\{x_n\} \subset E$ содержит подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что

$$\sup_m m^{-\frac{1}{p}} \left\| \sum_{k=1}^{m} x_{n_k} \right\|_E < \infty.$$

Пусть $E$ — r.i. пространство на $[0,1]$. Обозначим через $R(E)$ подпространство $E$, порожденное системой Радемахера $r_k(t) = sign\ \sin(2^k \pi t)$, $t \in [0,1]$. Последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots)$ принадлежит $R(E)$, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k r_k$ принадлежит $E$ и

$$\|x\|_{R(E)} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k \right\|_E.$$

Так как $\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k r_k \|_E = \| \sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_k x_k r_{\pi(k)} \|_E$ для любых $n \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{R}^1, \epsilon_k = \pm 1$ и перестановки $\pi$ чисел $1, 2, \ldots, n$ [2, гл. 2b], то естественный базис в $R(E)$ является симметричным. В силу неравенства Хинчина $R(L_p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ совпадает с $l_2$ с точностью до эквивалентных норм, $R(L_\infty) = l_1$ [4]. В этой работе также было показано, что пространство $R(E)$ изоморфно $l_2$ тогда и только тогда, когда $E \supset G$.

Пусть $X_0,\ X_1$ — банаховы пространства, непрерывно вложенные в отделимое топологическое пространство. Сумму $X_0+X_1$ и пересечение $X_0\cap X_1$ будем рассматривать с обычными нормами [2, гл. 2g]:

$$\|x\|_{X_0+X_1} = \\ = \inf\{\|x_0\|_{X_0}+\|x_1\|_{X_1}:\ x=x_0+x_1,\ x_0\in X_0,\ x_1\in X_1\}, \\ \|x\|_{X_0\cap X_1}=\max\{\|x\|_{X_0},\|x\|_{X_1}\}.$$

Через $\mathcal{I}(X_0,X_1)$ будем обозначать множество всех интерполяционных относительно $(X_0,X_1)$ пространств. Банахово пространство $X$ называется интерполяционным относительно пары $(X_0,X_1)$, если имеет место непрерывное вложение $X_0\cap X_1\subset X\subset X_0+X_1$ и любое линейное ограниченное отображение $T: X_0+X_1\to X_0+X_1$, сужения которого на $X_0$ и $X_1$ представляют собой ограниченные линейные отображения $T: X_0\to X_0$, $T: X_1\to X_1$, также ограниченно действует из $X$ в $X$ [5, гл. 2.4].

$\mathcal{K}$-функционал $\mathcal{K}(t,x;X_0,X_1)$ определяется для $x\in X_0+X_1$ и $t>0$ по формуле

$$\mathcal{K}(t,x;X_0,X_1)= \\ =\inf\{\|x_0\|_{X_0}+t\|x_1\|_{X_1}:\ x=x_0+x_1,\ x_0\in X_0,\ x_1\in X_1\}.$$

Для каждого $t>0$ функционал $\mathcal{K}(t,x;X_0,X_1)$ есть норма в пространстве $X_0+X_1$. Пусть $0<\theta<1,\ 1\leqslant q\leqslant\infty$. Функционал $\Phi_{\theta,q}$, называемый параметром вещественного метода интерполяции, определяется на неотрицательных функциях $\varphi$ формулой

$$\Phi_{\theta,q}(\varphi)=\begin{cases}\left(\int\limits_0^\infty (t^{-\theta}\varphi(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & 1\leqslant q<\infty,\\ \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\infty} t^{-\theta}\varphi(t), & q=\infty.\end{cases}$$

Пространство всех $x\in X_0+X_1$, для которых выполнено

$$\Phi_{\theta,q}(\mathcal{K}(t,x;X_0,X_1))<\infty,$$

обозначается через $(X_0,X_1)_{\theta,q}$ и по определению [5, гл. 3.1]

$$\|x\|_{\theta,q}=\Phi_{\theta,q}(\mathcal{K}(t,x;X_0,X_1)).$$

Нам понадобятся следующие утверждения.

**Лемма 1 [6].** Пусть $X\in\mathcal{I}(l_1,l_2)$ и определяется соотношением $X=(l_1,l_2)^{\mathcal{K}}_F$ для некоторого параметра $F$ вещественного $\mathcal{K}$-метода интерполяции, и $E=(L_\infty,G)^{\mathcal{K}}_F$. Тогда пространство $R(E)$ изоморфно $X$, то есть выполнено

$$C_1\|a\|_X\leqslant\left\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\right\|_E\leqslant C_2\|a\|_X$$

с константами, не зависящими от последовательности $a=(a_k)_{k=1}^\infty$.

Вместо последнего двойного неравенства мы будем писать

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\right\|_E\asymp\|a\|_X.$$

**Лемма 2 [6].** Для того чтобы банахово пространство последовательностей $X$ совпадало с пространством $R(E)$ для некоторого r.i. пространства $E$, необходимо и достаточно, чтобы $X \in \mathcal{I}(l_1, l_2)$.

Для $1 < p < \infty,\ 1 \leqslant q < \infty$ введем пространство $E_{\varphi,q}$ :

$$\|x\|_{E_{\varphi,q}} = \left( \int\limits_0^1 (x^*(u)\varphi(u))^q \, \frac{du}{u} \right)^{1/q},$$

где $\varphi(u) = \ln^{-\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}}(\frac{e}{u}),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Данное выражение совпадает с нормой пространства Лоренца $\Lambda_q(\psi),\ \psi(s) = \ln^{-\frac{q}{p'}}(\frac{e}{s})$ :

$$\|x\|_{\psi,q} = \left( \int\limits_0^1 (x^*(s))^q d\psi(s) \right)^{1/q}$$

для $1 < p, q < \infty,\ q \leqslant p',\ (q-1 \leqslant \frac{1}{p-1})$ и эквивалентно норме в остальных случаях.

**Теорема 1.** Если $1 < p < 2,\ 1 \leqslant q < \infty$, то система Радемахера в пространстве $E_{\varphi,q}$ эквивалентна каноническому базису в $l_{p,q}$, то есть $R(E_{\varphi,q}) = l_{p,q}$ с точностью до эквивалентных норм и

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{E_{\varphi,q}} \asymp \|(a_k)\|_{p,q}.$$

**Доказательство.** Так как $l_{p,q} = (l_1, l_2)_{\eta,q}$, где $\frac{\eta}{2} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p'}$ [5, т. 5.2.1], то по лемме 1 для такого $\eta$

$$\|(a_k)\|_{p,q} \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{(L_\infty, G)_{\eta,q}}.$$

Далее будем использовать следующую формулу для $\mathcal{K}$-функционала [7]: для $x \in G$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) &= \mathcal{K}(t, x; L_\infty, L_{N_2}) \asymp \\ &\asymp t \sup_{0<u\leqslant \min(1, e^{1-t^2})} (x^*(u) \ln^{-1/2}(e/u)). \end{aligned} \tag{1}$$

В силу равенства $\eta = 2/p'$

$$\begin{aligned} \|x\|^q_{(L_\infty,G)_{\eta,q}} &= \int\limits_0^\infty (t^{-\eta}\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G))^q \, \tfrac{dt}{t} = \\ &= \int\limits_0^\infty t^{-\eta q-1+q} \sup_{0<u\leqslant \min(1,e^{1-t^2})} (x^*(u)^q \ln^{-q/2}(e/u))dt \geqslant \\ &\geqslant \int\limits_1^\infty t^{-\eta q-1+q} \sup_{0<u\leqslant e^{1-t^2}} (x^*(u)^q \ln^{-q/2}(e/u))dt. \end{aligned}$$

Так как $\sup\limits_{0<u\leqslant e^{1-t^2}} (x^*(u)\ln^{-1/2}(e/u)) \geqslant x^*(e^{1-t^2})t^{-1}$, то, продолжая цепочку неравенств, имеем

$$\|x\|^q_{(L_\infty,G)_{\eta,q}} \geqslant \int\limits_1^\infty t^{-\eta q-1}x^*(e^{1-t^2})^q dt =$$
$$= -\int\limits_1^0 \ln(\tfrac{e}{u})^{-\frac{\eta q}{2}-\frac12}x^*(u)^q\cdot\frac12\ln(\tfrac{e}{u})^{-\frac12}\tfrac{du}{u} = \frac12\int\limits_0^1 \ln(\tfrac{e}{u})^{-\frac{q}{p'}-1}x^*(u)^q\tfrac{du}{u} =$$
$$= \frac12\int\limits_0^1 (x^*(u)\varphi(u))^q\,\frac{du}{u} = \frac12\|x\|_{E_{\varphi,q}}.$$

Последнее неравенство доказывает непрерывное вложение $(L_\infty,G)_{\eta,q}\subset\ E_{\varphi,q}$. Следовательно,

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty a_k r_k\right\|_{E_{\varphi,q}} \leqslant C\|(a_k)\|_{p,q}$$

для некоторой константы $C>0$.

Докажем противоположное неравенство. Обозначим $x_a=\sum\limits_{k=1}^\infty a_k r_k$ и $h_a = \sum\limits_{k=1}^\infty a_k^*\chi_{(0,2^{-k-1})}$. Имеем

$$\|x_a\|^q_{E_{\varphi,q}} \geqslant e^{2(\frac{q}{p'}+1)}\|\sigma_{e^2}x_a\|^q_{E_{\varphi,q}} = C_1\sum_{k=1}^\infty\int_{e^{-k}}^{e^{-k+1}}\left(x_a^*(e^{-2}s)\varphi(u)\right)^q\,\frac{du}{u} \geqslant$$
$$\geqslant C_1\sum_{k=1}^\infty x_a^*(e^{-k-1})^q\int_{e^{-k}}^{e^{-k+1}}\ln(\tfrac{e}{u})^{-\frac{q}{p'}-1}\tfrac{du}{u}.$$

Отметим, что

$$h_a(e^{-k-1}) \geqslant h_a(2^{-k-1}-0) \geqslant \sum_{i=1}^k a_i^* \ \ (k=1,2,\ldots),$$

и верно элементарное неравенство

$$1+\frac{\beta}{2}x \leqslant (1+x)^\beta \ \ (0\leqslant x\leqslant 1,\ \ \beta>0). \tag{2}$$

Последний интеграл оценим снизу с помощью неравенства (2):

$$\begin{gathered}\int_{e^{-k}}^{e^{-k+1}}\ln(\tfrac{e}{u})^{-\frac{q}{p'}-1}\tfrac{du}{u} = -\int_{e^{-k}}^{e^{-k+1}}\ln(\tfrac{e}{u})^{-\frac{q}{p'}-1}d(\ln(\tfrac{e}{u})) =\\ = \tfrac{q}{p'}\left(k^{-\frac{q}{p'}}-(k+1)^{-\frac{q}{p'}}\right) = \tfrac{q}{p'}\tfrac{1}{(k+1)^{q/p'}}\left((\tfrac{k+1}{k})^{q/p'}-1\right) \geqslant\\ \geqslant \tfrac{q}{p'}\tfrac{1}{(k+1)^{q/p'}}(1+\tfrac{q}{2p'}\cdot\tfrac1k-1) \geqslant (\tfrac{q}{p'})^2\tfrac{1}{2k(k+1)^{q/p'}} \geqslant (\tfrac{q}{p'})^2\tfrac{1}{2^{q/p'}}\tfrac{1}{k^{q/p'+1}}.\end{gathered} \tag{3}$$

В [4, 8] было показано, что для $a\in l_2$ справедливо неравенство $h_a(t)\leqslant\ x_a^*(t)$. Используя этот факт и оценку (3), получаем

$$\|x_a\|^q_{E_{\varphi,q}} \geqslant C_2\sum_{k=1}^\infty k^{-\frac{q}{p'}-1}x_a^*(e^{-k-1})^q \geqslant C_2\sum_{k=1}^\infty k^{-\frac{q}{p'}-1}h_a(e^{-k-1})^q \geqslant$$
$$\geqslant C_2\cdot\sum_{k=1}^\infty k^{-\frac{q}{p'}-1+q}\left(\frac1k\sum_{i=1}^k a_i^*\right)^q \geqslant C_2\sum_{k=1}^\infty k^{\frac{q}{p}-1}a_k^{*q} = C\|(a_k)\|^q_{p,q}. \blacksquare$$

**Теорема 2.** Для $1 < p < 2$ система Радемахера в пространстве Марцинкевича $M_\psi$, $\psi(u) = \ln^{\frac{1}{p'}}(\frac{e}{u})u$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ эквивалентна каноническому базису в $l^0_{p,\infty}$, то есть $R(M_\psi) = l^0_{p,\infty}$ и

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\right\|_{M_\psi} \asymp \|(a_k)\|_{p,\infty}.$$

**Доказательство.** Так как $l_{p,\infty} = (l_1, l_2)_{\eta,\infty}$, где $\frac{\eta}{2} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p'}$ [5, т. 5.2.1], то по лемме 1 для такого $\eta$

$$\|(a_k)\|_{p,\infty} \asymp \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\right\|_{(L_\infty,G)_{\eta,\infty}}.$$

Используя формулу (1), имеем

$$\|x\|_{(L_\infty,G)_{\eta,\infty}} = \sup_t t^{-\eta}\mathcal{K}(t,x;L_\infty,G) =$$
$$= \sup_t t^{-\eta+1} \sup_{0<u\leqslant \min(1,e^{1-t^2})} (x^*(u)\ln^{-1/2}(e/u)) =$$
$$= \sup_{0\leqslant u\leqslant 1} [x^*(u)\cdot \ln^{-1/2}(\tfrac{e}{u}) \sup_{0\leqslant t\leqslant \ln^{1/2}(\frac{e}{u})} t^{-\eta+1}].$$

Заметим, что для $p < 2$ справедливо неравенство $\eta < 1$ и, следовательно,

$$\|x\|_{(L_\infty,G)_{\eta,\infty}} = \sup_{0\leqslant u\leqslant 1} [x^*(u)\cdot \ln^{-1/2}(\tfrac{e}{u})\cdot \ln^{1/2-\eta/2}(\tfrac{e}{u})] =$$
$$= \sup_{0\leqslant u\leqslant 1} [x^*(u)\cdot \ln^{-1/p'}(\tfrac{e}{u})] = \sup_{0\leqslant u\leqslant 1} [x^*(u)\cdot \tfrac{u}{\psi(u)}] \asymp \|x\|_{M(\psi)}.$$

■

**Замечание 1.** Случай пространств $l_p$, $1 < p < 2$ был рассмотрен в статье [4, 8], а случай пространств $l_{p,\infty}$ в статье [9].

**Замечание 2.** Пространства $l_{p,q}$ принадлежат множеству $\mathcal{I}(l_1, l_2)$, если и только если $p = q = 2$ или $1 < p < 2$ [5, 10].

Несложно показать, что для r.i. пространства $E \neq L_\infty$ индексы Банаха-Сакса пространств $E$ и $R(E)$ удовлетворяют соотношению

$$1 \leqslant \gamma(E) \leqslant \gamma(R(E)) \leqslant 2.$$

**Теорема 3.** 1. Для $E \neq L_\infty$ верна следующая альтернатива: $\gamma(E) = 1$ или $\gamma(R(E)) = 2$.

2. Для любой пары $(p,q)$ : $p = 1$, $1 < q \leqslant 2$ или $1 \leqslant p \leqslant 2$, $q = 2$ найдется r.i. пространство $E = E[0,1]$ такое, что $\gamma(E) = p$, $\gamma(R(E)) = q$.

**Доказательство.** 1. Предположим, что $\gamma(E) > 1$. Тогда [11, т. 4.2] нижний индекс Бойда $\alpha_E > 0$ и [2, т. 2.b.3] $L_q \subset E \subset L_1$, для любого $q$ : $0 < \frac{1}{q} < \alpha_E$. Тогда для произвольного $x \in R(E)$ в силу неравенства Хинчина имеем:

$$A_1\|x\|_{l_2} \leqslant \|\sum_k x_k r_k\|_{L_1} \leqslant \|\sum_k x_k r_k\|_E =$$
$$= \|x\|_{R(E)} \leqslant C\|\sum_k x_k r_k\|_{L_q} \leqslant CB_q\|x\|_{l_2},$$

где $B_q$, $A_1$ — константы из неравенства Хинчина. Таким образом, $R(E)$ изоморфно $l_2$ и $\gamma(R(E)) = 2$.

2. Для семейства пространств $L_p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ имеем $\gamma(L_p) = p$, а $R(L_p) = l_2$ и $\gamma(R(L_p)) = 2$. Напротив, для семейства пространств $E_{\varphi,q}$, рассмотренных в теореме 1, $\gamma(E_{\varphi,q}) = 1$ и $\gamma(R(E_{\varphi,q})) = \gamma(l_{p,q}) = \min(p,q)$, $1 \leqslant q < \infty$, $1 < p < 2$.

■

## Литература


[1] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М., 1978. 400 с.

[2] Lindennstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces II: Function Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1979. 243 p.

[3] Семенов Е.М., Сукочев Ф.А. Индекс Банаха — Сакса // Матем. сборник, 2004. Т. 195(2). С. 117—140.

[4] Rodin V.A., Semenov E.M. Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Mathematika. 1975. V. 1. P. 207—222.

[5] Bergh J., Lofstrom J. Interpolation Spaces. An introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1976.

[6] Асташкин С.В. Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера // ИЗВЕСТИЯ РАЕН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1(1). С. 18—35.

[7] Асташкин С.В. О пространстве мультипликаторов, порожденных системой Радемахера // Матем. заметки. 2004. Т. 75(2). С. 173—181.

[8] Никишин Е.М. Об одном свойстве сумм независимых величин // Матем. заметки. 1974. Т. 16(5). С. 703—707.

[9] Pisier G. De nouvelles caracterisations des ensembles de Sidon. Mathematical analysis and applications, Part B // Adv. in Math. Suppl. Stud. 1981. V. 7B. P. 686—725.

[10] Sparr G. Interpolation of weighted $L_p$-spaces // Studia Math. 1987. V. 62. P. 229—271.

[11] Astashkin S.V., Sukochev F.A., Semenov E.M. The Banach-Saks p-property // Mathematische Annalen. 2005. V. 332. P. 879—900.


Поступила в редакцию 25/*II*/2009;
в окончательном варианте — 25/*II*/2009.

# BANACH — SAKS INDEXES OF RADEMACHER SUBSPACES

© 2009 A.I. Novikova[3]

The paper is devoted to the study of subspaces of rearrangement invariant spaces, generated by Rademacher system, and to the calculation of their Banach — Saks indexes.

**Key words and phrases:** Rademacher system, rearrangement invariant space, Banach — Saks index.

Paper received 25/*II*/2009.
Paper accepted 25/*II*/2009.

[3]Novikova Anna Igorevna (annnovikova@mail.ru), Dept. of Function Theory and Geometry, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russia.