

УДК 533.6

КЛАССИФИКАЦИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ СТРУКТУР, ОПИСЫВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ АКУСТИКИ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ

© 2009 В.Г. Макарян¹, Н.Е. Молевич², Д.П. Порфирьев³

В работе рассматриваются аналитические и численные решения нелинейного уравнения акустики релаксирующей среды. Проведена полная классификация стационарных структур, описываемых этим уравнением.

Ключевые слова: ударная волна, стационарная структура, автоволна, устойчивость, неравновесная среда, релаксация, усиление звука, отрицательная дисперсия, отрицательная вязкость.

1. Предварительные сведения

В неравновесных средах (неизотермическая плазма, химически активные смеси с необратимыми реакциями, газы с неравновесным возбуждением колебательных состояний молекул) экспериментально наблюдается усиление акустических волн и модификация структуры ударных волн, в том числе ослабление или усиление ударной волны, ускорение ударной волны, уширение фронта, появление предвестников [1–10]. Полномасштабного объяснения этих явлений пока нет.

Как показано в [11–13], в средах со стационарно поддерживаемой неравновесностью изменение структуры слабой ударной волны может быть вызвано существенно новыми акустическими свойствами подобных сред, обусловленных знакопеременностью коэффициентов второй вязкости, дисперсии и газодинамической нелинейности. Структура слабой ударной волны,

¹Макарян Владимир Георгиевич (vmak@rambler.ru), кафедра физики Самарского государственного аэрокосмического университета, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

²Молевич Нонна Евгеньевна (molevich@fian.smr.ru), Самарский филиал Учреждения Российской академии наук Физического института им. П.Н. Лебедева РАН.

³Порфирьев Денис Петрович (dporfirev@rambler.ru), кафедра физики Самарского государственного аэрокосмического университета, Самарский филиал Учреждения Российской академии наук Физического института им. П.Н. Лебедева РАН.

распространяющейся в слабо неравновесном колебательно-возбужденном газе, исследовалась с помощью нелинейного акустического уравнения, полученного с точностью до величин второго порядка малости по амплитуде

$$C_{V\infty}\tau_0 \left(\hat{\rho}_{tt} - c_\infty^2 \hat{\rho}_{xx} - c_\infty^2 \Psi_\infty \hat{\rho}_{xx}^2 - \frac{\mu_\infty}{\rho_0} \hat{\rho}_{xxt} \right)_t + \\ + C_{V0} \left(\hat{\rho}_{tt} - c_0^2 \hat{\rho}_{xx} - c_0^2 \Psi_0 \hat{\rho}_{xx}^2 - \frac{\mu_0}{\rho_0} \hat{\rho}_{xxt} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Оно было получено в работе [14] для экспоненциальной модели релаксации

$$\frac{dE}{dt} = \frac{E_e(T) - E}{\tau(T, \rho)} + Q,$$

где E — колебательная энергия, $E_e(T)$ — ее значение в состоянии равновесия и в отсутствие источника, $\tau(T, \rho)$ — время VT релаксации, $Q = const$ — мощность источника накачки (например, электрическая накачка в разряде или оптическая накачка), поддерживающего стационарное неравновесное состояние, которое характеризуется степенью неравновесности

$$S = \frac{E_0 - E_{e0}}{T_0} = \frac{Q\tau(T_0, \rho_0)}{T_0}.$$

При этом использовалась простейшая модель теплоотвода, осуществляющегося с поступательных степеней свободы и мощность которого полагается равной мощности источника накачки.

В уравнении (1.1)

$$c_\infty = \sqrt{\frac{\gamma_\infty T_0}{M}}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{\gamma_0 T_0}{M}}, \quad \gamma_\infty = \frac{C_{P\infty}}{C_{V\infty}}, \quad \gamma_0 = \frac{C_{P0}}{C_{V0}}, \\ \Psi_\infty = \frac{\gamma_\infty + 1}{2}, \quad \Psi_0 = \frac{S\tau'(1+S)}{C_{P0}C_{V0}} + \frac{1+2C_{V0}}{2C_{V0}} - \frac{S\tau''(1+S)^2}{2C_{P0}C_{V0}^2}, \\ C_{V0} = C_{V\infty} + C_K + S\tau', \quad C_{P0} = C_{P\infty} + C_K + S(\tau' + 1), \\ S = \frac{E_0 - E_{e0}}{T_0} = \frac{Q\tau_0}{T_0}, \quad \tau' = \frac{T_0}{\tau_0} \left. \frac{\partial \tau}{\partial T} \right|_{T=T_0}, \quad \tau'' = \frac{T_0^2}{\tau_0} \left. \frac{\partial^2 \tau}{\partial T^2} \right|_{T=T_0}, \\ \mu_\infty = \frac{4\eta}{3} + \chi M \left(\frac{1}{C_{V\infty}} - \frac{1}{C_{P\infty}} \right), \quad \mu_0 = \frac{4\eta}{3} + \chi M \left(\frac{1}{C_{V0}} - \frac{1}{C_{P0}} \right).$$

Здесь $\hat{\rho} = \rho - \rho_0$ — возмущение плотности; ρ — плотность газа; c_∞, c_0 — высоко- и низкочастотная скорость звука; γ_∞, γ_0 — высоко- и низкочастотный показатели адиабаты; $C_{V0}, C_{P0}, C_{V\infty}, C_{P\infty}$ — низко- и высокочастотные теплоемкости в колебательно-возбужденном газе при постоянном объеме и давлении; T_0, ρ_0, τ_0 — невозмущенные значения температуры, плотности и времени релаксации; E_0, E_{e0} — стационарные значения величин E, E_e ; C_K — равновесная колебательная теплоемкость; μ_∞, μ_0 — высоко- и низкочастотный вязкостно-теплопроводностные коэффициенты; η, χ — коэффициенты сдвиговой вязкости и теплопроводности; Ψ_∞, Ψ_0 — высоко- и

низкочастотный коэффициент квадратичной нелинейности. Следует подчеркнуть, что коэффициент нелинейности Ψ_0 зависит от степени неравновесности S и может быть даже отрицательным. Впервые на это было обращено внимание в [15].

Для волн, бегущих в одном направлении, уравнение (1.1) при помощи замены координат $y = \theta t/\tau_0$, $\zeta = (x - c_\infty t)/c_\infty \tau_0$ преобразуется к безразмерному виду

$$(\tilde{\rho}_y + \Psi_\infty \tilde{\rho} \tilde{\rho}_\zeta - \eta_\infty \tilde{\rho}_\zeta)_\zeta - \nu \left(\tilde{\rho}_y + \frac{m}{2} \tilde{\rho}_\zeta + \tilde{\Psi}_0 \tilde{\rho} \tilde{\rho}_\zeta - \eta_0 \tilde{\rho}_\zeta \right) = 0, \quad (1.2)$$

где $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ — безразмерное возмущение плотности; $\eta_0 = \mu_0/2\tau_0 c_\infty^2 \rho_0$, $\eta_\infty = \mu_\infty/2\tau_0 c_\infty^2 \rho_0$, $\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0 \gamma_0/\gamma_\infty$.

Исследованию решений, описываемых уравнением (1.2), посвящены работы [11–13]. В них получены как численно, так и аналитически решения для ряда значений параметров уравнения. В настоящей работе проведена полная классификация стационарных решений уравнения (1.2) и всех типов эволюции различных начальных возмущений.

2. Стационарные структуры, описываемые акустическим уравнением

Путем масштабных преобразований переменных

$$\tilde{\rho} = \frac{|m|}{2\Psi_\infty} \rho', \quad \zeta = \frac{\zeta'}{|\nu|}, \quad y = \frac{2}{|\nu| |m|} y',$$

уравнение (1.2) сводится к следующему виду:

$$(\rho'_{y'} + \rho' \rho'_{\zeta'} - \eta'_\infty \rho'_{\zeta' \zeta'})_{\zeta'} - \nu' (\rho'_{y'} + m' \rho'_{\zeta'} + \Psi \rho' \rho'_{\zeta'} - \eta'_0 \rho'_{\zeta' \zeta'}) = 0, \quad (2.1)$$

где $\nu' = \text{sgn}(\nu)$, $m' = \text{sgn}(m)$, $\Psi = \tilde{\Psi}_0/\Psi_\infty$, $\eta'_\infty = \frac{2|\nu|\eta_\infty}{|m|}$, $\eta'_0 = \frac{2|\nu|\eta_0}{|m|}$. Данное уравнение содержит меньшее количество независимых параметров по сравнению с (1.2) и, соответственно, допускает более простую классификацию решений.

Преобразуем уравнение (2.1) к стационарной форме, используя автомодельную замену $z = \zeta' - w y'$, с последующим интегрированием по пространственной координате z :

$$\eta'_\infty \rho'_{zz} + \rho'_z (w - \nu' \eta'_0 - \rho') + \nu' (- (w - m') \rho' + \Psi \rho'^2/2) = -\nu' \Theta, \quad (2.2)$$

где w — скорость стационарной волны, а $-\nu' \Theta$ — константа интегрирования. Из (2.1) и (2.2) следует, что она пропорциональна потоку Θ величины $\int \rho' d\zeta'$ через сечение, движущееся со скоростью стационарной волны:

$$\Theta \equiv \frac{d}{dt} \int_{\zeta'_0}^{\infty} \rho' d\zeta', \quad (2.3)$$

где ζ'_0 — координата сечения.

При $\eta'_\infty \neq 0$ уравнение (2.2) не имеет аналитических решений. Однако в типичных газовых средах коэффициенты η'_∞ , η'_0 имеют значения порядка 10^{-5} , и их учет практически не сказывается на виде решений уравнения (2.2).

При $\eta'_\infty = 0$ уравнение (2.2) сводится к виду

$$\frac{d\rho'}{dz} = \frac{(\rho' - \rho'_1)(\rho' - \rho'_2)}{\sigma(\rho' - \rho'_s)}, \quad (2.4)$$

где

$$\sigma = 2/\nu'\Psi, \quad \rho'_s = w - \nu'\eta'_0, \quad (2.5)$$

а ρ'_1 и ρ'_2 удовлетворяют соотношениям:

$$\rho'_1 + \rho'_2 = \frac{2w - m'}{\Psi}, \quad \rho'_1\rho'_2 = \frac{2c}{\Psi\nu'}. \quad (2.6)$$

Решение уравнения (2.4) можно записать в неявном виде

$$z = z_0 + \sigma \left[\frac{\rho'_s - \rho'_2}{\rho'_1 - \rho'_2} \ln |\rho' - \rho'_2| + \frac{\rho'_1 - \rho'_s}{\rho'_1 - \rho'_2} \ln |\rho' - \rho'_1| \right]. \quad (2.7)$$

В случае, когда $\rho'_1 = \rho'_2$,

$$z = z_0 + \sigma \left[\frac{\rho'_s - \rho'_2}{\rho' - \rho'_2} + \ln |\rho' - \rho'_2| \right], \quad (2.8)$$

где z_0 — произвольная постоянная.

На рис. 2.1 представлены интегральные кривые уравнения (2.4) при различных соотношениях между ρ'_1 , ρ'_2 , ρ'_s и условии $\sigma > 0$. При $\sigma < 0$ интегральные кривые отличаются лишь направлением (получаются из интегральных кривых рис. 2.1 заменой z на $-z$). Положим в дальнейшем везде $\rho'_1 \geq \rho'_2$. Отсюда и из (2.6) следует условие на скорость волны:

$$\frac{w - m'/2}{\Psi} \geq \rho'_2. \quad (2.9)$$

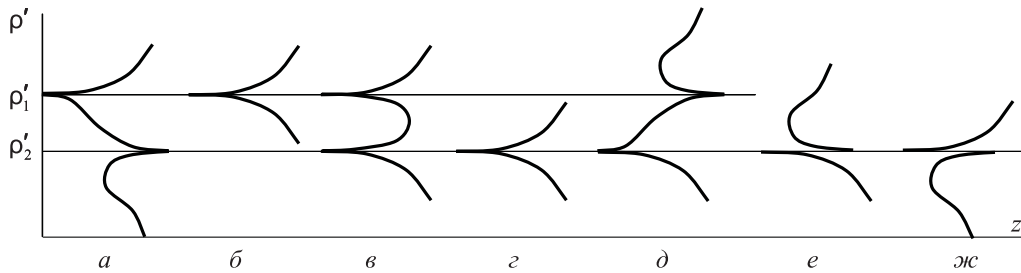


Рис. 2.1. Вид интегральных кривых уравнения (2.4) при различных соотношениях параметров ρ'_1 , ρ'_2 и ρ'_s :

- $a - \rho'_s < \rho'_2 < \rho'_1$; $б - \rho'_s = \rho'_2 < \rho'_1$; $в - \rho'_2 < \rho'_s < \rho'_1$; $г - \rho'_2 < \rho'_s = \rho'_1$;
 $д - \rho'_2 < \rho'_1 < \rho'_s$; $е - \rho'_2 = \rho'_1 < \rho'_s$; $жс - \rho'_s < \rho'_2 = \rho'_1$

Уравнение (2.4) допускает существование интегральных кривых восьми типов (с точностью до замены знака z), три из которых реализуются в конечном диапазоне значений параметров ρ'_1 , ρ'_2 , ρ'_s (рис. 2.1, а, в и д), а остальные являются вырожденными.

Как видно из уравнений (2.4) и (1.1), параметр ρ'_s не является независимым, он связан с ρ'_1 и ρ'_2 соотношением

$$\rho'_s = \Psi (\rho'_1 + \rho'_2) / 2 + m' / 2.$$

Таким образом, вид решения уравнения (2.4) определяется значениями ρ'_1 , ρ'_2 и Ψ и знаками величин ν и m .

Найдем решения уравнения (2.2), имеющие своими асимптотами ρ'_1 и ρ'_2 ($\rho'(\pm\infty) = \rho'_1, \rho'_2$). Такие решения могут состоять из асимптот, отрезков интегральных кривых и разрывов. При этом, ввиду положительности Ψ_∞ , разрывы могут быть только с переходом от большего значения ρ' к меньшему (при переходе через разрыв слева направо) [16]. Величина разрыва связана со скоростью волны w следующим соотношением:

$$\rho'_L + \rho'_R = 2(w - \nu'\eta'_0) = 2\rho'_s, \quad (2.10)$$

где ρ'_L, ρ'_R — значения ρ' слева и справа от разрыва.

Из соотношения (2.10) следует, что решения с разрывами могут существовать только при выполнении следующего условия:

$$\rho'_L > \rho'_s > \rho'_R.$$

С учетом этого условия возможно существование только 10 решений с разрывами: по пять при $\sigma > 0$ (рис. 2.2, а–д) и $\sigma < 0$ (рис. 2.2, е–и и в).

Рассмотрим решения с разрывами при $\sigma > 0$.

1. Волна с плавным повышением плотности за фронтом (рис. 2.2, б), с разрывом на средней ветви интегральной кривой на рис. 2.1, в. В этом случае $\rho'_R = \rho'_2$, величина разрыва определяется соотношением $\rho'_L = \Psi\rho'_1 + (\Psi - 1)\rho'_2 + m' - \nu'\eta'_0$, а скорость равна $w = (\Psi(\rho'_1 + \rho'_2) + m')/2$. Данное решение существует при условии $\rho'_L < \rho'_1$, что сразу дает условие $\rho'_1 < \rho'_{cr1} \equiv (m' - \nu'\eta'_0)/(1 - \Psi) - \rho'_2$ при $\Psi - 1 > 0$ и $\rho'_1 > \rho'_{cr1}$ при $\Psi - 1 < 0$.

2. При условии $\rho'_1 = \rho'_{cr1}$ предыдущая стационарная волна превращается в ступеньку с $\rho'_L = \rho'_1$ и $\rho'_R = \rho'_2$ (рис. 2.2, в).

3. При условии $\rho'_1 > \rho'_{cr1}$ при $\Psi - 1 > 0$ и $\rho'_1 < \rho'_{cr1}$ при $\Psi - 1 < 0$ становится возможным существование волны с плавным уменьшением плотности за фронтом, показанной на рис. 2.2, г, она включает в себя верхнюю ветвь интегральной кривой на рис. 2.1, в и разрыв до асимптоты ρ'_1 . Величина разрыва определяется тем же соотношением, что и в случае 2.

4. При $\rho'_s = \rho'_1$ существует стационарная волна в виде ударного импульса (рис. 2.2, д), соответствующая разрыву на верхней ветви интегральной кривой на рис. 2.1, г. Амплитуда импульса равна $\rho'_i \equiv \rho'_L - \rho'_R = 2(\rho'_1 - \rho'_2) = 2(m' - 2\rho'_2)/(2 - \Psi)$, а его скорость $w_i = (\Psi\rho'_2 + m' - \Psi\nu'\eta'_0)/(2 - \Psi)$.

Рассмотрим теперь решения с разрывами при $\sigma < 0$.

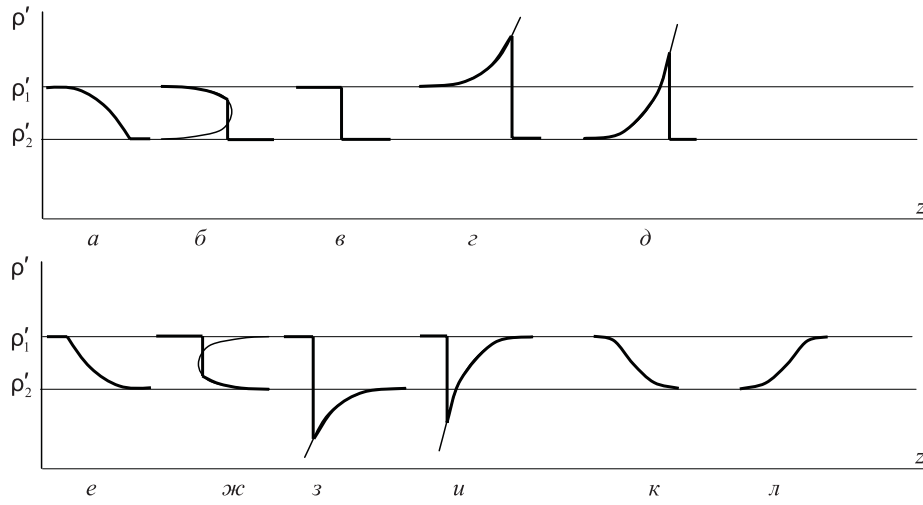


Рис. 2.2. Стационарные решения уравнения

5. Волна с плавным повышением плотности перед фронтом (рис. 2.2, *ж*), с разрывом на средней ветви интегральной кривой на рис. 2.1, *в* (с учетом инверсии оси z). В этом случае $\rho'_L = \rho'_1$, величина разрыва определяется соотношением $\rho'_R = \Psi\rho'_2 + (\Psi - 1)\rho'_1 + m' - \nu'\eta'_0$, а скорость равна $w = (\Psi(\rho'_1 + \rho'_2) + m')/2$. Данное решение существует при условии $\rho'_R > \rho'_2$, что сразу дает условие $\rho'_1 > \rho'_{cr2} \equiv (m' - \nu'\eta'_0)/(1 - \Psi) - \rho'_2$ при $\Psi - 1 > 0$ и $\rho'_1 < \rho'_{cr2}$ при $\Psi - 1 < 0$.

6. При условии $\rho'_1 = \rho'_{cr2}$ предыдущая стационарная волна превращается в ступеньку с $\rho'_L = \rho'_1$ и $\rho'_R = \rho'_2$ (рис. 2.2, *в*).

7. При условии $\rho'_1 < \rho'_{cr2}$ при $\Psi - 1 > 0$ и $\rho'_1 > \rho'_{cr2}$ при $\Psi - 1 < 0$ становится возможным существование волны с плавным уменьшением плотности перед фронтом, показанной на рис. 2.2, *з*, она включает в себя нижнюю ветвь интегральной кривой на рис. 2.1, *в* и разрыв до асимптоты ρ'_1 . Величина разрыва определяется тем же соотношением, что и в случае 5.

8. При $\rho'_s = \rho'_2$ существует стационарная волна в виде ударного импульса разрежения (рис. 2.2, *и*), соответствующая разрыву на нижней ветви интегральной кривой на рис. 2.1, *б*. Амплитуда импульса равна $-\rho'_i$, а его скорость $-w_i$.

Решения без разрывов в виде волн перепада, показанные на рис. 2.2, *а*, *к* и *л*, реализуются в следующих случаях.

9. При положительном коэффициенте σ существует волна с плавным повышением плотности за фронтом (рис. 2.2, *а*), соответствующая слабому разрыву на нижней ветви интегральной кривой при $\rho'_s = \rho'_2$ (рис. 2.1, *б*). В этом случае $\rho'_L = \rho'_R = \rho'_2$, и скорость волны равна $w = \rho'_2 + \nu'\eta'_0$. Данное решение существует при условии $\rho'_1 = \frac{(2-\Psi)\rho'_2 - m' + 2\nu'\eta'_0}{\Psi}$.

10. При отрицательном коэффициенте σ существует волна с плавным повышением амплитуды перед фронтом (рис. 2.2, *е*), соответствующая

слабому разрыву на верхней ветви интегральной кривой при $\rho'_s = \rho'_1$ (рис. 2.1, z при инверсии оси z). В этом случае $\rho'_L = \rho'_R = \rho'_1$, и скорость волны равна $w = \rho'_1 + \nu'\eta'_0$. Данное решение существует при условии $\rho'_2 = \frac{(2-\Psi)\rho'_1 - m' + 2\nu'\eta'_0}{\Psi}$.

11. Решение в виде волны перепада с плавным нарастанием амплитуды (рис. 2.2, κ) реализуется как средняя ветвь интегральной кривой при условии $\rho'_s < \rho'_2$, если $\sigma > 0$ и $\rho'_1 < \rho'_s$, если $\sigma < 0$.

12. Решение в виде волны перепада с плавным убыванием амплитуды (рис. 2.2, λ) реализуется как средняя ветвь интегральной кривой при условии $\rho'_s < \rho'_2$, если $\sigma < 0$ и $\rho'_1 < \rho'_s$, если $\sigma > 0$.

3. Нестационарная эволюция волн

Для удобства численного моделирования исходное уравнение (2.1), которое содержит частные производные до третьего порядка включительно, было представлено в виде системы двух уравнений второго порядка:

$$f_{\zeta'} - \nu' f = \varphi, \quad (3.1)$$

$$\rho'_{y'} + \rho' \rho'_{\zeta'} - \eta'_{\infty} \rho'_{\zeta'} = f, \quad (3.2)$$

где введено обозначение

$$\varphi = \nu' \left[\frac{m'}{2} \rho'_{\zeta'} - (1 - \Psi) \rho' \rho'_{\zeta'} + (\eta'_{\infty} - \eta'_0) \rho'_{\zeta'} \right]. \quad (3.3)$$

Первое из этих уравнений для заданной функции $\varphi(\zeta', y')$ интегрируется в явном виде:

$$f = - \int_{\zeta'}^{\infty} \varphi(x) e^{-\nu'(x-\zeta')} dx.$$

Соответственно для сеточной функции $f_i^j \equiv f(\zeta' = hi, y' = \tau j)$ имеем

$$f_{i\pm 1}^j = e^{\pm \nu' h} \left[f_i^j \pm \frac{\varphi_i^j + \varphi_{i\pm 1}^j e^{\mp \nu' h}}{2} h \right], \quad (3.4)$$

где $\varphi_i^j \equiv \varphi(\zeta' = hi, y' = \tau j)$ с учетом соотношения (3.3) было представлено в виде

$$\varphi_i^j = \nu' \left[\left(\frac{m'}{2} - (1 - \Psi) \rho_i^j \right) \frac{\rho_{i+1}^j - \rho_{i-1}^j}{2h} + (\eta'_{\infty} - \eta'_0) \frac{\rho_{i+1}^j - 2\rho_i^j + \rho_{i-1}^j}{h^2} \right], \quad (3.5)$$

здесь

$$\rho_i^j \equiv \rho'(\zeta' = hi, y' = \tau j).$$

Для устойчивости вычислений по формуле (3.4) необходимо, чтобы в процессе счета ошибки округления убывали. Это возможно при условии, что множитель $e^{\pm \nu' h}$ не превосходит единицы. Поэтому при $\nu' > 0$ счет по

формуле (3.4) производился справа налево, т. е. в (3.4) выбирался нижний знак, а при $\nu' < 0$ — наоборот.

Для решения уравнения (3.2) использовалась неявная трехточечная схема с порядком аппроксимации

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^{j+1} + \rho_i^j}{\tau} + \frac{1}{2} \left[\rho_i^j \frac{\rho_{i+1}^{j+1} - \rho_{i-1}^{j+1}}{2h} + \rho_i^{j+1} \frac{\rho_{i+1}^j - \rho_{i-1}^j}{2h} \right] - \\ - \frac{\eta'_\infty}{2} \left[\frac{\rho_{i+1}^{j+1} - 2\rho_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\rho_{i+1}^j - 2\rho_i^j + \rho_{i-1}^j}{h^2} \right] = f_i^j. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для численного решения системы (3.1), (3.2) использовался следующий алгоритм. По формуле (3.5) находились значения правой части уравнения (3.1). Затем по формуле (3.4) находились значения f_i^j и подставлялись в правую часть уравнений (3.6). Наконец, неизвестные значения плотности на верхнем временном слое ρ_i^{j+1} находились путем решения системы (3.6) методом прогонки.

В работе исследована эволюция начального возмущения в форме ступеньки с амплитудой ρ'_1 (при условии $\rho'_2 = 0$) в неравновесном газе при различных знаках дисперсии m и низкочастотного коэффициента нелинейности Ψ_0 . При этом в зависимости от величины ρ'_1 имеют место следующие типы эволюции начального возмущения.

При выполнении условия $\rho'_1 > \rho'_{cr1}$ начальное возмущение в виде ступеньки в процессе эволюции стремилось к стационарной структуре с плавным нарастанием амплитуды за скачком уплотнения (рис. 2.2, б). Скорость и амплитуда и форма получаемой структуры полностью совпадают с ранее полученными из аналитического решения стационарного уравнения акустики релаксирующей среды.

При выполнении условий $\rho'_i/2 < \rho'_1 < \rho'_{cr1}$ начальное возмущение эволюционировало в стационарную структуру детонационного типа с плавным убыванием амплитуды за скачком уплотнения (рис. 2.2, в).

При $\rho'_1 < \rho'_i/2$ "ступенька" становилась неустойчивой и распадалась на последовательность стационарных импульсов (рис. 3.1, а). Амплитуда стационарного импульса ρ_i совпадает с ранее полученным соотношением.

Импульс имеет экспоненциальный задний фронт, описываемый зависимостью:

$$\rho'(\zeta') = \rho'_i \exp [(\zeta' - \zeta'_0)/\sigma],$$

где ζ'_0 — координата переднего фронта. Ширина его переднего фронта $\sim \eta_\infty$. Полученный импульс является автоволной, т. к. его амплитуда, скорость и форма определяются только параметрами неравновесной среды.

Как показано на рис. 3.1, б, тот же автоволновой импульс возникает и при эволюции возмущения типа локализованного импульса с профилем близким к $\rho'(\zeta') = a \exp(-\zeta'^2)$. При этом получен еще один класс стационарных автоволновых решений — периодическая волна с ненулевым средним, амплитуда и период которой также не зависят от амплитуды или площа-

ди начального возмущения. Более подробно структура периодических автоволн будет рассмотрена в следующей части работы.

При отрицательном значении параметра σ эволюция локализованного импульса приводила к образованию структуры, показанной на рис. 3.1, в, состоящей из распространяющейся впереди периодической автоволны и следующей за ней серии автоволновых импульсов разрежения (рис. 2.2, и). Как легко заметить, такая структура отличается от структуры, полученной при $\sigma > 0$, только одновременной заменой знака у ζ' и ρ' .

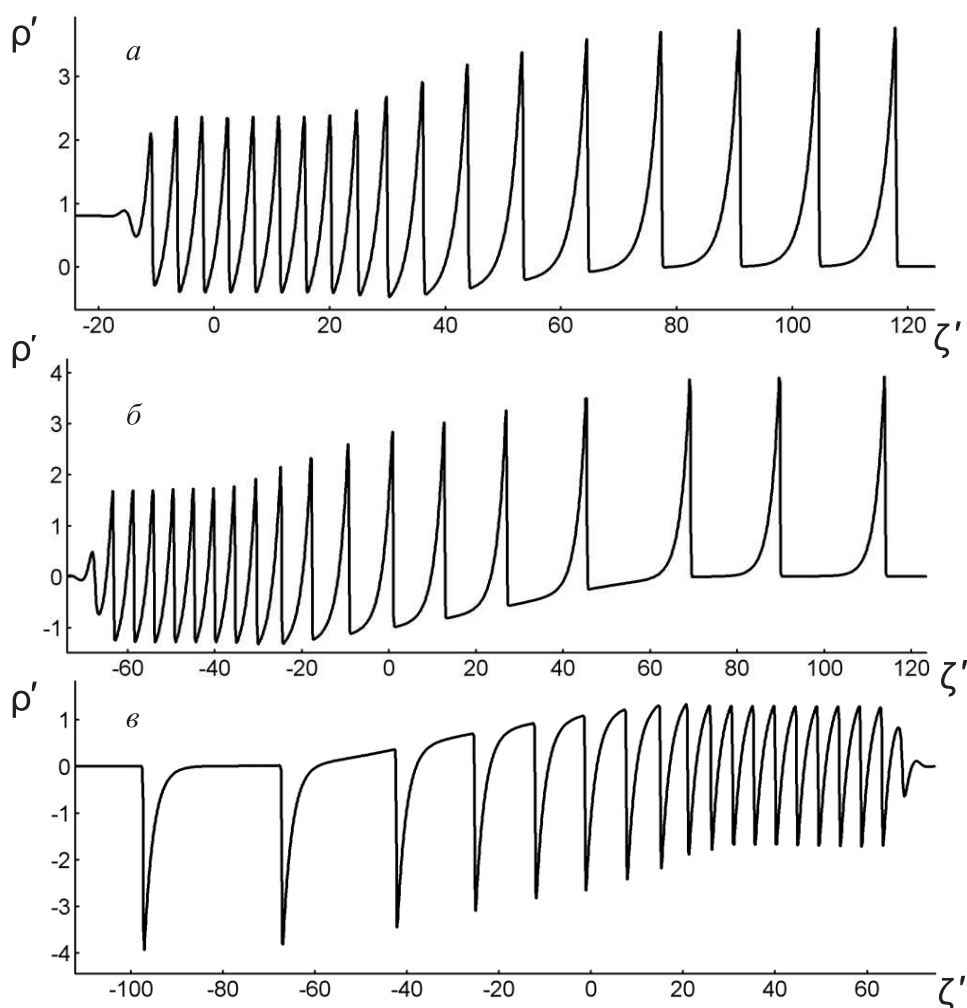


Рис. 3.1. Одна из стадий распада ударной волны малой амплитуды (а) и локализованного импульса (б, в) на автоволновые импульсы и периодическую автоволну:

$$a, б - \sigma > 0, m' = 1; в - \sigma < 0, m' = -1$$

При $\Psi < 0$ возможно три новых режима эволюции начального возмущения типа "ступенька" с амплитудой ρ'_1 .

При выполнении условия $\rho'_1 > \rho'_{cr}$ начальное возмущение в процессе эволюции превращалось в следующую нестационарную структуру: впереди распространяется стационарная автоволна в форме ступеньки с амплитудой ρ'_{cr1} . За ней распространяется постепенно расширяющаяся волна сжатия.

При выполнении условия $\rho'_{cr1} > \rho'_1 > \rho'_i/2$ начальное возмущение эволюционировало в структуру, состоящую из двух стационарных волн: автоволновой ступеньки с амплитудой ρ'_{cr1} и стационарной ударной волны разрежения с плавным убыванием амплитуды от ρ'_{cr1} до ρ'_2 . Волна разрежения движется со скоростью $w_r = \rho_{cr1}/2 + \Psi\rho'_1/2$, автоволновая ступенька со скоростью $w = \rho'_{cr1}/2$. Так как $\Psi < 0$, то $w_r < w$, и ударная волна разрежения постепенно отстает от ступеньки.

4. Периодические автоволны

Как уже было отмечено выше, в большинстве газовых неравновесных сред коэффициенты η_∞ , η_0 малы и слабо влияют на вид решения. Положим в уравнении (2.1) $\eta_\infty = \eta_0 = 0$, $\nu' = +1$, $m' = +1$, при этом оно примет вид

$$(\rho'_{y'} + \rho'\rho'_{\zeta'})_{\zeta'} - (\rho'_{y'} + \rho'_{\zeta'} + \Psi\rho'\rho'_{\zeta'}) = 0,$$

зависящий только от одного параметра Ψ . Таким образом, периодическую автоволну (рис. 3.1, б) можно в первом приближении считать зависящей только от одного параметра Ψ .

Профиль периодической волны описывается выражением

$$\rho' = \rho'_1 + (\rho'_R - \rho'_1) \exp(\Psi(\zeta' - \zeta'_0)/2),$$

где ζ'_0 — координата скачка уплотнения. Значения "плотности" на разрыве ρ'_L и ρ'_R связаны со скоростью волны w соотношением (2.10), а между собой выражением

$$\rho'_L = \rho'_1 + (\rho'_R - \rho'_1) \exp(\Psi\lambda'/2), \quad (4.1)$$

следующим из выражения для профиля автоволны. Здесь λ' — длина одного периода.

В ходе численного моделирования эволюции периодической автоволны установлено, что в процессе эволюции хвост автоволны периодически восстанавливает свою форму с периодом T (рис. 4.1):

$$\rho'(\zeta', y') = \rho'(\zeta' + w'T, y' + T).$$

При этом он сдвигается назад на расстояние $w'T$, а скачки уплотнения сдвигаются на wT вперед, и возникает новый экспоненциальный участок. В соответствии с (2.3) поток "массы" через скачок равен Θ . В силу сохранения полной "массы" суммарный поток "массы" через скачок за период T равен площади под одним периодом кривой $\rho'(\zeta')$:

$$-\Theta T = \int_0^{\lambda'} \rho'(\zeta') d\zeta'. \quad (4.2)$$

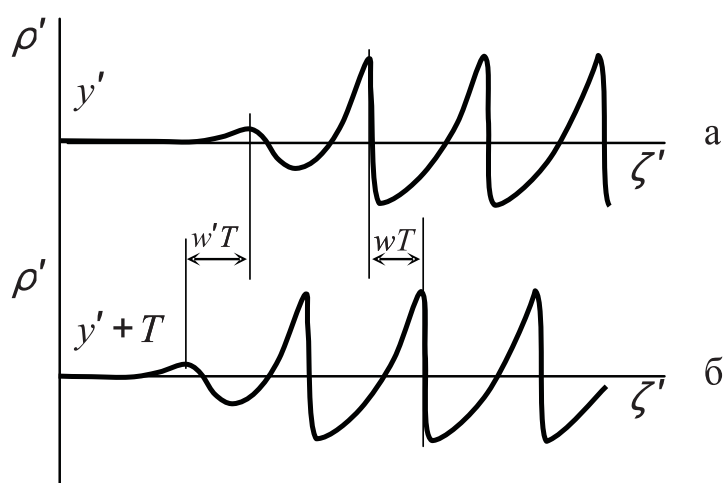


Рис. 4.1. Периодическое во времени восстановление формы "хвоста" автоволны

Численное решение уравнения (2.2) при различных начальных локализованных условиях и при различных значениях Ψ показало, что величины w' и T не зависят от величины Ψ . Для них получены следующие значения: $w' \approx 1$, $T \approx 3,17$ (при численном моделировании невозможно положить вязкостно-теплопроводный коэффициент η_∞ равным нулю. Полученные значения периода T зависели от величины η_∞ : при $\eta_\infty = 0,01$, $T = 3,21$; при $\eta_\infty = 0,001$, $T = 3,17$).

Решая совместно систему алгебраических уравнений (2.5), (2.6), (2.10), (4.1) и (4.2) с полученными при моделировании числовыми значениями w' и T , получим зависимость скорости w (рис. 4.2) от параметра Ψ .

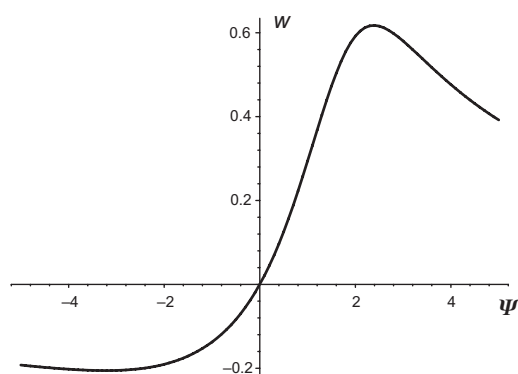


Рис. 4.2. Зависимость скорости автоволны w от параметра нелинейности Ψ

Заключение

С помощью исследования интегральных кривых нелинейного акустического уравнения, записанного в автомодельной форме, проведена класси-

фикация его решений. Найдено семь типов разрывных решений и четыре решения с плавным фронтом (волны перепада). Численным моделированием неавтономной формы акустического уравнения подтверждена эволюционная устойчивость всех полученных структур. Наиболее интересными для физических приложений являются автоволновые решения исследуемого уравнения: импульсы сжатия и разрежения, форма которых описывается аналитической зависимостью, а также периодическая автоволна.

Эта работа частично поддержана НИР ГР 01200805605, аналитической целевой программой Министерства образования и науки РФ "Развитие научного потенциала высшей школы" (2009–2010 гг.), проект 2.1.1/309 и НК-410П(10) Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы.

Литература

- [1] Распространение ударных волн в нестационарном тлеющем разряде / А.И. Климов [и др.] // Письма ЖТФ. 1989. Т. 15. № 20. С. 31–36.
- [2] Басаргин И.В., Мишин Г.И. Предвестник ударной волны в плазме тлеющего разряда // Письма ЖТФ. 1989. Т. 15. № 8. С. 55–60.
- [3] Быстров С.А., Иванов В.И., Шугаев Ф.В. Распространение плоской ударной волны в слабоионизованной плазме // Физика плазмы. 1989. Т. 15. № 5. С. 558–562.
- [4] Гридин А.Ю., Климов А.И., Молевич Н.Е. Распространение ударных волн в плазме тлеющего разряда // ЖТФ. 1993. Т. 63. № 3. С. 157–162.
- [5] Гридин А.Ю., Климов А.И. Структура ударной волны в неравновесной плазме (выделение энергии, запасенной в разрядной плазме за ударной волной) / А.Ю. Гридин // Хим. физика. 1993. Т. 12. № 3. С. 363–365.
- [6] Ganguly B.N., Bletzinger P., Garscadden A. Shock wave damping and dispersion in nonequilibrium low pressure argon plasmas // Phys. Lett. A. 1997. V. 230. № 3. P. 218–222.
- [7] Macheret S.O. Shock wave propagation and dispersion in glow discharge plasmas // Phys. Fluids. 2001. V. 13. P. 2693–2705.
- [8] Klimov A.I., Bityurin V., Serov Yu. Nonthermal approach in plasma aerodynamics // AIAA Paper. 2001. № 0348.
- [9] Molevich N.E., Klimov A. I., Makaryan V. G. Influence of thermodynamical non-equilibrium on acoustical properties of gases // Intern. J. Aeroacoustics. 2005. V. 4. № 3–4. P. 345–355.
- [10] Bletzinger P. Plasmas in high speed aerodynamics // J. Phys. D: Appl. Phys. 2005. V. 38. № 4. P. R33–R57.
- [11] Макарян В.Г., Молевич Н.Е. Структура газодинамического возмущения в термодинамически неравновесной среде с экспоненциальной моделью релаксации // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 181–191.

- [12] Макарян В.Г., Молевич Н.Е. Новые стационарные структуры в акустически активной среде // Письма ЖТФ. 2003. Т. 29. № 18. С. 11–15.
- [13] Макарян В.Г., Молевич Н.Е. Слабые ударные волны в неравновесных средах с отрицательной дисперсией // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 6. С. 13–18.
- [14] Молевич Н.Е. Нелинейные уравнения в теории сред с отрицательной второй вязкостью // Сибирский физико-технический журнал. 1991. № 1. С. 133–136.
- [15] Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Ударные волны разрежения в неравновесном колебательно-возбужденном газе // Акустический журнал. 1993. Т. 39. № 5. С. 951–954.
- [16] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Поступила в редакцию 29/V/2009;
в окончательном варианте — 29/V/2009.

THE CLASSIFICATION OF GAS-DYNAMIC STRUCTURES DESCRIBED BY THE NONLINEAR ACOUSTICAL EQUATION OF A RELAXING MEDIUM

© 2009 V.G. Makaryan,⁴ N.E. Molevich,⁵ D.P. Porfiriev⁶

Analytical and numerical solutions of a nonlinear acoustical equation of a relaxing medium are considered. The full classification of the stationary structures described by this equation is given.

Key words: shock wave, stationary structure, self-sustained wave, stability, nonequilibrium medium, relaxation, sound amplification, negative dispersion, negative viscosity.

Paper received 29/V/2009.

Paper accepted 29/V/2009.

⁴Makaryan Vladimir Georgievich (vmak@rambler.ru), Dept. of Physics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russia.

⁵Molevich Nonna Evgenievna (molevich@fian.smr.ru), Samara Branch of the Russian Academy of Sciences of the Physical Institute P.N. Lebedev by name, Russian Academy of Sciences.

⁶Porfiriev Denis Petrovich (dporfiriev@rambler.ru), Dept. of Physics, Samara State Aerospace University, Samara Branch of the Russian Academy of Sciences of the Physical Institute P.N. Lebedev by name, Russian Academy of Sciences.