УДК 517.4+519.71

О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО СПЕКТРУ

© 2009 Н.Ф. Валеев, С.А. Рабцевич, Э.Р. Нугуманов[1]

Рассматривается новая постановка обратной спектральной задачи о восстановлении коэффициентов граничных условий оператора Штурма-Лиувилля на отрезке. Доказаны теоремы существования и изолированности решений данной задачи, предложен алгоритм численного решения.

Ключевые слова: идентификация граничных условий динамической системы; обратная спектральная задача; существование, изолированность и устойчивость решения; алгоритмы численного решения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим на интервале (0,1) регулярный дифференциальный оператор

$$S(\lambda)y = (a(x)y^{'})^{'} + (\lambda b(x) + c(x))y = 0 \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$y^{'}(0,\lambda) + (p_1 + p_2\lambda)y(0,\lambda) = 0, \tag{1.2}$$

$$-y^{'}(1,\lambda) + (p_3 + p_4\lambda)y(1,\lambda) = 0. \tag{1.3}$$

Относительно коэффициентов $a(x), b(x), c(x)$ будем предполагать, что

$$a(x) > 0,\ a(x) \in C^1[0;1],\ b(x) \neq 0,\ c(x),\ b(x) \in C\,[0;1]. \tag{1.4}$$

Суть прямой спектральной задачи для оператора $S(\lambda)$ состоит в нахождении таких значений спектрального параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения $y(\lambda, x)$ краевой задачи (1.1)–(1.3). В силу наложенных на коэффициенты $a(x), b(x)$ и $c(x)$ условий (1.4) собственные значения λ оператора $S(\lambda)$ образуют дискретное множество точек с единственной точкой сгущения на бесконечности. При этом собственные значения

[1]Валеев Нурмухамет Фуатович (valeevnf@yandex.ru), Рабцевич Сергей Александрович (rabtsevichsa@rambler.ru), Нугуманов Эдуард Римович (eduard-nugumanov@yandex.ru), кафедра дифференциальных уравнений Башкирского государственного университета, 450074, Россия, г. Уфа, ул. З. Валиди, 32.

λ_k являются аналитическими функциями от параметров p_k, $k = \overline{1,4}$. Также можно показать, что при вышеперечисленных условиях и, если $p_j \in R$, собственные значения также вещественны ([1]).

К краевой задаче (1.1)–(1.3) сводятся некоторые модели, описывающие динамику линейных колебаний стержня, струны, линий электропередач с соответтствующими граничными условиями. В качестве примера рассмотрим задачу об электрических колебаниях в протяженной линии. Она сводится к нахождению решений телеграфного уравнения

$$i_{tt} = a^2 i_{xx}, \; x \in (0; l),$$

удовлетворяющих следующим граничным условиям:

$$i_x(0,t) = CL_0 i_{tt}(0,t) + \frac{C}{C_0} i(0,t),$$

$$-i_x(l,t) = C\widetilde{L}_0 i_{tt}(l,t) + \frac{C}{\widetilde{C}_0} i(l,t).$$

Граничные условия описывают ситуацию, когда левый конец провода длины l заземлен через сосредоточенную самоиндукцию L_0 и емкость C_0, соединенные последовательно, а правый — через сосредоточенную самоиндукцию $\widetilde{L}_0$ и емкость $\widetilde{C}_0$. Далее для определенности будем считать $l = 1$.

Данная динамическая система обладает собственными колебаниями, которые описываются собственными значениями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x,\lambda) + q(x)y(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda), \tag{1.5}$$

$$y'(0,\lambda) - (p_1 + p_2\lambda)y(0,\lambda) = 0, \tag{1.6}$$

$$y'(1,\lambda) + (p_3 + p_4\lambda)y(1,\lambda) = 0, \tag{1.7}$$

где $p_1 = \frac{C}{C_0}$, $p_2 = -\frac{L_0}{L}$, $p_3 = \frac{C}{\widetilde{C}_0}$, $p_4 = -\frac{\widetilde{L}_0}{L}$, C и L — коэффициенты емкости и самоиндукции, рассчитанные на единицу длины провода.

Исходя из физического смысла задачи, коэффициенты p_1, p_2, p_3, p_4 должны быть вещественными, более того, $p_1 \geqslant 0$, $p_3 \geqslant 0$ и $p_2 \leqslant 0$, $p_4 \leqslant 0$.

Теперь сформулируем обратную спектральную задачу для оператора Штурма-Лиувилля(1.5)–(1.7).

Пусть известно, что $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ *являются собственными значениями задачи (1.5)–(1.7). Требуется найти возможные значения* $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ *коэффициентов граничных условий (1.6) и (1.7).*

Нас будут интересовать условия существования решений данной задачи; условия изолированности и устойчивости решений относительно малых возмущений собственных значений и коэффициентов исходного уравнения.

2. Связь с многопараметрическими обратными спектральными задачами

В работе [2] описан специальный класс обратных спектральных задач — многопараметрические обратные спектральные задачи (МПОСЗ). Эти задачи имеют многочисленные приложения, в частности, в теории идентификации и диагностики линейных объектов по собственным колебаниям. Для исследования МПОСЗ нами разработаны алгебраические методы, основанные на мультиспектральной теории операторов ([3]). В связи с этим покажем, что сформулированную выше обратную спектральную задачу можно свести к МПОСЗ.

Обозначим через $U(x,\lambda)$ и $V(x,\lambda)$ линейно независимые решения уравнения (1.1), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$U(0,\lambda)=1;\ U^{'}(0,\lambda)=0;\ V(0,\lambda)=0;\ V^{'}(0,\lambda)=1. \tag{2.1}$$

Тогда любое решение краевой задачи (1.1)–(1.3) можно представить в виде

$$y(x,\lambda)=C_1(\lambda,\vec{p})U(x,\lambda)+C_2(\lambda,\vec{p})V(x,\lambda). \tag{2.2}$$

Заметим, что $U(x,\lambda)$ и $V(x,\lambda)$ от $\vec{p}$ не зависят. Теперь, подставляя (2.2) в граничные условия (1.2) и (1.3) и учитывая (2.1) для векторов $\vec{C}(\lambda)=$ $=(C_1(\lambda,\vec{p});C_2(\lambda,\vec{p}))$, получим векторно-матричное уравнение:

$$B(\lambda,\vec{p})\vec{C}=0, \tag{2.3}$$

где

$$B(\lambda,\vec{p})=$$

$$=\begin{pmatrix} p_1+\lambda p_2 & 1 \\ -U^{'}(1,\lambda)+(p_3+\lambda p_4)U(1,\lambda) & -V^{'}(1,\lambda)+(p_3+\lambda p_4)V(1,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$B_0(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U^{'}(1,\lambda) & -V^{'}(1,\lambda) \end{pmatrix};\ B_1(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_2(\lambda)=\lambda B_1(\lambda);\ B_3(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U(1,\lambda) & V(1,\lambda) \end{pmatrix};$$

$$B_4(\lambda)=\lambda B_3(\lambda)$$

и представим уравнение (2.3) в виде

$$B(\vec{p},\lambda)\vec{C}(\lambda)=\left[B_0(\lambda)+\sum_{k=1}^{4}p_kB_k(\lambda)\right]\vec{C}=0. \tag{2.4}$$

Очевидно, что теперь решение задачи сводится к решению системы уравнений

$$B(\vec{p},\lambda_k)\vec{C}(\lambda_k)=0,\ k=\overline{1,4}. \tag{2.5}$$

Таким образом, исходная задача сведена к стандартной постановке МПОСЗ.

В данной системе уравнений, вообще говоря, неизвестными являются величины $p_k, k = \overline{1,4}$ и векторы $\vec{C}(\lambda_k), k = \overline{1,4}$, всего восемь неизвестных. Но поскольку нас интересуют только величины p_k, то систему (2.5) можно заменить на эквивалентную

$$det(B(\vec{p}, \lambda_k)) = 0, k = \overline{1,4}. \tag{2.6}$$

Каждое уравнение системы (2.6) является алгебраическим уравнением второй степени относительно коэффициентов p_k. Это в свою очередь означает, что для (2.6) возможны следующие случаи: система не имеет решений; система имеет бесконечно много решений (неизолированные решения) и система имеет конечное число изолированных решений [4]. Поскольку данная задача явяется прежде всего прикладной, то решения этой МПОСЗ должны быть устойчивыми к возмущениям коэффициентов матриц $B_k(\lambda)$ и собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, что возможно только для изолированных решений.

Заметим, что в случае изолированности решений системы нелинейных алгебраических уравнений известна точная оценка количества решений, а именно оно равно m^n, где m — порядок уравнения, n — количество неизвестных [4]. Поэтому для рассматриваемой задачи соответствующая система имеет не более 16 изолированннных решений. Для решения сформулированной обратной спектральной задачи можно воспользоваться методом, изложенным в [2]. Несмотря на универсальность, у этого метода имеется недостаток. Он заключается в численной неустойчивости соответствующих методов для некоторых классов МПОСЗ. С другой стороны, задача (1.5)–(1.7) обладает интересным свойством, а именно λ_k монотонно зависят от параметров p_j. В связи с этим мы предлагаем новый метод численного построения всех векторов $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ из заданной области.

3. Изолированность решений

В данном пункте сформулированы достаточные условия изолированности решений. Принимая обозначения (2.1) и (2.2), введем в рассмотрение следующие функции:

$$\mathbf{f_1}(\lambda_\mathbf{k}; \lambda_\mathbf{j}; \lambda_\mathbf{i}) = \mathbf{det} \begin{pmatrix} V'(1,\lambda_k) & V(1,\lambda_k) & \lambda_k^2 V(1,\lambda_k) \\ V'(1,\lambda_j) & V(1,\lambda_j) & \lambda_k^2 V(1,\lambda_j) \\ V'(1,\lambda_i) & V(1,\lambda_i) & \lambda_k^2 V(1,\lambda_i) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f_2}(\lambda_\mathbf{k}; \lambda_\mathbf{j}; \lambda_\mathbf{i}) = \mathbf{det} \begin{pmatrix} U(1,\lambda_k) & V(1,\lambda_k) & \lambda_k^2 V(1,\lambda_k) \\ U(1,\lambda_j) & V(1,\lambda_j) & \lambda_k^2 V(1,\lambda_j) \\ U(1,\lambda_i) & V(1,\lambda_i) & \lambda_k^2 V(1,\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пусть $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $\lambda_k \neq \lambda_j$,при $i \neq k$ — спектральные данные обратной спектральной задачи, тогда, если

$$f_1(\lambda_k; \lambda_j; \lambda_i) \neq 0 \tag{3.1}$$

и

$$f_2(\lambda_k; \lambda_j; \lambda_i) \neq 0, \tag{3.2}$$

то все решения обратной спектральной задачи изолированы.

Доказательство.

Предположим, что обратная спектральная задача имеет неизолированные решения. Это означает, что при фиксированном собственном значении $\vec{\lambda}$ хотя бы одна из компонент вектора $\vec{p}$ должна принимать значения из некоторого непрерывного интервала. Указанную компоненту вектора $\vec{p}$ обозначим через z. В этом случае остальные координаты вектора $\vec{p}$ можно выразить через z как алгебраические функции. Тогда из системы (2.6) следует, что существует алгебраическая вектор-функция $\vec{p}(z)$ такая, что $det(B(\vec{p}(z), \lambda_k)) = 0$, $k = \overline{1,4}$ при любых $z \in C$, за исключением дискретного множества (см.[4]).

Известно, что у алгебраической функции существует хотя бы одна особая точка (учитывая $z = \infty$), в окрестности которой она не ограничена, указанную точку обозначим z^*. Теперь обозначим $\rho_1(z) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ и $\rho_2(z) = \sqrt{p_3^2 + p_4^2}$ и исследуем пределы при $z \to z^*$ следующей системы, т.е.

$$\begin{pmatrix} \rho_1^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \rho_2^{-1}(z) \end{pmatrix} B(\vec{p}(z), \lambda_k) \begin{pmatrix} C_1(\lambda_k, z) \\ C_2(\lambda_k, z) \end{pmatrix} = 0,\ k = \overline{1,4},$$

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1.$$

При $z \to z^*$ возможны три случая:

а) $\rho_1(z) \to \infty$ и $\rho_2(z) \to \infty$,

б) $\rho_1(z) \to \infty$ и $\rho_2(z) \to \rho_2^* < \infty$,

в) $\rho_1(z) \to \rho_1^*$ и $\rho_2(z) \to \infty$.

При реализации случая а), обозначая

$$p_1^* = \lim_{z \to z^*} \frac{p_1(z)}{\rho_1(z)};\ p_2^* = \lim_{z \to z^*} \frac{p_2(z)}{\rho_1(z)};\ p_3^* = \lim_{z \to z^*} \frac{p_3(z)}{\rho_2(z)};\ p_4^* = \lim_{z \to z^*} \frac{p_4(z)}{\rho_2(z)},$$

мы получим следующую предельную систему:

$$(p_1^* + \lambda_k p_2^*)C_1 + 0 \cdot C_2 = 0,$$
$$(p_3^* + \lambda_k p_4^*)[U(1, \lambda_k)C_1 + V(1, \lambda_k)C_2] = 0,\ k = \overline{1,4}.$$

Откуда вытекает, что найдутся хотя бы 2 собствнных значения λ_k и λ_j, для которых $V(1, \lambda_k) = 0$ и $V(1, \lambda_j) = 0$. Последнее невозможно, поскольку в этом случае $f_1(\lambda_k; \lambda_j; \lambda_{i_1}) = 0$ и $f_2(\lambda_k; \lambda_j; \lambda_{i_2}) = 0$ для любых i_1 и i_2.

В случае б) получим систему следующего вида:

$$(p_1^* + \lambda_k p_2^*)C_1 + 0 \cdot C_2 = 0,$$

$$[-\frac{1}{\rho_2^*}U^{'}(1,\lambda_k)+(p_3^*+\lambda_k p_4^*)U(1,\lambda_k)]C_1+$$

$$+[-\frac{V^{'}}{\rho_2^*}(1,\lambda_k)+(p_3^*+\lambda_k p_4^*)V(1,\lambda_k)]C_2=0,\ k=\overline{1,4}.$$

Тогда существует 3 собственных значения, для которых $C_1 = 0$, $C_2 = = 1$ и соотвественно $(-\frac{V^{'}}{\rho_2^*}(1,\lambda_k)+(p_3^*+\lambda_k p_4^*)V(1,\lambda_k)) = 0$, что противоречит условию (3.1) теоремы.

Если же окажется, что $\rho_1(z) \to \rho_1^* < \infty$ и $\rho_2(z) \to \infty$, тогда мы можем утверждать, что хотя бы для трех собственных значений $-(p_3^* + + \lambda_k p_4^*)[V(1,\lambda_k)+U(1,\lambda_k)] = 0$, что невозможно в силу условия (3.2) настоящей теоремы.

Таким образом, алгебраические функции $p_k(z)$ не имеют особых точек, в которых они не ограничены. Полученные противоречия вызваны предположением о существовании неизолированных решений. Теорема доказана.

4. О монотонной зависимости собственных значений от параметров

В данном пункте приведено доказательство существования монотонной зависимости собственных значений λ_k от параметров p_j для задачи (1.5)–(1.7). Наличие такой зависимости для данного класса операторов позволяет построить эффективный численный алгоритм для решения поставленной выше задачи.

Теорема 2. Пусть $\lambda(\vec{p})$ — произвольное собственное значение задачи (1.5)–(1.7). Тогда $\frac{\partial\lambda(\vec{p})}{\partial p_k} \geqslant 0$.

Доказательство.

Для доказательства, следуя [6], приведем краевую задачу (1.5)–(1.7) на собственные значения к эквивалентному виду.

Обозначим $H = L_2(0,1)\oplus C^2$ — сепарабельное гильбертово пространство элементов вида $\tilde{y} = (y(x), a, b)$, где $y(x) \in L_2(0,1); a, b \in C$ со скалярным произведением $(\tilde{y},\tilde{z}) = \int y(x)\bar{z}(x)dx + a\cdot\bar{c} + b\cdot\bar{d}$, где $\tilde{z} = (z(x), c, d) \in H$.

Рассмотрим в H оператор $G_0 : H \to H$, определенный следующим образом:

$$G_0(\lambda)\tilde{y} = \begin{pmatrix} -y^{''}(x) \\ y^{'}(0) \\ y^{'}(1) \end{pmatrix}$$

с областью определения

$$D(G_0) = ((y(x), y(0), y(1)) \in H | y(x) \in L_2(0,1), y(0), y(1) \in C).$$

Введем в рассмотрение оператор $\tilde{L}(\vec{p},\lambda) : H \to H$ такой, что

$$\tilde{L}(\vec{p},\lambda) = G_0 - p_1G_1 - p_2\lambda G_2 + p_3G_3 + p_4\lambda G_4 - \lambda G_5,$$

где

$$G_1 = G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; G_3 = G_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\tilde{L}$ замыкаемый. Обозначим через $\hat{L}$ минимальное замыкание $\tilde{L}$. Далее рассмотрим задачу на собственные значения

$$\hat{L}(\vec{p}, \lambda)\tilde{y} = 0. \tag{4.1}$$

Приведем уравнение (4.1) к виду

$$L_1(\vec{p})\tilde{y} = \lambda L_2(\vec{p})\tilde{y}. \tag{4.2}$$

Исследуем методами теории возмущений данное уравнение. Зафиксируем набор параметров $\vec{p}^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*)$, собственное значение $\lambda_0 = \lambda(\vec{p}^*)$ задачи (4.2) и придадим малое возмущение одному из параметров. Не ограничивая общности, будем считать, что малое возмущение придано p_3, т. е. $\vec{p}_\epsilon^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^* + \epsilon, p_4^*)$. Будем считать ϵ независимым параметром задачи и исследовать выбранное нами собственное значение $\lambda(\epsilon)$. Если положить $\epsilon = 0$, то мы получим в точности исходную задачу на собственные значения. Разложим $\tilde{y}$ и λ в ряды по степеням ϵ:

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y(x,\lambda) \\ y(0) \\ y(1) \end{pmatrix} = \tilde{y}_0 + \epsilon\tilde{y}_1 + ... = \begin{pmatrix} y_0(x,\lambda) \\ y_0(0) \\ y_0(1) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_1(0) \\ y_1(1) \end{pmatrix} + ...$$

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon\lambda_1 + ...,$$

подставим их в уравнение (4.2) и рассмотрим прямое разложение теории возмущений линейных операторов.

Далее приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ϵ. В результате получим бесконечный набор уравнений

$$\epsilon^0 : L_1\tilde{y}_0 = \lambda_0 L_2 \tilde{y}_0, \tag{4.3}$$

$$\epsilon^1 : L_1\tilde{y}_1 + B_3\tilde{y}_0 = \lambda_0 L_2\tilde{y}_1 + \lambda_1 L_2\tilde{y}_0. \tag{4.4}$$

$$...$$

Так как нас интересует знак $\lambda^{'}(0)$, будем рассматривать лишь первые два уравнения для коэффициентов при ϵ. Не ограничивая общности, положим $\|\tilde{y}_0\| = 1$. Рассмотрим второе из этих уравнений. Умножая уравнение (4.4) скалярно на $\tilde{y}_0$ и пользуясь самосопряженностью L_1, получим

$$(\tilde{y}_1, L_1\tilde{y}_0) + (B_3\tilde{y}_0, \tilde{y}_0) = \lambda_0(L_2\tilde{y}_1, \tilde{y}_0) + \lambda_1(L_2\tilde{y}_0, \tilde{y}_0).$$

Далее, используя первое уравнение для коэффициентов при ϵ^0, сократив одинаковые слагаемые и учитывая неотрицательность p_2 и p_4, получим

$$\lambda_1 = \frac{\partial\lambda(\vec{p})}{\partial p_3} = \frac{(B_3\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(L_2\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} = \frac{|y_0(1)|^2}{\int_0^1 y_0^2(x,\lambda)dx - p_2\,|y_0(0)|^2 - p_4\,|y_0(1)|^2} \geqslant 0.$$

Учитывая физический смысл коэффициентов p_2 и p_4, получим, что зависимость $\lambda(p)$ монотонно возрастает при увеличении p. Теорема доказана.

Монотонная зависимость остальных собственных значений от параметров граничных условий доказывается аналогично.

5. Описание алгоритма численного решения задачи

В данном пункте опишем метод численного решения МПОСЗ, основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров. Обозначим через $\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \mu_3(\vec{p}), \mu_4(\vec{p})$ первые четыре собственных значения оператора $S(\lambda)$ при некотором значении вектора $\vec{p} \in R^4$.

Рассмотрим обратную спектральную задачу в следующей постановке. *Требуется найти такое значение $\vec{p}^*$ из заданного 4-х мерного прямоугольного параллелепипеда* Π, *чтобы $\mu_1(\vec{p}^*)$, $\mu_2(\vec{p}^*)$,$\mu_3(\vec{p}^*)$,$\mu_4(\vec{p}^*)$ были соответственно равны наперед заданным числам $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*$ — спектральным данным обратной спектральной задачи.* Далее будем обозначать $\vec{\mu}(\vec{p}) = (\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \mu_3(\vec{p}), \mu_4(\vec{p}))$ и соответственно $\vec{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*)$.

Областью несуществования решений МПОСЗ для заданных спектральных данных $\vec{\lambda}^*$ будем называть область, в которой нет вектора $\vec{p}$ такого, что $\mu(\vec{p}) = \vec{\lambda}^*$. Прямой параллелепипед с наименьшими координатами в точке $\vec{p}_{min}$ и наибольшими координатами в точке $\vec{p}_{max}$ будем обозначать $\Pi(\vec{p}_{min}, \vec{p}_{max})$. Обозначим через $[\vec{a}, \vec{b}]$ конусный отрезок, т.е. $[\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{x} \in E_n | a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$ (см.[7]). Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. Если $\vec{\lambda}^* \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]$, тогда конусный отрезок $[\vec{a}; \vec{b}]$ является областью несуществования для МПОСЗ со спектральными данными $\vec{\lambda}^*$.

Доказательство данного утверждения вытекает из теоремы предыдущего пункта, а именно из монотонности зависимости $\vec{\mu}(\vec{p})$ от $\vec{p}$ при всех $\vec{p} \in \Pi(\vec{p}_{min}, \vec{p}_{max})$ следует, что $\mu(\vec{p}) \in \Pi(\mu(\vec{p}_{min}), \mu(\vec{p}_{max}))$. С помощью данного условия можно построить алгоритм численного решения данной задачи, заключающийся в разбиении заданной области поиска (конусного отрезка) на множество мелких подобластей (конусных отрезков) и последовательном выявлении среди них областей несуществования. Применяя описанную выше процедуру, получим локализацию областей существования решения с любой необходимой точностью. Далее, применяя метод градиентного спуска для каждой локализованной области существования, можно уточнить решения поставленной задачи до требуемой точности.

Описанный выше алгоритм реализован в пакете MATLAB.

Литература

[1] Рид М., Саймон Б.М. Методы современной математической физики: в 4 т. М.: Мир, 1982.

[2] Садовничий В.А., Валеев Н.Ф., Султанаев Я.Т. Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения. ДАН. 2009. Т. 426. № 4. С. 457–460.

[3] Atkinson F.V. Multiparameter Eigenvalue Problem: Matrices and Compact Operators. New York: Academic, 1972. V. 1.

[4] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969. 528 с.

[5] Валеев Н.Ф. Об одной модели управления собственными колебаниями динамических систем // Вестник УГАТУ. 2008. Т. 2. С. 45–55.

[6] Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1983. № 9. С. 190–229.

[7] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975. С. 255–269.

Поступила в редакцию 9/*VI*/2009;
в окончательном варианте — 9/*VI*/2009.

ABOUT THE PROBLEM OF CHARACTERIZATION OF THE SHTURM-LOIUVILLE OPERATOR'S BOUNDARY CONDITIONS BY THE SPECTRUM

© 2009 N.F. Valeev, S.A. Rabtsevich, E.R. Nugumanov[2]

A new formulation of the inverse spectral problem about the restoration of the boundary conditions' coefficients of the Shturm-Loiuville operator on a segment is considered. The theorems of existence and isolation of the solutions of the given task are proved, and the algorithm of numerical solution of the given problem is suggested.

Key words: the identification of boundary conditions of a dynamic system; inverse spectral problem; existence, isolation and stability of the solution; algorithm of numerical solution.

Paper received 9/*VI*/2009.
Paper accepted 9/*VI*/2009.

[2]Valeev Nurmuhamet Fuatovich (`valeevnf@yandex.ru`), Rabtsevich Sergey Alexsandrovich (`rabtsevichsa@rambler.ru`), Nugumanov Edward Rimovich (`eduard-nugumanov@yandex.ru`), Dept. of Differential Equations, Bashkir State University, Ufa, 450074, Russia.