УДК 511.2+519.2

ОБ АСИМПТОТИКЕ И БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ ВИДА $\sum \mathbf{f}(\mathbf{q^n t})$

© 2009 Л.П. Усольцев[1]

В работе даются новые оценки остаточного члена и больших уклонений в центральной предельной теореме для сумм вида $\Sigma f(q^n t)$. В представленных доказательствах используются не только техника и методика рассуждений, имеющиеся в арсенале классической теории вероятностей, но и относящиеся к теории диофантовых уравнений с показательной функцией.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, показательная функция, диофантово уравнение, асимптотика и большие уклонения.

1. Постановка задачи и обсуждение результатов

Пусть $q\geqslant 2$ – фиксированное целое число, а $f(t)$ – вещественнозначная, интегрируемая с квадратом на отрезке $[0,1]$ периодическая функция с периодом 1 и коэффициентами Фурье

$$a_m = \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi i m t}\, dt \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

удовлетворяющими условию

$$|a_m| \leqslant \frac{A}{|m|^\alpha} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{1.1}$$

где $A>0$ и $\alpha>1/2$ – некоторые постоянные. Для любого целого числа $N\geqslant 2$ положим

$$S_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \big(f(q^n t) - a_0\big) \qquad (0 \leqslant t < 1) \tag{1.2}$$

[1]Усольцев Лев Павлович (usoltsev@ssu.samara.ru), кафедра теории вероятностей и математической статистики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

и

$$F_N(x) = \mathrm{mes}\{t \in [0,1] : S_N(t) < x\} \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{1.3}$$

Через $\mathbf{\Phi}(x)$ будем обозначать нормальную функцию распределения с параметрами $(0,1)$.

Согласно классической теореме Форте – Каца (см., например [1, § 15, с. 77—92]), при высказанных относительно функции $f(t)$ предположениях существует конечный предел

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^1 S_N^2(t)dt = \sigma^2 \qquad (\sigma \geqslant 0), \tag{1.4}$$

причем в случае, когда $\sigma{\neq}0$, для всех вещественных x выполняется соотношение

$$\lim_{N\to\infty} F_N(\sigma x) = \mathbf{\Phi}(x). \tag{1.5}$$

Очевидно, что важнейшим здесь является случай, когда

$$f(t) \ = \ \chi_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1 & \{t\}{\in}\Delta, \\ 0 & \{t\}{\notin}\Delta, \end{cases} \qquad (0{\leqslant}t{<}\infty) \tag{1.6}$$

с $\Delta = [a,b){\subset}[0,1)$ и $b{-}a{<}1$, поскольку в этом случае сумма $\sum\limits_{n=0}^{N-1} f(q^n t)$ при любом вещественном t дает количество попаданий дробных долей $\{q^n t\}$ в промежуток Δ, когда n пробегает значения $n = 0,1,2,\ldots,N{-}1$. Заметим, что в работе автора [2] содержится доказательство неравенства $\sigma{\neq}0$ для функции (1.6). Легко видеть, что для коэффициентов Фурье функции (1.6) оценка (1.1) выполняется с $\alpha = 1$.

Исследование асимптотики в соотношении (1.5) для различных классов функций $f(t)$ проводилось как чисто вероятностными методами, так и с привлечением разного рода арифметических средств. Наиболее значимый результат в первом из отмеченных двух направлений содержится в работе И.А. Ибрагимова [3] и формулируется следующим образом: если $\sigma{\neq}0$, то при $N \to \infty$ равномерно относительно x, $-\infty < x < \infty$, выполняется соотношение

$$F_N(\sigma x) = \mathbf{\Phi}(x) + O\left[\left(\frac{\ln n}{N}\right)^{\delta/2}\right], \tag{1.7}$$

где $\delta = 1$, если $\alpha{>}2/3$, и δ — любое вещественное число из интервала $\left(0, \dfrac{2\alpha{-}1}{1{-}\alpha}\right)$, если $1/2{<}\alpha{\leqslant}2/3$. При этом постоянная в символе "O" зависит от A, α, σ и $\rho_\delta = \int\limits_0^1 |f(t)|^{2+\delta}\,dt$.

Работы второго из отмеченных направлений существенно используют методику и технику теории диофантовых уравнений с показательной функцией [1, 4—8]. В этих работах решаются вопросы о числе решений специальных диофантовых уравнений с показательной функцией.

Задача о распределении на единичном отрезке дробных долей показательной функции, породившая соотношение (1.5), имеет как вероятностную, так и арифметическую природу. Поэтому более естественными и в конечном счете более законченными нам представляются те методы, в которых вероятностные аспекты трактуются как раз в русле теории диофантовых уравнений. На этом пути в работе [7] установлены для случая $\alpha{>}1$ асимптотические соотношения для распределения сумм (1.2), вполне аналогичные тем, которые имеют место для функций распределения сумм независимых случайных величин. Конкретно в этой работе доказаны следующие два утверждения.

Теорема 1. *Если* $\alpha{>}1$ *и* $\sigma{\neq}0$, *то при* $N \to \infty$ *равномерно относительно* x, $-\infty < x < \infty$ *выполняется соотношение*

$$F_N(\sigma x) = \mathbf{\Phi}(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

с постоянной в символе "O", зависящей от A, α *и* σ.

Теорема 2. *Если* $\alpha{>}1$ *и* $\sigma{\neq}0$, *то существует постоянная* $c{>}0$, *зависящая от* A, α *и* σ, *такая, что при* $N \to \infty$ *в области* $2{\leqslant}x{\leqslant}cN^{1/6}$ *выполняются соотношения*

$$1 - F_N(\sigma x) = [1 - \Phi(x)]\left[1 + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N}}\right)\right]$$

и

$$F_N(-\sigma x) = \Phi(-x)\left[1 + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N}}\right)\right]$$

с постоянными в символах "O", зависящими от A, α *и* σ.

Основной случай, когда $\alpha = 1$ (и в качестве $f(t)$ может быть взята, в частности, функция (1.6)), рассматривался в [8], где доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Если* $\alpha = 1$ *и* $\sigma{\neq}0$, *то существует постоянная* $c{>}0$, *зависящая от* A *и* σ, *такая, что при* $N \to \infty$ *в области* $2{\leqslant}x{\leqslant}cN^{1/10}$ *выполняются соотношения*

$$1 - F_N(\sigma x) = [1 - \Phi(x)]\left[1 + O\left(\frac{x^3(x^2 + \sqrt{\ln N})}{\sqrt{N}}\right)\right] \tag{1.8}$$

и

$$F_N(-\sigma x) = \Phi(-x)\left[1 + O\left(\frac{x^3(x^2 + \sqrt{\ln N})}{\sqrt{N}}\right)\right] \tag{1.9}$$

с постоянными в символах "O", зависящими от A и σ.

Целью настоящей работы является доказательство следующих двух анонсированных в сообщении [9] утверждений, первое из которых усиливает оценку (1.7) для случая $1/2<\alpha\leqslant 2/3$ (и повторяет ее в случае $2/3<\alpha\leqslant 1$), а второе – уточняет соотношения (1.8) и (1.9) для случая $\alpha = 1$ и не имеет аналогов при $1/2<\alpha<1$.

Теорема 4. *Если $1/2<\alpha\leqslant 1$ и $\sigma\neq 0$, то при $N\to\infty$ равномерно относительно x, $-\infty<x<\infty$ выполняется соотношение*

$$F_N(\sigma x) = \mathbf{\Phi}(x) + O\left(\sqrt{\frac{\ln N}{N}}\right) \tag{1.10}$$

с постоянной в символе "O", зависящей от A, α и σ.

Теорема 5. *Если $1/2<\alpha\leqslant 1$ и $\sigma\neq 0$, то существует положительная постоянная $c>0$, зависящая от A, α и σ, такая, что при $N\to\infty$ в области $2\leqslant x\leqslant cN^{1/8}$ выполняются соотношения*

$$1 - F_N(\sigma x) = [1-\Phi(x)]\left[1 + O\left(\frac{x^3(x+\sqrt{\ln N})}{\sqrt{N}}\right)\right] \tag{1.11}$$

и

$$F_N(-\sigma x) = \Phi(-x)\left[1 + O\left(\frac{x^3(x+\sqrt{\ln N})}{\sqrt{N}}\right)\right] \tag{1.12}$$

с постоянными в символах "O", зависящими от A и σ.

Для зависимых случайных величин, суммы которых имеют в пределе нормальное распределение, иногда используют не очень информативный термин "слабозависимые случайные величины". В случае же, когда для распределения подобных сумм оценка остаточного члена в предельном соотношении с точностью до логарифмического сомножителя такая же, как и для распределения сумм независимых случайных величин, вероятно, более уместен термин "асимптотически независимые случайные величины". Тогда слагаемые сумм, распределение которых описывается теоремой 4, можно будет называть асимптотически независимыми (в соответствующем вероятностном пространстве).

При доказательстве теорем 1—5 реализуется, в частности, предложенный в работе автора [6] подход, суть которого заключается в том, что близость характеристических функций нормального распределения $\mathbf{\Phi}$ и распределения $F_{N,M}$, в которое переходит F_N в результате замены функции $f(t)$ M-й частичной суммой ее ряда Фурье с натуральным M, растущим вместе с N, оценивается не по моментам распределения $F_{N,M}$ (так в сходных вопросах поступали Р.Х. Мухутдинов и А.Г. Постников), а по семиинвариантам $\gamma_k(N,M)$ этого распределения, для которых получено следующее представление:

$$\gamma_k(N,M)=\frac{1}{N^{k/2}}\sum_{n_1=0}^{N-1}\cdots\sum_{n_k=0}^{N-1}\underset{[W_k]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\cdots\sum_{m_k=-M}^{M}{}'}a_{m_1}\cdots a_{m_k}, \tag{1.13}$$

где штрих у знака суммы $\sum\limits_m$ показывает, что из области суммирования исключено значение $m=0$, а символом $W_k=W_k(n_1,\dots,n_k)$ обозначено условие: целые числа m_i с $1\leqslant|m_i|\leqslant M$ $(i=1,2,\dots,k)$ таковы, что

$$m_1q^{n_1}+m_2q^{n_2}+\cdots+m_kq^{n_k}=0, \tag{1.14}$$

но при каждом $r=1,2,\dots,k-1$ для любых r попарно различных чисел $j_1,\dots,j_r$ множества $\{1,2,\dots,k\}$ выполняется неравенство

$$m_1q^{n_{j_1}}+m_2q^{n_{j_2}}+\cdots+m_kq^{n_{j_r}}\neq 0.$$

Представление семиинвариантов $\gamma_k(N,M)$ в виде (1.13) позволяет оценить их модули, не решая относительно $n_1,\dots,n_k\in\{0,1,2,\dots,N-1\}$ диофантовых уравнений вида (1.14) с заданными $m_1,m_2,\dots,m_k$, $1\leqslant|m_i|\leqslant M$ $(i=1,2,\dots,k)$. Именно это обстоятельство и является причиной большей эффективноси нашего подхода по сравнению с теми, при которых функция распределения $F_{N,M}(x)$ строится по моментам распределения $F_{N,M}(x)$, оценить которые, не решая уравнений вида (1.14), пока не удавалось.

Оценив модули семиинвариантов $\gamma_k(N,M)$ распределения $F_{N,M}$, мы, во-первых, оцениваем степень близости характеристических функций распределений $F_{N,M}$ и $\mathbf{\Phi}$ и стандартными приемами, связанными с применением теоремы Эссеена (см., например, [10, с. 211, теорема 1] или [11, с. 137, теорема 2]), выводим соотношение (1.10), а во-вторых, используя теорему В.А. Статулявичуса [12] (см. также [11, с. 307, п. 10]) о восстановлении асимптотики больших уклонений по семиинвариантам распределения, получаем асимптотические соотношения (1.11) и (1.12).

2. Основные обозначения и некоторые леммы

Теоремы 4 и 5 достаточно доказать для случая $a_0=\int\limits_0^1 f(t)\,dt=0$, поскольку к нему сводится и общий случай: надо только вместо функции $f(t)$ рассматривать функцию $f(t)-a_0$. Будем поэтому далее считать, что

$$a_0=\int\limits_0^1 f(t)\,dt=0, \qquad f(t)\sim\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_m e^{2\pi imt} \quad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{2.1}$$

В этом случае выражение (1.2) для суммы $S_N(t)$ принимает вид:

$$S_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(q^n t) \qquad (0 \leqslant t < 1). \tag{2.2}$$

Заметим, что, вследствие вещественнозначности функции $f(t)$, при всех целых $m \neq 0$ справедливо равенство

$$a_{-m} = a_{\overline{m}}. \tag{2.3}$$

Для целых чисел $N \geqslant 2$ мы полагаем:

$$\sigma_N^2 = \int_0^1 S_N^2(t)\, dt \qquad (\sigma_N \geqslant 0). \tag{2.4}$$

Положим еще $D = \dfrac{4A^2}{2\alpha-1}$ и, следуя работе [1, с. 84], докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Существует конечный предел*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N^2 = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 S_N^2(t)\, dt = \sigma^2,$$

причем при всех целых $N \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$|\sigma_N^2 - \sigma^2| < \frac{20D}{N}. \tag{2.5}$$

Доказательство леммы. Положим

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)\, dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_m \overline{a}_m \tag{2.6}$$

и

$$\rho_k = \int_0^1 f(t) f(q^k t)\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.7}$$

(таким образом, $\rho_0 = \|f\|^2$).

Докажем следующую оценку:

$$|\rho_k| \leqslant \frac{D}{q^{k\alpha}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.8}$$

Действительно, так как вследствие (2.1) при $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(q^k t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_m e^{2\pi i m q^k t} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

и в силу равенства Парсеваля

$$\rho_k = \int\limits_0^1 f(t) f(q^k t)\, dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_m \overline{a}_{mq^k},$$

то с учетом соотношений (1.1) и (2.3) имеем

$$|\rho_k| \leqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' |a_m| \cdot |a_{mq^k}| \leqslant \frac{2A^2}{q^{k\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\alpha}} \leqslant \frac{2A^2}{q^{k\alpha}} \left(1 + \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}} \right) \leqslant \frac{4A^2}{(2\alpha-1) q^{k\alpha}} = \frac{D}{q^{k\alpha}}.$$

Далее, поскольку функция $f(t)$ периодическая с периодом 1, то в силу равенств (2.2), (2.4), (2.6) и (2.7) мы при любом целом $N \geqslant 2$ получаем:

$$\sigma_N^2 = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(q^n t) \right)^2 dt = \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \int\limits_0^1 f(q^{n_1} t) f(q^{n_2} t)\, dt =$$

$$= \|f\|^2 + \frac{2}{N} \sum_{\substack{n_1=0 \\ [n_1<n_2]}}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \int\limits_0^1 f(t) f(q^{n_2-n_1} t)\, dt =$$

$$= \|f\|^2 + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{k=1}^{N-1-n} \int\limits_0^1 f(t) f(q^k t)\, dt = \|f\|^2 + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{k=1}^{N-1-n} \rho_k. \tag{2.9}$$

А так как в силу оценки (2.8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D}{q^{k\alpha}} \leqslant D \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha}} = \frac{D}{\sqrt{2}-1} < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \rho_k$ абсолютно сходится. Поэтому, полагая

$$\sigma^2 = \|f\|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k, \tag{2.10}$$

мы вследствие равенств (2.9) получаем:

$$\sigma_N^2 = \|f\|^2 + \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k - \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=N-n}^{\infty} \rho_k =$$

$$= \|f\|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k - \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=N-n}^{\infty} \rho_k = \sigma^2 - \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=N-n}^{\infty} \rho_k.$$

Отсюда, используя оценку (2.8), выводим неравенство (2.5):

$$|\sigma_N^2 - \sigma^2| \leqslant \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=N-n}^{\infty} |\rho_k| \leqslant \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{D}{q^{k\alpha}} \leqslant \frac{2D}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{1}{2^{k/2}} =$$

$$= \frac{2D}{N}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2^{(N-n)/2}} = \frac{2\sqrt{2}D}{(\sqrt{2}-1)N}\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{2^{r/2}} < \frac{3D}{(\sqrt{2}-1)N}\frac{1}{\sqrt{2}-1} < \frac{20D}{N}.$$

Лемма 1 доказана.

Для любых целых чисел $N\geqslant 2$ и $M\geqslant 2$ мы полагаем:

$$f_M(t) = {\sum_{m=-M}^{M}}' a_m e^{2\pi imt}, \quad S_{N,M}(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} f_M(q^n t) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1), \tag{2.11}$$

$$F_{N,M}(x) = \mathrm{mes}\{t\in[0,1] : S_{N,M}(t)<x\} \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{2.12}$$

$$\sigma^2_{N,M} = \int_0^1 S^2_{N,M}(t)\,dt \qquad (\sigma_{N,M}\geqslant 0), \tag{2.13}$$

$$\varphi_{N,M}(\lambda) = \int_0^1 \exp\{i\lambda S_{N,M}(t)\}\,dt \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{2.14}$$

$$\widetilde{f}_M(t) = f(t)-f_M(t) \sim \sum_{|m|>M} a_m e^{2\pi imt} \qquad (0\leqslant t\leqslant 1) \tag{2.15}$$

и

$$\widetilde{S}_{N,M}(t) = S_N(t)-S_{N,M}(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{f}_M(q^n t) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{2.16}$$

Лемма 2. *При всех целых $N\geqslant 2$ и $M\geqslant 2$ справедлива оценка*

$$\int_0^1 \widetilde{S}^2_{N,M}(t)\,dt < \frac{4D}{M^{2\alpha-1}}. \tag{2.17}$$

Доказательство леммы. Пусть $N\geqslant 2$ и $M\geqslant 2$. Если n_1 и n_1 – целые числа, $n_2\geqslant n_1\geqslant 0$, то вследствие соотношения (2.15)

$$\widetilde{f}_M(q^{n_2-n_1}t) \sim \sum_{|m|>M} a_m e^{2\pi imq^{n_2-n_1}}.$$

Но тогда в силу равенства Парсеваля

$$\int_0^1 \widetilde{f}_M(q^{n_1}t)\widetilde{f}_M(q^{n_2}t)\,dt = \int_0^1 \widetilde{f}_M(t)\widetilde{f}_M(q^{n_2-n_1}t)\,dt = \sum_{|m|>M} a_{mq^{n_2-n_1}}\overline{a}_m,$$

а отсюда вследствие соотношений (2.3) и (1.1) получаем:

$$\left|\int_0^1 \widetilde{f}_M(q^{n_1}t)\widetilde{f}_M(q^{n_2}t)\,dt\right| \leqslant 2\sum_{m>M}\frac{A^2}{m^{2\alpha}q^{(n_2-n_1)\alpha}} \leqslant \frac{2A^2}{2^{(n_2-n_1)/2}}\sum_{m>M}\frac{1}{m^{2\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2A^2}{2^{(n_2-n_1)/2}}\int\limits_M^\infty \frac{dx}{x^{2\alpha}} = \frac{2A^2}{2^{(n_2-n_1)/2}(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}} = \frac{D}{2^{(n_2-n_1)/2+1}M^{2\alpha-1}}.$$

Поэтому в силу равенств (2.16)

$$\int\limits_0^1 \widetilde{S}^2_{N,M}(t)\,dt = \int\limits_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{f}_M(q^n t)\right)^2 dt = \frac{1}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\int\limits_0^1 \widetilde{f}_M(q^{n_1}t)\widetilde{f}_M(q^{n_2}t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{N}\sum_{\substack{n_1=0\\ [n_1<n_2]}}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\left|\int\limits_0^1 \widetilde{f}_M(q^{n_1}t)\widetilde{f}_M(q^{n_2}t)\,dt\right| \leqslant \frac{2}{N}\sum_{\substack{n_1=0\\ [n_1<n_2]}}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\frac{D}{2^{(n_2-n_1)/2+1}M^{2\alpha-1}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{D}{M^{2\alpha-1}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r/2}} = \frac{\sqrt{2}D}{(\sqrt{2}-1)M^{2\alpha-1}} < \frac{4D}{M^{2\alpha-1}}.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При всех целых* $N\geqslant 2$ *и* $M\geqslant 2$ *и всех вещественных* x *и* $c>0$ *справедливы неравенства*

$$F_{N,M}(x-c)\leqslant F_N(x)\leqslant F_{N,M}(x+c)+\frac{4D}{c^2M^{2\alpha-1}}. \tag{2.18}$$

Доказательство леммы. В силу равенств (2.12) и (2.16), при всех целых $N\geqslant 2$ и $M\geqslant 2$ и всех вещественных x и $c>0$ мы имеем:

$$F_N(x) = \operatorname{mes}\{t\in[0,1] : S_N(t)<x, \left|S_N(t)-S_{N,M}(t)\right|\leqslant c\}+\operatorname{mes}\{t\in[0,1] : S_N(t)<x,$$

$$\left|S_N(t)-S_{N,M}(t)\right|>c\}\geqslant \operatorname{mes}\{t\in[0,1] : S_N(t)<x, \left|S_N(t)-S_{N,M}(t)\right|\leqslant c\}\geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{mes}\{t\in[0,1] : S_{N,M}(t)<x-c\} = F_{N,M}(x-c) \tag{2.19}$$

и

$$F_N(x)\leqslant \operatorname{mes}\{t\in[0,1] : S_{N,M}(t)<x+c\}+\operatorname{mes}\{t\in[0,1] : \left|S_N(t)-S_{N,M}(t)\right|>c\} =$$

$$= F_{N,M}(x+c)+\operatorname{mes}\{t\in[0;1] : \left|\widetilde{S}_{N,M}(t)\right|>c\}. \tag{2.20}$$

Но в силу неравенства П.Л. Чебышева и оценки (2.17)

$$\operatorname{mes}\{t\in[0;1] : \left|\widetilde{S}_{N,M}(t)\right|>c\}\leqslant \frac{1}{c^2}\int\limits_0^1 \widetilde{S}^2_{N,M}(t)\,dt\leqslant \frac{D}{c^2M^{2\alpha-1}}.$$

Отсюда и из неравенств (2.19) и (2.20) вытекает справедливость неравенств (2.18). Лемма 3 доказана.

Следствие. *При всех целых* $N \geqslant 2$ *и* $M \geqslant 2$ *и всех вещественных* x *и* $c > 0$ *справедливы неравенства*

$$F_{N,M}(\sigma x - c) \leqslant F_N(\sigma x) \leqslant F_{N,M}(\sigma x + c) + \frac{4D}{c^2 M^{2\alpha-1}}.$$

В частности, при $c = \dfrac{1}{M^{(2\alpha-1)/3}}$ будет:

$$F_{N,M}\left(\sigma x - \frac{1}{M^{(2\alpha-1)/3}}\right) \leqslant F_N(\sigma x) \leqslant F_{N,M}\left(\sigma x + \frac{1}{M^{(2\alpha-1)/3}}\right) + \frac{4D}{M^{2\alpha-1}}. \tag{2.21}$$

Замечание. Если целые числа $N \geqslant 2$ и $M \geqslant 2$ выбраны так, что

$$M \geqslant N^{3/(2\alpha-1)}, \tag{2.22}$$

то в силу неравенств (2.21) при всех вещественных x будет:

$$F_{N,M}\left(\sigma x - \frac{1}{N}\right) \leqslant F_N(\sigma x) \leqslant F_{N,M}\left(\sigma x + \frac{1}{N}\right) + \frac{4D}{M^{(2\alpha-1)/3}}. \tag{2.23}$$

Лемма 4. *При всех целых* $N \geqslant 2$ *и* $M \geqslant 2$, *удовлетворяющих неравенству* (2.22), *справедлива оценка*

$$|\sigma^2_{N,M} - \sigma^2| < \frac{C_1}{N}, \tag{2.24}$$

где $C_1 = 64D$.

Доказательство леммы. Вследствие равенств (2.6), (2.7) и (2.10) соотношение (2.5) можно записать в виде

$$\sigma^2_N = \int_0^1 f^2(t)\,dt + 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f(t) f(q^k t)\,dt + \theta_1 \frac{20D}{N}$$

с $|\theta_1| \leqslant 1$, а переписав это соотношение для функции $f_M(t)$ (т. е. с учетом равенств (2.13) и (2.11)), получаем:

$$\sigma^2_{N,M} = \int_0^1 f^2_M(t)\,dt + 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_M(t) f_M(q^k t)\,dt + \theta_2 \frac{20D}{N}$$

с $|\theta_2| \leqslant 1$. Но в силу равенства Парсеваля при любом целом $k \geqslant 0$

$$\int_0^1 f(t) f(q^k t)\,dt = {\sum_{m=-\infty}^{\infty}}' a_{mq^k} \overline{a}_m, \qquad \int_0^1 f_M(t) f_M(q^k t)\,dt = {\sum_{m=-M}^{M}}' a_{mq^k} \overline{a}_m.$$

Поэтому вследствие соотношений (1.1), (2.3) и (2.22) имеем:

$$|\sigma^2_{N,M} - \sigma^2 \sigma^2_{N,M}| \leqslant \left| \sum_{|m|>M} a_m \overline{a}_m + 2\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|m|>M} a_{mq^k} \overline{a}_m \right| + \frac{40D}{N} \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m>M}|a_{mq^k}|\cdot|a_m|+\frac{40D}{N}\leqslant 4A^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q^{k\alpha}}\sum_{m>M}\frac{1}{m^{2\alpha}}+\frac{40D}{N}\leqslant$$

$$\leqslant 4A^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k/2}}\int\limits_M^{\infty}\frac{dx}{x^{2\alpha}}+\frac{40D}{N}=\frac{4\sqrt{2}A^2}{(\sqrt{2}-1)(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}+\frac{40D}{N}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}D}{(\sqrt{2}-1)M^{2\alpha-1}}+\frac{40D}{N}<\frac{40D}{M^{2\alpha-1}}+\frac{40D}{N}<\frac{44D}{N}.$$

Отсюда и из оценки (2.5) следует, что

$$|\sigma^2_{N,M}-\sigma^2|\leqslant|\sigma^2_{N,M}-\sigma^2_N|+|\sigma^2_N-\sigma^2|<\frac{44D}{N}+\frac{20D}{N}=\frac{64D}{N}=\frac{C_1}{N}.$$

Лемма 4 доказана.

Положим $C_2=\dfrac{4C_1}{\sigma^2}$. Если целые числа $N\geqslant 2$ и $M\geqslant 2$ таковы, что $N\geqslant C_2$ и выполняется условие (2.22), то вследствие оценки (2.24) будет:

$$|\sigma^2_{N,M}-\sigma^2|<\frac{C_1}{N}\leqslant\frac{C_1}{C_1}=\frac{\sigma^2}{4}, \tag{2.25}$$

а значит,

$$\frac{3\sigma^2}{4}<\sigma^2_{N,M}<\frac{5\sigma^2}{4},\quad \frac{5}{6}\sigma<\sigma_{N,M}<\frac{7}{6}\sigma \tag{2.26}$$

и

$$\left|\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}}-1\right|=\frac{|\sigma^2-\sigma^2_{N,M}|}{\sigma_{N,M}(\sigma+\sigma_{N,M})}<\frac{C_1}{N\cdot\frac{5}{6}\sigma\cdot\frac{5}{6}\sigma}=\frac{9C_2}{55N}<\frac{C_2}{6N}. \tag{2.27}$$

3. Структура семиинвариантов распределения $\mathbf{F_{N,M}}$

Для любых целых чисел $N\geqslant 2$, $N\geqslant 2$ и $k\geqslant 2$, любого упорядоченного набора целых чисел $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ с $0\leqslant n_i\leqslant N-1$ $(i=1,2,\ldots,k)$ и любого натурального числа $p\leqslant k-1$ будем обозначать символом $W_k^{(p)}=W_k^{(p)}(n_1,\ldots,n_k)$ следующее условие: целые числа m_i с $1\leqslant|m_i|\leqslant M$ $(i=1,2,\ldots,k)$ таковы, что $m_1q^{n_1}+m_2q^{n_2}+\cdots+m_kq^{n_k}=0$, но при каждом $r=1,2,\ldots,p$ для любых r попарно различных чисел $j_1,\ldots,j_r$ множества $\{1,2,\ldots,k\}$ выполняется неравенство $m_1q^{n_{j_1}}+m_2q^{n_{j_2}}+\cdots+m_kq^{n_{j_r}}\neq 0$.

При всех указанных значениях величин N,M,k и p положим

$$\nu_k^{(p)}(N,M)=\frac{1}{N^{k/2}}\sum_{\substack{n_1=0\\ [W_k^{(p)}]}}^{N-1}\cdots\sum_{n_k=0}^{N-1}\ \sum_{\substack{m_1=-M\\ [m_1q^{n_1}+m_2q^{n_2}+\cdots+m_kq^{n_k}=0]}}^{M}{}'\cdots\sum_{m_k=-M}^{M}{}'\ a_{m_1}\cdots a_{m_k} \tag{3.1}$$

и заметим, что вследствие оценки (1.1)

$$|\nu_k^{(p)}(N,M)|<\frac{1}{N^{k/2}}N^k\left(2\sum_{m=1}^{M}\frac{A}{\sqrt{m}}\right)^k<(4A\sqrt{NM})^k. \tag{3.2}$$

Заметим еще, что при всех целых $k\geqslant 2$ $\nu_k^{([k/2])}(N,M) = \cdots = \nu_k^{(k-1)}(N,M)$, и положим

$$\gamma_k(N,M) = \nu_k^{([k/2])}(N,M) = \cdots = \nu_k^{(k-1)}(N,M) \quad (k=2,3,\ldots). \tag{3.3}$$

Центральным моментом в доказательстве наших теорем является следующее утверждение.

Лемма 5. *При всех целых $N\geqslant 2$ и $M\geqslant$ и всех вещественных λ справедливо равенство*

$$\varphi_{N,M}(\lambda)=\exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\gamma_k(N,M)}{k!}\right\}. \tag{3.4}$$

Так как $\varphi_{N,M}(\lambda)$ – характеристическая функция распределения $F_{N,M}$, то утверждение леммы означает, что величины $\gamma_k(N,M)$ $(k=2,3,\ldots)$ являются семиинвариантами этого распределения и, в частности,

$$\gamma_2(N,M)=\sigma^2_{N,M}. \tag{3.5}$$

Доказательство леммы. Для краткости вместо $\varphi_{N,M}(\lambda)$, $\nu_k^{(p)}(N,M)$ и $\gamma_k(N,M)$ будем писать просто $\varphi(\lambda)$, $\nu_k^{(p)}$ и γ_k соответственно.

В силу равенств (3.3)

$$\nu_2^{(1)} = \gamma_2. \tag{3.6}$$

Если же $s=2,3,\ldots$, то вследствие равенства (3.1)

$$\nu_{2s}^{(1)}=\frac{1}{N^s}\sum_{n_1=0}^{N-1}\cdots\sum_{n_{2s}=0}^{N-1}\ \underset{\left[m_1q^{n_1}+m_2q^{n_2}+\cdots+m_{2s}q^{n_{2s}}=0\right]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\cdots\sum_{m_{2s}=-M}^{M}{}'}\ a_{m_1}\cdots a_{m_{2s}}=K_s+\sum_{l=0}^{s-2}K_l,$$

где с учетом равенства (3.6)

$$K_s=\cdots+\frac{1}{N^s}\sum_{n_1=0}^{N-1}\cdots\sum_{n_{2s}=0}^{N-1}\ \underset{[B_s]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\cdots\sum_{m_{2s}=-M}^{M}{}'}\ a_{m_1}\cdots a_{m_{2s}}+\cdots=$$

$$=\frac{(2s)!}{2^s s!}\left(\frac{1}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\ \underset{\left[m_1q^{n_1}+m_2q^{n_2}=0\right]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}'\sum_{m_2=-M}^{M}}\ a_{m_1}a_{m_2}\right)^s=\frac{(2s)!\gamma_2^s}{2^s s!},$$

а символом B_s обозначено условие:

$$m_{j_1} q^{n_{j_1}} + m_{j_2} q^{n_{j_2}} = 0, \ldots, m_{j_{2s-1}} q^{n_{j_{2s-1}}} + m_{j_{2s}} q^{n_{j_{2s}}} = 0;$$

$\{j_1, j_2\}, \{j_3, j_4\}, \ldots, \{j_{2s-1}, j_{2s}\}$ — одно из $\dfrac{(2s)!}{2^s s!}$ возможных неупорядоченных разбиений множества $\{1, 2, \ldots, 2s\}$ на s непересекающихся неупорядоченных 2-подмножеств, и где при $l = 0, 1, \ldots, s-2$

$$K_l = \cdots + \frac{1}{N^s} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_{2s}=0}^{N-1} \underset{[B_l]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{m_{2s}=-M}^{M}{}'} a_{m_1} \cdots a_{m_{2s}} + \cdots =$$

$$= C_{2s}^{2l} \frac{(2l)!}{2^l l!} \left(\frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \underset{\left[m_1 q^{n_1} + m_2 q^{n_2} = 0\right]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}' \sum_{m_2=-M}^{M}{}'} a_{m_1} a_{m_2} \right)^l \times$$

$$\times \left(\frac{1}{N^{s-l}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_{2s-2l}=0}^{N-1} \underset{\left[W_{2s-2l}^{(2)}\right]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{m_{2s-2l}=-M}^{M}{}'} a_{m_1} \cdots a_{m_{2s-2l}} \right) = \frac{(2s)!\, \gamma_2^l\, \nu_{2s-2l}^{(2)}}{2^l l!\, (2s-2l)!},$$

а символом B_l обозначено условие:

$$m_{j_1} q^{n_{j_1}} + m_{j_2} q^{n_{j_2}} = 0, \ldots, m_{j_{2l-1}} q^{n_{j_{2l-1}}} + m_{j_{2l}} q^{n_{j_{2l}}} = 0,$$

и выполняется условие $W_{2s-2l}^{(2)}(m_{j_{2l+1}}, \ldots, m_{j_{2s}})$; $\{j_1, j_2\}, \ldots, \{j_{2l-1}, j_{2l}\}$, $\{j_{2l+1}, j_{2s}\}$ — одно из $C_{2s}^{2l} \dfrac{(2l)!}{2^l l!}$ возможных неупорядоченных разбиений множества $\{1, 2, \ldots, 2s\}$ на непересекающиеся l неупорядоченных 2-подмножеств и одно неупорядоченное $(2s-2l)$-подмножество (при $l = 0$ пары $\{j_1, j_2\}, \ldots, \{j_{2l-1}, j_{2l}\}$ отсутствуют). Поэтому при $s = 2, 3, \ldots$ справедливо равенство

$$\nu_{2s}^{(1)} = \frac{(2s)!\, \gamma_2^s}{2^s s!} + \sum_{l=0}^{s-2} \frac{(2s)!\, \gamma_2^l\, \nu_{2s-2l}^{(2)}}{2^l l!\, (2s-2l)!}. \tag{3.7}$$

Рассуждая аналогично и учитывая (3.3), получим, что при $s = 1, 2, \ldots$

$$\nu_{2s+1}^{(1)} = \sum_{l=0}^{s-1} \frac{(2s+1)!\, \gamma_2^l\, \nu_{2s-2l+1}^{(2)}}{2^l l!\, (2s-2l+1)!}. \tag{3.8}$$

Далее в силу равенств (2.11), (2.14) и (3.1) будет:

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_M(q^n t) \right)^k dt =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} \cdot \frac{1}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_k=0}^{N-1} \sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{m_k=-M}^{M}{}' a_{m_1} \cdots a_{m_k} \times$$

$$\times \int_0^1 e^{2\pi i \left(m_1 q^{n_1} + m_2 q^{n_2} + \cdots + m_k q^{n_k}\right) t} dt =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} \cdot \frac{1}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_k=0}^{N-1} \sum_{\substack{m_1=-M \\ [m_1 q^{n_1} + m_2 q^{n_2} + \cdots + m_k q^{n_k}]}}^{M}{}' \cdots \sum_{m_k=-M}^{M}{}' a_{m_1} \cdots a_{m_k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} \nu_k^{(1)} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s}}{(2s)!} \nu_{2s}^{(1)} + i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s+1}}{(2s+1)!} \nu_{2s+1}^{(1)}. \tag{3.9}$$

А так как вследствие оценки (3.2) при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\lambda|^k |\nu_k^{(1)}|}{k!} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\lambda|^k (4A\sqrt{NM}\,)^k}{k!} < e^{4A\lambda\sqrt{NM}} < \infty,$$

то ряд

$$1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} \nu_k^{(1)}, \tag{3.10}$$

определяющий $\varphi(\lambda)$, при всех вещественных λ абсолютно сходится и, значит, члены в нем можно переставлять и группировать как угодно. Поэтому в силу равенств (3.7) и (3.8) из (3.9) следует, что

$$\varphi(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s} \gamma_2^s}{2^s s!} + \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s \lambda^{2s} \sum_{l=0}^{s-2} \frac{\gamma_2^l \, \nu_{2s-2l}^{(2)}}{2^l l! \, (2s-2l)!} +$$

$$+ i \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \lambda^{2s+1} \sum_{l=0}^{s-1} \frac{\gamma_2^l \, \nu_{2s-2l+1}^{(2)}}{2^l l! \, (2s-2l+1)!} = e^{-\frac{\lambda^2 \gamma_2}{2}} + R_1 + i R_2, \tag{3.11}$$

где

$$R_1 = \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s \lambda^{2s} \sum_{l=0}^{s-2} \frac{\gamma_2^l \, \nu_{2s-2l}^{(2)}}{2^l l! \, (2s-2l)!} \tag{3.12}$$

и

$$R_2 = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \lambda^{2s+1} \sum_{l=0}^{s-1} \frac{\gamma_2^l \, \nu_{2s-2l+1}^{(2)}}{2^l l! \, (2s-2l+1)!}. \tag{3.13}$$

Вследствие абсолютной сходимости ряда (3.10) при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$ ряды (3.12) и (3.13) также абсолютно сходятся при всех вещественных λ и, значит, члены в них можно переставлять и группировать как угодно. Поэтому при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$

$$R_1 = \frac{\nu_4^{(2)}}{2!} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s} \gamma_2^{s-2}}{2^{s-2}(s-2)!} + \frac{\nu_6^{(2)}}{6!} \sum_{s=3}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s} \gamma_2^{s-3}}{2^{s-3}(s-3)!} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\nu_{2k}^{(2)}}{(2k)!} \sum_{s=k}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s} \gamma_2^{s-k}}{2^{s-k}(s-k)!} + \cdots = \frac{\lambda^4 \nu_4^{(2)}}{4!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s} \gamma_2^{s}}{2^{s} s!} -$$

$$- \frac{\lambda^6 \nu_6^{(2)}}{6!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s} \gamma_2^{s}}{2^{s} s!} + \cdots + (-1)^k \frac{\lambda^{2k} \nu_{2k}^{(2)}}{(2k)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s} \gamma_2^{s}}{2^{s} s!} +$$

$$+ \cdots = e^{-\frac{\lambda^2 \gamma_2}{2}} \left(\frac{\lambda^4 \nu_4^{(2)}}{4!} - \frac{\lambda^6 \nu_6^{(2)}}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{\lambda^{2k} \nu_{2k}^{(2)}}{(2k)!} + \cdots \right),$$

$$R_2 = \frac{\nu_3^{(2)}}{3!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s+1} \gamma_2^{s-1}}{2^{s-1}(s-1)!} + \frac{\nu_5^{(2)}}{5!} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s+1} \gamma_2^{s-2}}{2^{s-2}(s-2)!} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\nu_{2k+1}^{(2)}}{(2k+1)!} \sum_{s=k}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s+1} \gamma_2^{s-k}}{2^{s-k}(s-k)!} + \cdots = -\frac{\lambda^3 \nu_3^{(2)}}{3!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s} \gamma_2^{s}}{2^{s} s!} +$$

$$+ \frac{\lambda^5 \nu_5^{(2)}}{5!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s} \gamma_2^{s}}{2^{s} s!} - \cdots + (-1)^k \frac{\lambda^{2k+1} \nu_{2k+1}^{(2)}}{(2k+1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \lambda^{2s} \gamma_2^{s}}{2^{s} s!} +$$

$$+ \cdots = e^{-\frac{\lambda^2 \gamma_2}{2}} \left(-\frac{\lambda^3 \nu_3^{(2)}}{3!} + \frac{\lambda^5 \nu_5^{(2)}}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{\lambda^{2k+1} \nu_{2k+1}^{(2)}}{(2k+1)!} + \cdots \right).$$

Отсюда в силу (3.11) следует, что при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$

$$\varphi(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2 \gamma_2}{2}} \left(1 + \frac{(i\lambda)^3 \nu_3^{(2)}}{3!} + \frac{(i\lambda)^4 \nu_4^{(2)}}{4!} + \cdots + \frac{(i\lambda)^k \nu_k^{(2)}}{k!} + \cdots \right) =$$

$$= e^{-\frac{\lambda^2 \gamma_2}{2}} \left(1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k \nu_k^{(2)}}{k!} \right). \tag{3.14}$$

Далее в силу равенств (3.3)

$$\nu_3^{(2)} = \gamma_3. \tag{3.15}$$

Если же $s = 2, 3, \ldots,$ то вследствие равенства (3.1)

$$\nu_{3s}^{(2)} = \frac{1}{N^{3s/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_{3s}=0}^{N-1} \underset{\left[W_{3s}^{(2)}\right]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{m_{3s}=-M}^{M}{}'} a_{m_1} \cdots a_{m_{3s}} = K_s' + \sum_{l=0}^{s-2} K_l',$$

где с учетом равенства (3.14)

$$K'_s = \cdots + \frac{1}{N^{3s/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_{3s}=0}^{N-1} \underset{[B'_s]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{m_{3s}=-M}^{M}{}'} a_{m_1} \cdots a_{m_{3s}} + \cdots =$$

$$= \frac{(3s)!}{6^s s!} \left(\frac{1}{N^{3/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1}{}' \sum_{n_2=0}^{N-1}{}' \sum_{n_3=0}^{N-1}{}' \underset{[W_3^{(2)}]}{\sum_{m_1=-M}^{M} \sum_{m_2=-M}^{M} \sum_{m_2=-M}^{M}} a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3} \right)^s = \frac{(3s)! \gamma_3^s}{6^s s!},$$

а символом B'_s обозначено условие:

$m_{j_1} q^{n_{j_1}} + m_{j_2} q^{n_{j_2}} + !m_{j_3} q^{n_{j_3}} = 0, \ldots, m_{j_{3s-2}} q^{n_{j_{3s-2}}} + m_{j_{3s-1}} q^{n_{j_{3s-1}}} + m_{j_{3s}} q^{n_{j_{3s}}} = 0;$

$\{j_1, j_2\}, \{j_3, \}, \ldots, \{j_{3s-2}, j_{3s-1}, j_{3s}\}$ – одно из $\dfrac{(3s)!}{6^s s!} = C^2_{3s-1} C^2_{3s-4} \cdots C^2_5 C^2_2$ возможных неупорядоченных разбиений множества $\{1, 2, \ldots, 3s\}$ на s непересекающихся неупорядоченных 3-подмножеств, где при $l = 0, 1, \ldots, s-2$

$$K'_l = \cdots + \frac{1}{N^{3s/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_{3s}=0}^{N-1} \underset{[B'_l]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{m_{3s}=-M}^{M}{}'} a_{m_1} \cdots a_{m_{3s}} + \cdots =$$

$$= \frac{(3s)!}{6^l l! (3s-3l)!} \left(\frac{1}{N^{3/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1}{}' \sum_{n_2=0}^{N-1}{}' \sum_{n_3=0}^{N-1}{}' \underset{[W_3^{(2)}]}{\sum_{m_1=-M}^{M} \sum_{m_2=-M}^{M} \sum_{m_3=-M}^{M}} a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3} \right)^l \times$$

$$\times \left(\frac{1}{N^{3(s-)l/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_{3s-3l}=0}^{N-1} \underset{[W^{(3)}_{3s-3l}]}{\sum_{m_1=-M}^{M}{}' \cdots \sum_{m_{3s-3l}=-M}^{M}{}'} a_{m_1} \cdots a_{m_{3s-3l}} \right) = \frac{(3s)! \gamma_3^l \nu^{(3)}_{3s-3l}}{6^l l! (3s-3l)!}$$

и символом B'_l обозначено условие:

$m_{j_1} q^{n_{j_1}} + m_{j_2} q^{n_{j_2}} + m_{j_3} q^{n_{j_3}} = 0, \ldots, m_{j_{3l-2}} q^{n_{j_{3l-2}}} + m_{j_{3l-1}} q^{n_{j_{3l-1}}} + m_{j_{3l}} q^{n_{j_{3l}}} = 0,$

причем выполняется условие

$$W^{(3)}_{3s-3l}(m_{j_{3l+1}}, \ldots, m_{j_{3s}});$$

$\{j_1, j_2\}, j_3\}, \ldots, \{\{j_{3l-2}, j_{3l-1}\}, j_{3l-1}\}, \{j_{3l+1}, j_{3s}\}$ – одно из $C^{3l}_{3s} \dfrac{(3l)!}{6^l l!}$ возможных неупорядоченных разбиений множества $\{1, 2, \ldots, 3s\}$ на непересекающиеся l неупорядоченных 3-подмножеств и одно неупорядоченное

$(3s-3l)$-подмножество (при $l = 0$ тройки $\{j_1, j_2, j_3\}, \ldots, \{j_{3l-2}, j_{3l-2}, j_{3l}\}$ отсутствуют). Поэтому при $s = 2, 3, \ldots$ справедливо равенство

$$\nu_{3s}^{(2)} = \frac{(3s)!\,\gamma_3^s}{6^s s!} + \sum_{l=0}^{s-2} \frac{(3s)!\,\gamma_3^l\,\nu_{3s-3l}^{(2)}}{6^l l!\,(3s-3l)!}. \tag{3.16}$$

Рассуждая аналогично и учитывая (3.3), получим, что при $s = 1, 2, \ldots$

$$\nu_{3s+1}^{(2)} = \sum_{l=0}^{s-1} \frac{(3s+1)!\,\gamma_3^l\,\nu_{3s-3l}^{(2)}}{6^l l!\,(3s-3l+1)!}, \qquad \nu_{3s+2}^{(2)} = \sum_{l=0}^{s-1} \frac{(3s+2)!\,\gamma_3^l\,\nu_{3s-3l}^{(2)}}{6^l l!\,(3s-3l+2)!}. \tag{3.17}$$

Пусть

$$\varphi_1(\lambda) = 1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k \nu_k^{(2)}}{k!} \qquad (-\infty<\lambda<\infty). \tag{3.18}$$

Так как вследствие оценки (3.2) при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{|\lambda|^k |\nu_k^{(2)}|}{k!} < \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|\lambda|^k (4A\sqrt{NM}\,)^k}{k!} < e^{4A|\lambda|\sqrt{NM}} < \infty,$$

то ряд, определяющий $\varphi_1(\lambda)$, при всех вещественных λ абсолютно сходится и, значит, члены в нем можно переставлять и группировать как угодно.

В силу равенств (3.16) и (3.17) из соотношения (3.18) следует, что

$$\varphi_1(\lambda) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{3s} \nu_{3s}^{(2)}}{(3s)!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{3s+1} \nu_{3s+1}^{(2)}}{(3s+1)!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{3s+2} \nu_{3s+2}^{(2)}}{(3s+2)!} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{3s} \gamma_3^s}{6^s s!} +$$
$$+ \sum_{s=2}^{\infty} (i\lambda)^{3s} \sum_{l=0}^{s-2} \frac{\gamma_3^l\,\nu_{3s-3l}^{(3)}}{6^l l!\,(3s-3l)!} + \sum_{s=1}^{\infty} (i\lambda)^{3s+1} \sum_{l=0}^{s-1} \frac{\gamma_3^l\,\nu_{3s-3l+1}^{(3)}}{6^l l!\,(3s-3l+1)!} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty} (i\lambda)^{3s+2} \sum_{l=0}^{s-1} \frac{\gamma_3^l\,\nu_{3s-3l+2}^{(3)}}{6^l l!\,(3s-3l+2)!} = e^{-\frac{i\lambda^3 \gamma_3}{3!}} + R_1' + R_2' + R_3', \tag{3.19}$$

где

$$R_1' = \sum_{s=2}^{\infty} (i\lambda)^{3s} \sum_{l=0}^{s-2} \frac{\gamma_3^l\,\nu_{3s-3l}^{(3)}}{6^l l!\,(3s-3l)!}, \quad R_2' = \sum_{s=1}^{\infty} (i\lambda)^{3s+1} \sum_{l=0}^{s-1} \frac{\gamma_3^l\,\nu_{3s-3l+1}^{(3)}}{6^l l!\,(3s-3l+1)!}, \tag{3.20}$$

$$R_3' = \sum_{s=1}^{\infty} (i\lambda)^{3s+2} \sum_{l=0}^{s-1} \frac{\gamma_3^l\,\nu_{3s-3l+2}^{(3)}}{6^l l!\,(3s-3l+2)!}. \tag{3.21}$$

Вследствие абсолютной сходимости при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$ ряда, определяющего функцию $\varphi_1(\lambda)$, ряды (3.20) и (3.21) при всех вещественных λ также абсолютно сходятся, и, значит, члены в них можно переставлять и группировать как угодно. Поэтому

$$R_1' = \frac{\nu_6^{(3)}}{6!}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s-2}}{6^{s-2}(s-2)!}+\frac{\nu_9^{(3)}}{9!}\sum_{s=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)_{3s}\gamma_3^{s-3}}{6^{s-3}(s-3)!}+\dots+\frac{\nu_{3k}^{(3)}}{(3k)!}\sum_{s=k}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s-k}}{6^{s-k}(s-k)!}+\dots=$$

$$=\frac{(i\lambda)^6\nu_6^{(3)}}{6!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s}}{6^{s}s!}+\frac{(i\lambda)^9\nu_9^{(3)}}{9!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s}}{6^{s}s!}+\dots+\frac{(i\lambda)^{3k}\nu_{3k}^{(3)}}{(3k)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^{3s}\gamma_3^{s}}{6^{s}s!}+$$

$$+\dots=e^{-\frac{(i\lambda)^3\gamma_3}{3!}}\left(\frac{(i\lambda)^6\nu_6^{(3)}}{6!}+\frac{(i\lambda)^9\nu_9^{(3)}}{9!}+\dots+\frac{(i\lambda)^{3k}\nu_{3k}^{(3)}}{(3k)!}+\dots\right)$$

и аналогично

$$R_2' = e^{-\frac{(i\lambda)^3\gamma_3}{3!}}\left(\frac{(i\lambda)^4\nu_4^{(3)}}{4!}+\frac{(i\lambda)^7\nu_7^{(3)}}{7!}+\dots+\frac{(i\lambda)^{3k+1}\nu_{3k+1}^{(3)}}{(3k+1)!}+\dots\right),$$

$$R_3' = e^{-\frac{(i\lambda)^3\gamma_3}{3!}}\left(\frac{(i\lambda)^5\nu_5^{(3)}}{5!}+\frac{(i\lambda)^8\nu_8^{(3)}}{8!}+\dots+\frac{(i\lambda)^{3k+2}\nu_{3k+2}^{(3)}}{(3k+2)!}+\dots\right).$$

Отсюда в силу (3.19) следует, что при всех вещественных λ справедливо равенство

$$\varphi_1(\lambda) = e^{-\frac{i\lambda^3\gamma_3}{3!}}\left(1+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(3)}}{k!}\right). \tag{3.22}$$

Из (3.14), (3.18) и (3.22) вытекает, что при всех $\lambda\in(-\infty,\infty)$ будет:

$$\varphi(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2!}}\varphi_1(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2!}-\frac{i\lambda^3\gamma_3}{3!}}\left(1+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(3)}}{k!}\right).$$

Еще раз повторив наши рассуждения, получаем, что при всех вещественных λ

$$\varphi(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2\gamma_2}{2!}-\frac{i\lambda^3\gamma_3}{3!}+\frac{\lambda^4\gamma_4}{4!}}\left(1+\sum_{k=5}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(4)}}{k!}\right)=$$

$$=e^{\sum\limits_{k=2}^{4}\frac{i\lambda^k\gamma_k}{k!}}\left(1+\sum_{k=5}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\nu_k^{(4)}}{k!}\right)$$

и т. д. Так как в силу оценки (3.2) для любого $\lambda\in(-\infty,\infty)$

$$\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{|\lambda|^k|\nu_k^{(p)}|}{k!}<\sum_{k=p+1}^{\infty}\left(\frac{12A|\lambda|\sqrt{NM}}{p}\right)^k\to\infty$$

при $p\to\infty$, то, продолжая наш процесс, мы при всех вещественных λ придем к равенству (3.4). Лемма 5 доказана.

Следствие. *Справедливо равенство* (3.5).

Замечание. Толчком для построения величин $\gamma_k(N,M)$ посредством формул (3.1) и (3.3) и доказательства леммы 5 послужило именно равенство (3.5), доказанное безотносительно к этой лемме следующим образом. Вследствие равенств (2.11) и (2.13)

$$\sigma^2_{N,M} = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} f_M(q^n t)\right)^2 dt = \frac{1}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\int\limits_0^1 f_M(q^{n_1}t) f_M(q^{n_2}t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} \mathop{{\sum}'\;{\sum}'}_{\substack{m_1=-M \;\; m_2=-M \\ [\,m_1 q^{n_1} \,+\, m_2 q^{n_2} \,=\, 0\,]}}^{M \qquad M} a_{m_1} a_{m_2} \int\limits_0^1 e^{2\pi i (m_1 q^{n_1} + m_2 q^{n_2})}\,dt =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} \mathop{{\sum}'\;{\sum}'}_{\substack{m_1=-M \;\; m_2=-M \\ \left[\,m_1 q^{n_1} \,+\, m_2 q^{n_2} \,=\, 0\,\right]}}^{M \qquad M} a_{m_1} a_{m_2},$$

что и означает справедливость равенства (3.5).

4. Оценка семиинвариантов распределения $\mathbf{F_{N,M}}$

Взяв произвольно целые числа $N \geqslant 2$ и $M \geqslant 2$, будем оценивать семиинварианты $\gamma_k(N,M)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ распределения $F_{N,M}$.

В силу равенства (3.5), оценка семиинварианта $\gamma_2(N,M)$ означает оценку величины $\sigma^2_{N,M}$ и при выполнении условия (2.2) дается неравенством (2.24).

Будем теперь оценивать семиинварианты $\gamma_k(N,M)$ распределения $F_{N,M}$ с $k \geqslant 3$. Вследствие соотношений (1.1), (3.1) и (3.3) имеем:

$$|\gamma_k(N,M)| = \left|\frac{1}{N^{k/2}}\sum_{n_1=0}^{N-1}\cdots\sum_{n_k=0}^{N-1} \mathop{{\sum}'\cdots{\sum}'}_{\substack{m_1=-M \;\; m_k=-M \\ \left[W_k^{(k-1)}(n_1,\ldots,n_k)\right]}}^{M \qquad M} a_{m_1}\cdots a_{m_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A^k}{N^{k/2}}\sum_{n_1=0}^{N-1}\cdots\sum_{n_k=0}^{N-1} \mathop{{\sum}'\cdots{\sum}'}_{\substack{m_1=-M \;\; m_k=-M \\ \left[\,m_1 q^{n_1} + \cdots + m_k q^{n_k} \,=\, 0,\;\; U_k\right]}}^{M \qquad M} \frac{1}{|m_1\cdots m_k|^{\alpha}}, \tag{4.1}$$

где символом U_k обозначено условие: при каждом $r = 2, 3, \ldots, k{-}1$ для любых r попарно различных чисел $j_1, \ldots, j_r$ множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ выполняется неравенство

$$m_1 q^{n_{j_1}} + m_2 q^{n_{j_2}} + \cdots + m_k q^{n_{j_r}} \neq 0. \tag{4.2}$$

Пусть G_k – множество всех упорядоченных наборов целых неотрицательных чисел $n_i \leqslant N-1 \quad (i=1,2,\ldots,k)$, для каждого из которых найдется набор целых чисел $(m_1,\ldots,m_k)$ с условием

$$1 \leqslant |m_i| \leqslant M \quad (i=1,2,\ldots,k), \tag{4.3}$$

такой, что будет справедливо равенство

$$m_1 q^{n_1} + m_2 q^{n_2} + \cdots + m_k q^{n_k} = 0, \tag{4.4}$$

но при этом будет выполняться условие U_k. Количество элементов множества G_k будем обозначать через $\|G_k\|$.

Очевидно, равенство (4.4) порождает уравнение k-мерной гиперплоскости $m_1x_1+\cdots+m_kx_k=0$ с нормальным вектором $(m_1,\ldots,m_k)$, содержащую, в частности, точки вида $(q^{n_1},\ldots,q^{n_k})$. Ясно, что каждая совокупность $\geqslant k$ таких точек, лежащих в одной и той же k-мерной гиперплоскости π, однозначно определяет нормальный вектор $(m_1^0,\ldots,m_k^0)$ со взаимно простыми компонентами $m_i^0 \leqslant M \quad (i=1,2,\ldots,k)$; все остальные нормальные векторы гиперплоскости π с целыми координатами, удовлетворяющими условию (4.3), очевидно, содержатся среди k-мерных векторов $(lm_1^0,\ldots,lm_k^0)$, $\quad l=\pm1,\pm2,\ldots,\pm M$. Поэтому при каждом целом $k \geqslant 3$ в силу неравенства (4.1) мы имеем:

$$|\gamma_k(N,M)| \leqslant \frac{A^k}{N^{k/2}} \sum_{(n_1,\ldots,n_k)\in G_k} \sideset{}{'}\sum_{l=-M}^{M} \frac{1}{|lm_1^0\cdots lm_k^0|^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2A^k}{N^{k/2}} \cdot \|G_k\| \sideset{}{'}\sum_{l=1}^{M} \frac{1}{l^{k\alpha}} \leqslant \frac{2A^k\|G_k\|}{N^{k/2}} \sideset{}{'}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{3/2}} \leqslant \frac{6A^k\|G_k\|}{N^{k/2}}. \tag{4.5}$$

Лемма 6. *При всех целых* $k \geqslant 3$ *справедлива оценка*

$$\|G_k\| < (10^4 \ln M)^{(k-2)/2} N k! \tag{4.6}$$

Доказательство леммы. Возьмем произвольно $(n_1,n_2,\ldots,n_k)\in G_k$. Оставляя пока в стороне тривиальный случай $n_1=n_2=\cdots=n_k$, расположим компоненты взятого набора в порядке невозрастания:

$$N-1 \geqslant n_1^0 = \ldots = n_{u_0}^0 > n_{u_0+1}^0 = \ldots = n_{u_0+u_1}^0 > \ldots > n_{u_0+u_1+\cdots+u_{s-1}+1}^0 =$$

$$= \ldots = n_{u_0+u_1+\cdots+u_s}^0 = n_k^0, \tag{4.7}$$

где $1 \leqslant s \leqslant k-1$, а $(u_0,u_1,\ldots,u_s)$ – набор натуральных чисел с условием

$$u_0+u_1+\cdots+u_s = k. \tag{4.8}$$

Условие (4.7), очевидно, означает, что набор $(n_1^0,n_2^0,\ldots,n_k^0)$ содержит s отрицательных скачков (их мы будем называть также скачками и взятого набора $(n_1, n_2, \dots, n_k)$). Обозначим через $R_{s,j}$ абсолютную величину j-го по порядку следования в наборе $(n_1^0, n_2^0, \dots, n_k^0)$ скачка:

$$R_{s,j} = n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}} - n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}+1} \quad (j=1,2,\dots,s). \tag{4.9}$$

Покажем, что при каждом натуральном $j \leqslant s$ справедливо неравенство

$$R_{s,j} \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln \left[M \left(u_j + \frac{u_{j+1}}{2} + \frac{u_{j+2}}{2^2} + \dots + \frac{u_s}{2^{s-j}} \right) \right]. \tag{4.10}$$

Действительно, если предположить, что для какого-то натурального числа $j \leqslant s$ неравенство (4.10) не выполняется, то для этого j будет:

$$M \left(u_j + \frac{u_{j+1}}{q} + \frac{u_{j+2}}{q^2} + \dots + \frac{u_s}{q^{s-j}} \right) < q^{R_{s,j}},$$

а значит, для некоторого набора целых чисел $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ с условием (4.3), удовлетворяющего равенству (4.4) и условию U_k, в силу соотношения (4.9), будет:

$$\left| m_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}+1} q^{n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}+1}} + \dots + m_k q^{n_k^0} \right| \leqslant M q^{n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}+1}} \times$$

$$\times \left(u_j + \frac{u_{j+1}}{q} + q \dots + \frac{u_s}{q^{s-j}} \right) < q^{n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}+1} + R_{s,j}} = q^{n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}}}. \tag{4.11}$$

Но

$$\left(m_1 q^{n_1^0} + \dots + m_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}} q^{n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}}} \right) \vdots\, q^{n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}}}.$$

Поэтому вследствие равенства (4.4) будет выполняться соотношение

$$\left(m_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}+1} q^{n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}+1}} + \dots + m_k q^{n_k^0} \right) \vdots\, q^{n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}}},$$

что в силу (4.11) возможно лишь при

$$m_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}+1} q^{n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}+1}} + \dots + m_k q^{n_k^0} = 0,$$

т. е. при

$$m_1 q^{n_1^0} + \dots + m_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}} q^{n^0_{u_0+u_1+\dots+u_{j-1}}} = 0.$$

А это противоречит условию U_k, конкретно неравенству (4.2) с $r = u_0 + u_1 + \dots + u_{j-1}$. Неравенство (4.10) с любым натуральным $j \leqslant s$ доказано.

Положим $D_s = R_{s,1} R_{s,2} \cdots R_{s,s}$ $(s = 1, 2, \dots, k-1)$ и докажем справедливость оценки

$$D_s = \left(\frac{3}{2}\ln\frac{2M(k-1)}{s}\right)^s. \tag{4.12}$$

Действительно, в силу соотношений (4.8) и (4.10) и и с учетом того, что среднее геометрическое положительных чисел не больше их среднего арифметического, мы имеем:

$$D_s \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^s}\ln\left[M\left(u_1+\frac{u_2}{2}+\dots+\frac{u_s}{2^{s-1}}\right)\right]\cdot\ln\left[M\left(u_2+\dots+\frac{u_s}{2^{s-2}}\right)\right]\cdots\ln(Mu_s)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{(s\ln 2)^s}\left\{\ln\left[M\left(u_1+\frac{u_2}{2}+\dots+\frac{u_s}{2^{s-1}}\right)\right]+\ln\left[M\left(u_2+\frac{u_3}{2}+\dots+\frac{u_s}{2^{s-2}}\right)\right]+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\ln(Mu_s)\right\} = \frac{1}{(s\ln 2)^s}\left\{\ln\left[M^s\left(u_1+\frac{u_2}{2}+\dots+\frac{u_s}{2^{s-1}}\right)\left(u_2+\frac{u_3}{2}+\dots+\frac{u_s}{2^{s-2}}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(u_{s-1}+\frac{u_2}{2}\right)u_s\right]\right\}^s\leqslant\leqslant\frac{1}{(s\ln 2)^s}\ln^s\left\{M^s\cdot\frac{1}{s^s}\left[\left(u_1+\frac{u_2}{2}+\dots+\frac{u_s}{2^{s-1}}\right)+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots+\left(u_{s-1}+\frac{u_2}{2}\right)+u_s\right]^s\right\} = \frac{1}{(s\ln 2)^s}s^s\ln^s\left\{\frac{M}{s}\left[\left(u_1+\frac{u_2}{2}+\dots+\frac{u_s}{2^{s-1}}\right)+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots+\left(u_{s-1}+\frac{u_2}{2}\right)+u_s\right]\right\} = \frac{1}{(\ln 2)^s}\cdot\ln^s\left\{\frac{M}{s}\left[u_1+\left(1+\frac{1}{2}\right)u_2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)u_3+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{s-2}}\right)u_{s-1}+\dots+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{s-1}}\right)u_s\right]\right\}<$$
$$<\left(\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{2M(u_1+u_2+\dots+u_s)}{s}\right)^s<\left(\frac{3}{2}\ln\frac{2M(k-1)}{s}\right)^s.$$

Для $s=1,2,\dots,k-1$ мы обозначаем через $H_{k,s}$ множество всех наборов $(n_1,\dots,n_k)\in G_k$, каждый из которых содержит по s скачков. Тогда, учитывая и тривиальный случай $n_1=n_2=\ldots=n_k$, будем иметь:

$$||G_k||\leqslant N+\sum_{s=1}^{k-1}||H_{k,s}||, \tag{4.13}$$

где символом $||H_{k,s}||$ обозначено число элементов множества $H_{k,s}$. Взяв произвольно натуральные числа $s\leqslant k-1$ и $l\leqslant k-1$, обозначим через $Q_{s,l}$ множество всех наборов $(n_1,n_2,\dots,n_k)\in H_{k,s}$, для каждого из которых наборы целых чисел $(m_1,m_2,\dots,m_k)$ с условием (4.3), удовлетворяющие равенству (4.4), содержат по l положительных и $k-l$ отрицательных компонент: $m_{i_v}>0$ $(v=1,2,\dots,l)$ и $m_{i_v}<0$ $(v=l+1,l+2,\dots,k)$, а через $||Q_{s,l}||$ будем обозначать число элементов этого множества. Для каждого такого набора $(m_1,m_2,\dots,m_k)$ мы полагаем $\mu_v=m_{i_v}$, $\rho_v=n_{i_v}$ $(v=1,2,\dots,l)$, $\nu_v=-m_{i_{l+v}}$, $\tau_v=n_{i_{l+v}}$ $(v=1,2,\dots,k-l)$

и переписываем уравнение (4.4) в виде

$$\mu_1 q^{\rho_1} + \dots + \mu_l q^{\rho_l} = \nu_1 q^{\tau_1} + \dots + \nu_{k-l} q^{\tau_{k-l}}. \tag{4.14}$$

Заметим, что при $s = k-1$ общее число скачков набора $(n_1, n_2, \dots, n_k)$, "попавших" в наборы $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l)$ и $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-l})$, равно не s, а $s-1$, т. е. равно $k-2$, поскольку в данном случае при переходе от одного из этих двух наборов к другому один скачок теряется.

Если произведение абсолютных величин скачков набора $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in Q_{s,l}$, попавших в набор $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l)$, не больше произведения абсолютных величин скачков набора $(n_1, n_2, \dots, n_k)$, попавших в набор $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-l})$, т. е. $\leqslant \sqrt{D_s}$ при $s \leqslant k-2$ и $\leqslant \sqrt{D_{s-1}}$ при $s \leqslant k-1$, то будем считать показатели ρ_v (и, соответственно, коэффициенты μ_v) занумерованными так, чтобы было $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \dots \geqslant \rho_l$. Так как при таком соглашении количество наборов $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in Q_{s,l}$ не более чем в $l!$ раз больше числа решений уравнения (4.14) в целых числах $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-l}$, то, придавая в (4.14) переменным $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-l}$ все возможные значения, мы получим при $s \leqslant k-2$ не более $N\sqrt{D_s}$, а при $s = k-1$ не более $N\sqrt{D_{k-2}}$ значений левой части, для каждого из которых правая часть, в силу леммы Р.Х. Мухутдинова [5] (см. также [1, с. 78, лемма 1]), принимает не более $2^{k-l}(k-l)!$ значений. Следовательно, при $s \leqslant k-2$ будет

$$||Q_{s,l}|| \leqslant l! N \sqrt{D_s} \cdot 2^k (k-l)! < 2^{k-l} N \sqrt{D_s}\, l!(k-l)!, \tag{4.15}$$

а при $s = k-1$

$$||Q_{s,l}|| \leqslant l! N \sqrt{D_{s-1}} \cdot 2^k (k-l)! < 2^{k-l} N \sqrt{D_{k-2}}\, l!(k-l)! \tag{4.16}$$

Если же произведение абсолютных величин скачков набора $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in Q_{s,l}$, попавших в набор $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l)$, больше произведения абсолютных величин скачков набора $(n_1, n_2, \dots, n_k)$, попавших в набор $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-l})$, которое при $s \leqslant k-2$ меньше $N\sqrt{D_s}$, а при $s = k-1$ меньше $N\sqrt{D_{k-2}}$, то будем считать показатели τ_v (и, соответственно, коэффициенты ν_v) занумерованными так, чтобы было $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \dots \geqslant \tau_{k-l}$. А так как при таком соглашении количество наборов $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in Q_{s,l}$ не более чем в $(k-l)!$ раз больше числа решений уравнения (4.14) в целых числах $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-l}$, то, придавая в (4.14) переменным $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-l}$ все возможные значения, мы получим при $s \leqslant k-2$ не более $N\sqrt{D_s}$, а при $s = k-1$ не более $N\sqrt{D_{k-2}}$ значений правой части, для каждого из которых левая часть, в силу упомянутой леммы Р.Х. Мухутдинова, принимает не более $2^l l!$ значений. Следовательно, в рассматриваемом случае при $s \leqslant k-2$

$$||Q_{s,l}|| \leqslant (k-l)!N\sqrt{D_s}\cdot 2^l l! < 2^k N\sqrt{D_s}\, l!(k-l)!, \tag{4.17}$$

а при $s = k-1$

$$||Q_{s,l}|| \leqslant (k-l)!N\sqrt{D_{s-1}}\cdot 2^l l! < 2^k N\sqrt{D_{k-2}}\, l!(k-l)! \tag{4.18}$$

В силу неравенств (4.15)–(4.18), при всех $s = 1, 2, \ldots, k-2$

$$||H_{k,s}|| < \sum_{l=1}^{k-1} C_k^l \cdot 2^k N\sqrt{D_s}\, l!(k-l)! = (k-1)2^k k! N\sqrt{D_s},$$

а при $s = k-1$

$$||H_{k,s}|| < \sum_{l=1}^{k-1} C_k^l \cdot 2^k N\sqrt{D_{k-2}}\, l!(k-l)! = (k-1)2^k k! N\sqrt{D_{k-2}}.$$

Отсюда вследствие неравенств (4.12) и (4.13) мы получаем:

$$||G_k|| < N + (k-1)2^k k! N\left(\sum_{s=1}^{k-2}\sqrt{D_s} + \sqrt{D_{k-2}}\right) < N + k\,2^k k! N \times$$

$$\times 2\sum_{s=1}^{k-2}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{2M(k-1)}{s}\right)^{s/2} < 6^{k-1} k! N \sum_{s=1}^{k-2}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{8M(k-1)}{s}\right)^{s/2} \tag{4.19}$$

(увеличение в 4 раза аргумента у логарифма под знаком суммы вызвано лишь желанием упростить оценивание этой суммы).

Из неравенства (4.19) сразу же вытекает оценка (4.6) для случая $k = 3$:

$$||G_3|| < 6^2\, 3! N\left[\frac{3}{2}\ln(16M)\right]^{1/2} < \left[2\cdot 10^3\left(1 + \frac{\ln 16}{\ln 2}\right)\right]^{1/2} 3!N = \left(10^4 \ln M\right)^{1/2} 3!N.$$

Обратимся к случаю $k \geqslant 4$. Покажем, что здесь при любом натуральном $s \leqslant k-3$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{3}{2}\ln\frac{8M(k-1)}{s+1}\right)^{(s+1)/2} > \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{8M(k-1)}{s}\right)^{s/2}. \tag{4.20}$$

Действительно, при $1 \leqslant s \leqslant k-3$ мы имеем:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\ln\frac{8M(k-1)}{s+1}\right)^{(s+1)/2}}{\left(\frac{3}{2}\ln\frac{8M(k-1)}{s}\right)^{s/2}} = \left(\frac{\ln\frac{8M(k-1)}{s+1}}{\ln\frac{8M(k-1)}{s}}\right)^{s/2}\sqrt{\frac{3}{2}\ln\frac{8M(k-1)}{s+1}} \geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{\ln\frac{8M(k-1)}{s}-\ln\frac{s+1}{s}}{\ln\frac{8M(k-1)}{s}}\right)^{s/2}\sqrt{\frac{3}{2}\ln\frac{8M(k-1)}{s+1}}\geqslant\left(1-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)}{\ln\frac{8M(k-1)}{k-3}}\right)^{s/2}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{3}{2}\ln(8M)}\geqslant\left(1-\frac{1}{s\ln(8M)}\right)^{s/2}\sqrt{\frac{3}{2}\ln(8M)}\geqslant\left(1-\frac{1}{2\ln(8M)}\right)\sqrt{\frac{3}{2}\ln(8M)}\geqslant$$

$$\geqslant\left(1-\frac{1}{2\ln(16M)}\right)\sqrt{\frac{3}{2}\ln 16}=\left(1-\frac{1}{8\ln 2}\right)\sqrt{6\ln 2}>\left(1-\frac{3}{16}\right)\sqrt{4}>\frac{3}{2}.$$

Из (4.19) и (4.20) вытекает оценка (4.6) и для случая $k\geqslant 4$:

$$\|G_k\|<6^{k-1}k!N\cdot\frac{3}{2}\left[\frac{3}{2}\ln\frac{8M(k-1)}{k-2}\right]^{(k-2)/2}<k!N[5\cdot 10^2\ln(8M)]^{(k-2)/2}=k!N\times$$

$$\times\left[5\cdot 10^2\left(1+\frac{\ln 8}{\ln M}\right)\ln M\right]^{(k-2)/2}\leqslant k!N\left(2\cdot 10^3\ln M\right)^{(k-2)/2}<k!N\left(10^4\ln M\right)^{(k-2)/2}.$$

Лемма 6 доказана.

Из неравенств (4.5) и (4.6) следует, что при всех целых $k\geqslant 3$

$$|\gamma_k(N,M)|<\frac{6A^k(10^4\ln M)^{(k-2)/2}Nk!}{N^{k/2}}=6A^2\left(\frac{10^4A^2\ln M}{N}\right)^{(k-2)/2}\cdot k! \quad (4.21)$$

5. Завершение доказательства теоремы 4

Пусть целое число $N\geqslant\max(2,C_2)$ и $M=[N^{3/(2\alpha-1)}]+1$, а значит, выполняется условие (2.2). Будем ради краткости вместо $F_{N,M}(x)$, $\varphi_{N,M}(\lambda)$, $\gamma_k(N,M)$ и $\sigma_{N,M}$ писать, соответственно, $\widehat{F}_N(x)$, $\widehat{\varphi}_N(\lambda)$, $\widehat{\gamma}_k(N)$ и $\widehat{\sigma}_N$. Вследствие неравенств (2.22)—(2.27), равенств (3.4) и (3.5) и оценки (4.21) справедливы следующие соотношения:

$$\widehat{F}_N\left(\sigma x-\frac{1}{N}\right)\leqslant F_N(\sigma x)\leqslant\widehat{F}_N\left(\sigma x+\frac{1}{N}\right)+\frac{4D}{N}, \quad (5.1)$$

$$|\widehat{\sigma}_N^2-\sigma^2|<\frac{C_1}{N}\leqslant\frac{\sigma^2}{4},\ \frac{3\sigma^2}{4}<\widehat{\sigma}_N^2<\frac{5\sigma^2}{4},1-\frac{C_2}{6N}<\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}_N}<1+\frac{C_2}{6N},\ \frac{5}{6}\sigma<\widehat{\sigma}_N<\frac{7}{6}\sigma, \quad (5.2)$$

$$\widehat{\varphi}_N(\lambda)=\exp\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\widehat{\gamma}_k(N)}{k!}\right\},\quad \widehat{\gamma}_2(N)=\widehat{\sigma}_N^2, \quad (5.3)$$

$$|\widehat{\gamma}_k(N)|<6A^2\left(\frac{10^4A^2}{N}\frac{4\ln N}{2\alpha-1}\right)^{(k-2)/2}\cdot k!=6A^2\left(\frac{10^4D\ln N}{N}\right)^{(k-2)/2}\cdot k! \quad (5.4)$$

Положим еще

$$C_3 = \frac{\sigma^2}{10^2\sqrt{D}(10^2A^2+2\sigma^2)}, \quad C_4 = 12{\cdot}10^2A^2\sqrt{D}+C_1. \tag{5.5}$$

Лемма 7. *При всех вещественных* λ, *удовлетворяющих условию*

$$|\lambda|\leqslant C_3\sqrt{N/\ln N}, \tag{5.6}$$

выполняется оценка

$$\left|\widehat{\varphi}_N(\lambda)-e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\right|\leqslant\frac{C_4(|\lambda^3|+\lambda^2)}{\sqrt{N/\ln N}}e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{4}}. \tag{5.7}$$

Доказательство леммы. При всех вещественных λ мы имеем:

$$\left|\widehat{\varphi}_N(\lambda)-e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\right|\leqslant\left|\widehat{\varphi}_N(\lambda)-e^{-\frac{\widehat{\sigma}_N^2\lambda^2}{2}}\right|+\left|e^{-\frac{\widehat{\sigma}_N^2\lambda^2}{2}}-e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\right|. \tag{5.8}$$

Далее, поскольку для любого комплексного числа z $|e^z-1|\leqslant|z|e^{|z|}$, то в силу соотношений (5.1)—(5.3) будет:

$$\left|\widehat{\varphi}_N(\lambda)-e^{-\frac{\widehat{\sigma}_N^2\lambda^2}{2}}\right|=\left|e^{\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\widehat{\gamma}_k(N)}{k!}}-e^{-\frac{\widehat{\sigma}_N^2\lambda^2}{2}}\right|=e^{-\frac{\widehat{\sigma}_N^2\lambda^2}{2}}\cdot\left|e^{\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\widehat{\gamma}_k(N)}{k!}}-1\right|\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{\widehat{\sigma}_N^2\lambda^2}{2}}\cdot\cdot\left|\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\widehat{\gamma}_k(N)}{k!}\right|\cdot e^{\left|\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{(i\lambda)^k\widehat{\gamma}_k(N)}{k!}\right|}\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{3\sigma^2\lambda^2}{8}}\cdot\sum_{k=3}^{\infty}\frac{|\lambda|^k|\widehat{\gamma}_k(N)|}{k!}\cdot e^{\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{|\lambda|^k|\widehat{\gamma}_k(N)|}{k!}} \tag{5.9}$$

и

$$\left|e^{-\frac{\widehat{\sigma}_N^2\lambda^2}{2}}-e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\right|=e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\cdot\left|e^{-\frac{(\widehat{\sigma}_N^2-\sigma^2)\lambda^2}{2}}-1\right|\leqslant e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\frac{|\widehat{\sigma}_N^2-\sigma^2|\lambda^2}{2}\times$$

$$\times e^{\frac{|\widehat{\sigma}_N^2-\sigma^2|\lambda^2}{2}}<e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\cdot\frac{C_1\lambda^2}{2N}e^{\frac{\sigma^2\lambda^2}{8}}=\frac{C_1\lambda^2}{2N}e^{-\frac{3\sigma^2\lambda^2}{8}}. \tag{5.10}$$

Если выполняются неравенство (5.6) и равенства (5.5), то

$$C_3\leqslant\frac{1}{2{\cdot}10^2\sqrt{D}},\ C_3\leqslant\frac{\sigma^2}{10^4A^2\sqrt{D}},\ \frac{10^2\sqrt{D}|\lambda|}{\sqrt{N/\ln N}}\leqslant\frac{|\lambda|}{2C_3\sqrt{N/\ln N}}\leqslant\frac{C_3\sqrt{N/\ln N}}{2C_3\sqrt{N/\ln N}}=\frac{1}{2},$$

а значит, в силу оценки (5.4)

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{|\lambda|^k|\widehat{\gamma}_k(N)|}{k!}<6A^2\lambda^2\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{10^2\sqrt{D}|\lambda|}{\sqrt{N/\ln N}}\right)^{k-2} = 6A^2\lambda^2\,\frac{10^2\sqrt{D}|\lambda|}{\sqrt{N/\ln N}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{10^2\sqrt{D}|\lambda|}{\sqrt{N/\ln N}}\right)^{k}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{6\cdot 10^2A^2\sqrt{D}|\lambda|^3}{\sqrt{N/\ln N}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{12\cdot 10^2A^2\sqrt{D}|\lambda|^3}{\sqrt{N/\ln N}}\leqslant\frac{12\cdot 10^2A^2\sqrt{D}\lambda^2}{\sqrt{N/\ln N}}C_3\sqrt{N/\ln N} =$$

$$= 12\cdot 10^2A^2\sqrt{D}\lambda^2C_3\leqslant\frac{12\cdot 10^2A^2\sqrt{D}\lambda^2\sigma^2}{10^4A^2\sqrt{D}} = \frac{12\sigma^2\lambda^2}{10^2}<\frac{\sigma^2\lambda^2}{8}. \tag{5.11}$$

Вследствие соотношений (5.5), (5.8), (5.9), (5.10) и (5.11) и при всех вещественных λ, удовлетворяющих условию (5.6), выполняется неравенство (5.7):

$$\left|\widehat{\varphi}_N(\lambda)-e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}\right|\leqslant e^{-\frac{3\sigma^2\lambda^2}{8}}\cdot\frac{12\cdot 10^2A^2\sqrt{D}|\lambda|^3}{\sqrt{N/\ln N}}e^{\frac{\sigma^2\lambda^2}{8}}+e^{-\frac{3\sigma^2\lambda^2}{8}}\frac{C_1\lambda^2}{2N}\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{4}}\frac{12\cdot 10^2A^2\sqrt{D}|\lambda|^3+C_1\lambda^2}{\sqrt{N/\ln N}}\leqslant\frac{C_4(|\lambda|^3+\lambda^2)}{\sqrt{N/\ln N}}e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{4}}.$$

Лемма 7 доказана.

Из неравенства (5.7), справедливого при всех вещественных λ, удовлетворяющих условию (5.6), применяя теорему Эссеена [10, с. 211, теорема 1 или 11, с. 137, теорема 2], выводим, что при $N\to\infty$ равномерно относительно x, $-\infty<x<\infty$ будет:

$$\widehat{F}_N(\widehat{\sigma}_Nx) = \Phi(x)+O\left(\sqrt{\frac{\ln N}{N}}\right),$$

а значит, выполняется сотношение

$$\widehat{F}_N(\sigma x) = \Phi\left(\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}_N}x\right)+O\left(\sqrt{\frac{\ln N}{N}}\right) \tag{5.12}$$

с постоянной в символе "O", зависящей от A,α и σ.

Далее в силу неравенств (5.2) и $N\geqslant C_2$ при любом вещественном x

$$\left|\Phi\left(\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}_N}x\right)-\Phi(x)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_x^{\sigma x/\widehat{\sigma}_N}e^{-t^2/2}\mathrm{dt}\right|<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}_N}x-x\right|\cdot e^{-(1-C/(\sigma N))^2x^2/2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}_N}-1\right|e^{-(1-1/6)^2x^2/2}<\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\frac{C_2}{6N}e^{-x^2/3}<\frac{C_2}{6\sqrt{2\pi}N}$$

и, следовательно, из (5.12) следует, что при $n\to\infty$ равномерно относительно x, $-\infty<x<\infty$

$$\widehat{F}_N(\sigma x) = \Phi(x)+O\left(\sqrt{\frac{\ln N}{N}}\right),$$

а при замене x на $x+\dfrac{1}{\sigma N}$ или на $x-\dfrac{1}{\sigma N}$ – соотношение

$$\widehat{F}_N\left(\sigma x\pm\frac{1}{N}\right) = \Phi\left(x\pm\frac{1}{\sigma N}\right)+O\left(\sqrt{\frac{\ln N}{N}}\right). \tag{5.13}$$

А поскольку при любом вещественном x

$$\left|\Phi\left(x\pm\frac{1}{\sigma N}\right)-\Phi(x)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_x^{x\pm1/(\sigma N)} e^{-t^2/2}\mathrm{dt}\right|<\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma N},$$

то из соотношений (5.13) следует, что при $n\to\infty$ равномерно относительно x, $-\infty<x<\infty$

$$\widehat{F}_N\left(\sigma x\pm\frac{1}{N}\right) = \Phi(x)+O\left(\sqrt{\frac{\ln N}{N}}\right).$$

Отсюда в силу (5.1) вытекает справедливость соотношения (1.10). Теорема 4 доказана.

6. Завершение доказательства теоремы 5

Пусть целые числа $N\geqslant\max(2,C_2)$ и $M\geqslant2$ выбраны так, что выполняются условие (2.22), а значит, и соотношения (2.23)—(2.27). Положим

$$C_4=\min\left(1,\frac{\sigma^2}{8A^2}\right),\ \ \Delta_{N,M}=\sigma_{N,M}\cdot\inf_{k\geqslant3}\left(\frac{k!\sigma^2_{N,M}}{|\gamma_k(N,M)|}\right)^{1/(k-2)}.$$

Вследствие соотношений (2.26) и (4.21)

$$\Delta_{N,M}>\frac{5\sigma}{6}\inf_{k\geqslant3}\left[\frac{3\sigma^2}{4}\frac{1}{6A^2}\left(\frac{N/\ln M}{10^4A^2}\right)^{(k-2)/2}\right]^{1/(k-2)}=$$

$$=\frac{5\sigma}{6}\frac{\sqrt{N/M}}{10^2A}\inf_{k\geqslant3}\left(\frac{\sigma^2}{8A^2}\right)^{1/(k-2)}\geqslant\frac{\sigma\sqrt{N/\ln M}}{120A}\min\left(1,\frac{\sigma^2}{8A^2}\right)=C_4\sqrt{\frac{N}{\ln M}}, \tag{6.1}$$

а в силу теоремы В.А. Статулявичуса о восстановлении асимптотики больших уклонений по семиинвариантам распределения [11, с. 307, § 18.4.10; 12] существует абсолютная положительная постоянная δ_0, меньшая единицы, такая, что для любого числа $\delta\in(0,\delta_0)$ при всех x, удовлетворяющих неравенствам $1\leqslant x\leqslant\delta\Delta_{N,M}$, при $N\to\infty$

$$\frac{1-F_{N,M}(\sigma_{N,M}x)}{1-\Phi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\Delta_{N,M}}\lambda\left(\frac{x}{\Delta_{N,M}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{\Delta_{N,M}}\right)\right]$$

и

$$\frac{\widehat{F}_{N,M}(-\sigma_{N,M}x)}{\Phi(-x)}=\exp\left\{-\frac{x^3}{\Delta_{N,M}}\lambda\left(-\frac{x}{\Delta_{N,M}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{\Delta_{N,M}}\right)\right],$$

где постоянные в символах "O" зависят лишь от δ, а $\lambda(\tau)$ – степенной ряд Крамера, сходящийся в области $|\tau|<\delta_0$. Но тогда, взяв $\delta = \delta_0/2$, мы в силу неравенств (6.1) и сходимости ряда Крамера в области $|\tau|<\delta_0$ получаем, что при всех вещественных x, удовлетворяющих неравенствам $1\leqslant x\leqslant \delta C_4\sqrt{N/\ln M}$, при $N\to\infty$ выполняются соотношения

$$1-F_{N,M}(\sigma_{N,M}x) = [1-\Phi(x)]\cdot\exp\left\{O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N/\ln M}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N/\ln M}}\right)\right]$$

и

$$F_{N,M}(-\sigma_{N,M}x) = \Phi(-x)\cdot\exp\left\{O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N/\ln M}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N/\ln M}}\right)\right]$$

с постоянными в символах "O", зависящими от A,α и σ. Поэтому найдется постоянная $C_5>0$, зависящая от A,α и σ, такая, что в области

$$1\leqslant x\leqslant C_5(N/\ln M)^{1/6} \qquad (6.2)$$

при $N\to\infty$ выполняются соотношения

$$1-F_{N,M}(\sigma_{N,M}x) = [1-\Phi(x)]\left[1+O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N/\ln M}}\right)\right] \qquad (6.3)$$

и

$$F_{N,M}(-\sigma_{N,M}x) = \Phi(-x)\left[1+O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N/\ln M}}\right)\right] \qquad (6.4)$$

с постоянными в символах "O", зависящими от A,α и σ.

Естественно, в соотношениях (6.2)—(6.4) значения N должны быть столь большими, чтобы выполнялось неравенство $C_5(N/\ln M)^{1/6}\geqslant 1$. Мы будем считать, что выполняется более сильное неравенство

$$C_5(N/\ln M)^{1/6}\geqslant 3. \qquad (6.5)$$

Заменяя в соотношениях (6.2)–(6.4) x на $\dfrac{\sigma x+a/N}{\sigma_{N,M}}$, где $a = \pm 1$, получим, соответственно, соотношения

$$1\leqslant\frac{\sigma x+a/N}{\sigma_{N,M}}\leqslant C_5(N/\ln M)^{1/6}, \qquad (6.6)$$

$$1-F_{N,M}(\sigma_{N,M}x) = [1-\Phi(x)]\left[1+O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N/\ln M}}\right)\right] \qquad (6.7)$$

и

$$F_{N,M}(-\sigma_{N,M}x) = \Phi(-x)\left[1+O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N/\ln M}}\right)\right]. \qquad (6.8)$$

Перепишем неравенства (6.6) в равносильном виде:

$$\frac{\sigma_{N,M}}{\sigma}-\frac{a}{\sigma N}\leqslant\frac{\sigma_{N,M}}{\sigma}C_5(N/\ln M)^{1/6}-\frac{a}{\sigma N}. \qquad (6.9)$$

Будем считать еще, что $N \geqslant \frac{2}{\sigma}$. В силу (2.26) получаем:

$$\frac{\sigma_{N,M}}{\sigma} - \frac{a}{\sigma N} < \frac{7}{6} + \frac{1}{2} < 2,$$

а с учетом неравенства (6.5)

$$\frac{\sigma_{N,M}}{\sigma} C_5 (N/\ln M)^{1/6} - \frac{a}{\sigma N} > \frac{5}{6} C_5 (N/\ln M)^{1/6} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}(5C_5(N/\ln M)^{1/6} - 3) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{6}(5C_5(N/\ln M)^{1/6} - C_5(N/\ln M)^{1/6}) = \frac{2}{3} C_5 (N/\ln M)^{1/6} \geqslant \frac{2}{3} 3 = 2.$$

Следовательно, область

$$2 \leqslant x \leqslant C_6 (N/\ln M)^{1/6}, \tag{6.10}$$

где $C_6 = 2C_5/3$, содержится в промежутке (6.9), а значит, соотношения (6.7) и (6.8) в области (6.10) выполняются.

Положим $C_7 = \frac{C}{6} + \frac{6}{5\sigma}$ и будем считать еще, что $N \geqslant 2C_7$. Поскольку при $x > 0$

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2} \Big(1 - \frac{\theta}{x^2}\Big) \quad (0 < \theta < 1)$$

[13, с. 248], мы при $x \geqslant 2$ получаем:

$$1 - \Phi(x) = \frac{3}{10x} e^{-x^2/2}. \tag{6.11}$$

Поэтому для любого вещественного x из области (6.10) мы с учетом оценок (2.26) и (2.27) будем иметь:

$$\frac{1 - \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} x + \frac{a}{\sigma_{N,M} N}\right)}{1 - \Phi(x)} = 1 + \frac{\Phi(x) - \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} x + \frac{a}{\sigma_{N,M} N}\right)}{1 - \Phi(x)} =$$

$$= 1 + O\left(x e^{x^2/2} \left| \Phi\left(x + \frac{C_2}{6N} x + \frac{6}{5\sigma N}\right) - \Phi\left(x - \frac{C_2}{6N} x - \frac{6}{5\sigma N}\right) \right| \right) =$$

$$= 1 + O\left(x e^{x^2/2} \left| \Phi\left(\left(1 + \frac{C_7}{N}\right) x\right) - \Phi\left(\left(1 - \frac{C_7}{N}\right) x\right) \right| \right) =$$

$$= 1 + O\left(x e^{x^2/2} \int\limits_{(1 - C_7/N)x}^{(1 + C_7/N)x} e^{-t^2/2} \mathrm{dt}\right) = 1 + O\left(x e^{x^2/2} \cdot e^{-(1 - C_7/N)^2 x^2/2} \frac{x}{N}\right) =$$

$$= 1 + O\left(\frac{x^2}{N} e^{\left(1 - (C_7/N)^2\right) x^2/2}\right) = 1 + O\left(\frac{x^2}{N} e^{C_7 x^2/N}\right) = 1 + O\Big(\frac{x^2}{N}\Big),$$

т. е.

$$1 - \Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}} x + \frac{a}{\sigma_{N,M} N}\right) = [1 - \Phi(x)] \Big[1 + \Big(\frac{x^2}{N}\Big)\Big]$$

и аналогично

$$\Phi\Big(-\frac{\sigma}{\sigma_{N,M}}x-\frac{a}{\sigma_{N,M}N}\Big) = \Phi(-x)\Big[1+\Big(\frac{x^2}{N}\Big)\Big].$$

Но тогда из соотношений (6.7) и (6.8) будет вытекать, что для любого вещественного x из области (6.10) при $N\to\infty$ справедливы соотношения

$$1-F_{N,M}\Big(\sigma x+\frac{a}{N}\Big) = [1-\Phi(x)]\Big[1+\Big(\frac{x^2}{N}\Big)\Big] \tag{6.12}$$

и

$$F_{N,M}\Big(-\sigma x-\frac{a}{N}\Big) = \Phi(-x)\Big[1+\Big(\frac{x^2}{N}\Big)\Big] \tag{6.13}$$

с постоянными в символах "O", зависящими от A, α и σ.

Положим $C_8 = C_6^{3/4}\Big(\frac{2\alpha-1}{6}\Big)^{1/8}$ и будем считать число N столь большим, что выполняется неравенство

$$C_8^2N^{1/4}\geqslant \ln N. \tag{6.14}$$

Пусть $s\geqslant 3$ – произвольное целое число, удовлетворяющее неравенству

$$s\leqslant C_8N^{1/8}, \tag{6.15}$$

$$M_s = [Ne^{s^2}]^{3/(2\alpha-1)}, \tag{6.16}$$

что не противоречит условию (2.22) с $M = M_s$.

Так как вследствие соотношений (6.14)—(6.16)

$$\ln M_s\leqslant\frac{3}{2\alpha-1}(s^2+\ln N)\leqslant\frac{3}{2\alpha-1}(C_8^2N^{1/4}+\ln N)\leqslant\frac{6C_8^2N^{1/4}}{2\alpha},$$

а значит,

$$C_6\left(\frac{N}{\ln M_s}\right)^{1/6}\geqslant C_6\left(\frac{(2\alpha-1)N^{3/4}}{6C_8^2}\right) = \frac{C_6(2\alpha-1)^{1/6}N^{1/8}}{6^{1/6}C_8^{1/3}} = C_8N^{1/8},$$

то каждый из промежутков

$$s-1\leqslant x\leqslant s, \qquad (3\leqslant s\leqslant C_8N^{1/8}) \tag{6.17}$$

содержится в области (6.10) с $M = M_s$ и, следовательно, в каждом из них выполняются соотношения (6.12) и (6.13) с $M = M_s$.

Далее, для любого из промежутков (6.17) вследствие равенства (6.16) будет:

$$\frac{x^3}{\sqrt{N/\ln M_s}}\leqslant\frac{x^3}{\sqrt{\dfrac{(2\alpha-1)N}{3(s^2+\sqrt{\ln N})}}} = x^3\sqrt{\frac{3(s^2+\ln N)}{(2\alpha-1)N}}\leqslant 2\sqrt{\frac{3}{2\alpha-1}}\frac{x^3(s+\sqrt{\ln N})}{\sqrt{N}}\leqslant$$

$$\leqslant 4\sqrt{\frac{3}{2\alpha-1}}\frac{x^3(s-1+\sqrt{\ln N})}{\sqrt{N}}\leqslant 4\sqrt{\frac{3}{2\alpha-1}}\frac{x^3(x+\sqrt{\ln N})}{\sqrt{N}} = O\Big(\frac{x^3(x+\sqrt{\ln N})}{\sqrt{N}}\Big)$$

и с учетом неравенства (6.11)

$$\frac{1}{M^{(2\alpha-1)/3}}\leqslant\frac{1}{Ne^{s^2}-1}\leqslant\frac{3e^{-s^2/2}}{10s}<\frac{7s}{Ne^{s^2/2}}\frac{3e^{-x^2/2}}{10x}<\frac{7}{N}[1-\Phi(x)]=[1-\Phi(x)]O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

Отсюда и из соотношений (2.23), (6.12) и (6.13) с $M=M_s$ следует, что в каждом из промежутков (6.17), а значит и во всей области $2\leqslant x\leqslant C_8 N^{1/8}$ выполняются соотношения (1.11) и (1.12) с постоянными в символах "O", зависящими от A,α и σ. Теорема 5 доказана.

В заключение можно полушутя-полусерьезно сказать, что представленная работа, в частности, реабилитирует довольно широко распространенное до выхода в свет работы [3] мнение, что количественные результаты, полученные с привлечением аппарата теории чисел, как правило, более точны, чем аналогичные результаты, полученные без использования арифметических средств.

Литература

[1] Постников А.Г. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. М.: Наука, 1966. Т. 82.

[2] Усольцев Л.П. К закону повторного логарифма в задаче о распределении дробных долей показательной функции // Труды Куйбышев. авиац. ин-та. Сер.: Математика, 1975. Вып. 1. С. 24—28.

[3] Ибрагимов И.А. Центральная предельная теорема для сумм функций от независимых величин и сумм вида $\sum f(2^k t)$ // Теория вероятн. и ее применен. 1967. Т. 12. Вып. 4. С. 655—665.

[4] Минеев М.П. Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1958. Т. 26. № 5. С. 282—298.

[5] Мухутдинов Р.Х. Диофантово уравнение с матричной показательной функцией // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. № 1. С. 36—38.

[6] Усольцев Л.П. Неулучшаемая оценка скорости сходимости к нормальному закону и асимптотика больших уклонений в одном частном случае теоремы Форте — Каца // Исследования по аддитивной теории чисел: науч. труды. Куйбышев: КГПИ, 1978. Т. 215. С. 45—76.

[7] Усольцев Л.П. Центральная предельная теорема и большие уклонения для одной суммы с показательной функцией // Марковские случайные процессы и их применение: межвуз. сб. научн. тр. Саратов: СГУ, 1980, С. 105–114.

[8] Усольцев Л.П. О больших уклонениях для классических распределений, порождаемых дробными долями показательной функции с целым основанием // Вестник Самарского техн. ун-та. Сер.: Физико-математические науки. 2004. Вып. 30. С. 99—107.

[9] Усольцев Л.П. Об асимптотике и больших уклонениях в теореме Форте — Каца // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2008. Т. 15. Вып. 1. С. 97–98.

[10] Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.

[11] Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.

[12] Statulevičius V.A. On large deviations // Zeitschrift für Wahrsch. 1966. V. 6. № 2. S. 133—144.

[13] Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей (основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы). М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 20/*II*/2009;
в окончательном варианте — 14/*V*/2009.

ABOUT ASYMPTOTICS AND LARGE DEVIATIONS IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR SUMS $\sum \mathbf{f}(\mathbf{q}^\mathbf{n}\mathbf{t})$

 L.P. Usoltsev[2]

In the paper new estimates for the remainder term and large deviations in the central limit theorem for sums $\sum \mathbf{f}(\mathbf{q}^\mathbf{n}\mathbf{t})$ are obtained. Technique and methods of reasoning contained not only in the classical probability theory, but also in the theory of diophantine equations with exponential function are used in the given proofs.

Key words and phrases: central limit theorem, exponential function, diophantine equation, asymptotics and large deviations.

Paper received 20/*II*/2009.
Paper accepted 14/*V*/2009.

[2]Usoltsev Lev Pavlovich (`usoltsev@ssu.samara.ru`), Dept. of Probability Theory and Mathematical Statistics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.