УДК 539

ВЛИЯНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА НА ЕГО ДЕФОРМИРОВАНИЕ

© 2009 Н.Д. Вервейко, С.А. Шашкина[1]

В статье рассматривается деформирование упругого материала с микроструктурой. Показано, что изолированные волны разрыва деформации или сдвига в таком материале не существуют, так как решение для разрывной функции, заданной на подвижной поверхности, определяется поведением градиентов первого, второго и третьего порядков от этой функции. Это соответствует дисперсии упругих волн, т. е. различной скорости движения упругих волн разной амплитуды в зависимости от их частоты. В качестве примера оценки влияния микроструктуры на напряженно-деформированное состояние материала рассмотрен сдвиг криволинейной полосы малой кривизны. Показано, что сдвиг и перемещения в полосе носят линейный характер в главной части с наложением гармоник малой амплитуды.

Ключевые слова: упругий материал, деформирование, микроструктура.

Введение

Задачи, связанные с влиянием микроструктуры на деформирование упругого материала, возникают в целом ряде практических проблем, когда реальные материалы обладают однородной структурой (мелкозернистые материалы, горные породы, искусственные материалы и т. д.) и необходимо учитывать ее характерный размер. Одним из путей реализации этой задачи является учет деформирования на разных уровнях.

Характерным отличием математических моделей сред с микроструктурой является присутствие в явной или неявной форме масштабных параметров, что обуславливает нелокальность теории [1]. Масштабные параметры могут иметь различный физический смысл: расстояние между частицами в дискретных структурах, размер зерна или ячейки, характерный радиус

[1]Вервейко Николай Дмитриевич (ver38@mail.ru), Шашкина Софья Александровна (Soffia-alex@inbox.ru), кафедра теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

корреляции или сил дальнодействия, при этом масштабные параметры малы по сравнению с характерным размером тела.

Для построения математических моделей течения и деформирования материалов с учетом микроструктуры используют несколько подходов. Один из них состоит в представлении физических законов в дискретном виде, их разложении в ряды Тейлора с учетом величин до некоторого порядка h^n по характерному размеру микроструктуры [2]. Другой подход состоит в представлении математической модели, заданной в дифференциальной форме, в разностном виде на сетке с шагом h, и построении разностного аналога (непрерывной задачи) с учетом величин до некоторого порядка h^n. Построенные уравнения носят наименование "квазиупругих", "квазигазодинамических" и т. д.

В предлагаемой работе проводится в рамках механики сплошных сред использование уточненных кинематических параметров деформирования материала для анализа статических задач деформирования упругих материалов. При этом среда состоит из дискретных элементов с характерным размером h, и представительный объем $\triangle V \approx h^3$ не может быть неограниченно малым [3]. Используемый подход позволяет привести оценку погрешности моделирования деформирования таких материалов.

1. Математическая модель деформирования упругого материала

Рассмотрим пространственное деформирование упругой среды с учетом ее однородной микроструктуры. В качестве представительного объема $\triangle V \approx h^3$ возьмем такой объем $\triangle V$, в котором содержится достаточное количество N микроэлементов, так, что свойства материала в целом совпадают со свойствами представительного объема $\triangle V$.

При рассмотрении деформационной характеристики сплошной среды, моделирующей микроструктурный материал, используем инвариантную характеристику — относительное удлинение в поле перемещений $\overline{U}$ квадрата элементарного отрезка минимально возможной длины $2h$ [4] (рис. 1.1)

$$\lambda^2 = \left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2 - 1. \tag{1.1}$$

Величину λ^2 можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\lambda^2 \;=\; & 2\frac{\partial U_i}{\partial x_j} l_i l_j + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} l_j l_k + \\ & + \frac{h^2}{3}\left[\frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_p} l_i l_j l_k l_p + \frac{\partial U_i}{\partial x_n}\frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_p} l_n l_j l_k l_p\right] +\end{aligned}$$

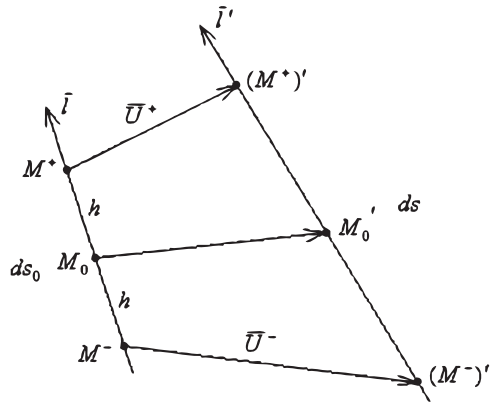

Рис. 1.1. Схематическое изображение перемещения элементарного отрезка M^+M^- в положение $(M^+)'(M^-)'$

$$+\frac{2h^4}{5!}\left[\frac{\partial^5 U_i}{\partial x_j\partial x_k\partial x_p\partial x_q\partial x_m}l_il_jl_kl_pl_ql_m+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial U_i}{\partial x_n}\frac{\partial^5 U_i}{\partial x_j\partial x_k\partial x_p\partial x_q\partial x_m}l_nl_jl_kl_pl_ql_m\right]+$$

$$+\frac{h^4}{36}\left(\frac{\partial^3 U_i}{\partial x_j\partial x_k\partial x_p}\frac{\partial^3 U_i}{\partial x_r\partial x_s\partial x_n}\right)l_jl_kl_pl_rl_sl_n+\dots\,. \tag{1.2}$$

Здесь l_i — направляющие косинусы рассматриваемого отрезка $2h$ ($i = 1,2,3$). Для удобства, используя симметрию λ^2 по ij, $ijkp$, перепишем равенство (1.2) в виде

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= 2U_{i,j}l_il_j+U_{i,j}U_{i,k}l_jl_k+\\ &+h^2\frac{1}{3}(u_{i,jkp}l_il_jl_kl_p+U_{i,n}U_{i,jkp}l_nl_jl_kl_p)+\\ &+h^4\frac{2}{5!}(U_{i,jkpqm}l_il_jl_kl_pl_ql_m+U_{i,n}U_{i,jkpqm}l_nl_jl_kl_pl_ql_m)+\\ &+h^4\frac{1}{36}U_{i,jkp}U_{i,rsn}l_jl_kl_pl_rl_sl_n+\dots\,.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Относительное удлинение λ^2 состоит из линейной и нелинейной частей. Линейная часть — величина нулевого порядка по h, т. е. $h^0 = 1$. Она симметрична по i,j $(\nabla_jU_i+\nabla_iU_j)$ и представляет собой симметричный тензор второго порядка Коши

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_jU_i+\nabla_iU_j),\qquad i,j=1,2,3. \tag{1.4}$$

Заметим, что для случая криволинейных координат в (1.4) и далее частные производные заменены операцией градиент.

Нелинейная часть

$$U_{i,j}U_{i,k} = U_{r,j}U_{r,i} = \nabla_i U_r \cdot \nabla_j U_r$$

представляет собой тензор второго порядка, симметричный по i, j.

Итак, слагаемые нулевого порядка по h, которые определяют главную часть формоизменения, характеризуются тензором конечных деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(0)} = 2h^0 \left[\frac{1}{2}(\nabla_j U_i + \nabla_i U_j) + \frac{1}{2}\nabla_i U_r \cdot \nabla_j U_r\right] = \\ = 2h^0 \left(\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_i U_r \cdot \nabla_j U_r\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Рассмотрим линейную часть величин порядка h^2 в относительном удлинении λ^2. Она представлена тензором четвертого ранга

$$\varepsilon_{ijkp}^{(2)} = \frac{h^2}{12}(\nabla_{jkp}^3 U_i + \nabla_{kpi}^3 U_j + \nabla_{pij}^3 U_k + \nabla_{ijk}^3 U_p). \tag{1.6}$$

Нелинейное слагаемое порядка h^2 в (1.3) определяется величиной

$$\begin{aligned} \widetilde{\varepsilon}_{ijkp}^{(2)} = h^2 \frac{1}{24}(\nabla_i U_r \cdot \nabla_{jkp}^3 U_r + \nabla_j U_r \cdot \nabla_{kpi}^3 U_r + \\ + \nabla_k U_r \cdot \nabla_{pij}^3 U_r + \nabla_p U_r \cdot \nabla_{ijk}^3 U_r). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Таким образом, используя (1.5)—(1.7), можно записать с точностью до h^2 формоизменение материала, которое определяется двумя тензорами — тензором второго ранга конечных деформаций типа Коши и тензором четвертого ранга порядка h^2

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \varepsilon_{ijkp}^{(2)} l_k l_p + \widetilde{\varepsilon}_{ijkp}^{(2)} l_k l_p. \tag{1.8}$$

В линейном приближении в качестве деформационной характеристики поля перемещений $\overline{U}$ можно принять тензор

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ijkp}^{(2)} l_k l_p = \varepsilon_{ij} + \frac{h^2}{3}\varepsilon_{ij,kp} l_k l_p. \tag{1.9}$$

Тензор деформаций ε_{ij}^* определяется тензором второго порядка деформаций Коши и тензором четвертого порядка $\varepsilon_{ij,kp}$.

Из выражения (1.9) для тензора деформаций ε_{ij}^* следует, что он зависит от выбора направления $\bar{l}$ отрезка $2h$ и, следовательно, позволяет описывать деформирование анизотропных материалов. Для изотропных материалов деформационная характеристика ε_{ij}^h, не зависящая от направления отрезка $2h$, может быть получена путем выбора трех ортогональных направлений $\bar{l}^1$, $\bar{l}^2$, $\bar{l}^3$ ($\bar{l}^1 = (1,0,0)$, $\bar{l}^2 = (0,1,0)$, $\bar{l}^3 = (0,0,1)$), так что

$$\varepsilon_{ij}^h = \frac{h^2}{3}\varepsilon_{ij,kk} = \frac{h^2}{3}\triangle\varepsilon_{ij}, \tag{1.10}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа. Тогда

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^h = \left(E + \frac{h^2}{3}\triangle\right)(\varepsilon_{ij}), \tag{1.11}$$

здесь E — единичный оператор.

Рассмотрим линейно-упругий материал, для которого имеет место закон Гука с упругими параметрами Ламе λ, μ :

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon^*_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon^*_{ij} = \left(E + \frac{h^2}{3}\triangle\right)(\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}). \tag{1.12}$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая деформирование упругого материала [5], включает в себя:

уравнение движения

$$\rho\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho\cdot q_i, \tag{1.13}$$

где q_i — плотность объемных сил;

закон Гука (1.12);

выражение для тензора деформаций Коши (1.4);

уравнение неразрывности для случая малых деформаций $\rho = \rho_0$.

Закон Гука (1.12) и уравнение движения (1.13) позволяют исключить напряжения σ_{ij} и построить систему трех уравнений для вектора перемещений $\overline{U}$ типа Ламе

$$\rho\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\varepsilon_{kk,i} + \mu\triangle U_i + \frac{h^2}{3}(\lambda+\mu)\triangle\varepsilon_{kk,i} + \frac{h^2}{3}\mu\triangle\triangle U_i + \rho\cdot q_i. \tag{1.14}$$

Система уравнений (1.14) содержит малый параметр h при старших производных и является сингулярно возмущенной. Такая система требует для своего решения дополнительных граничных условий по сравнению с классическими уравнениями Ламе.

Уравнение (1.14) позволяет путем повышения порядка производных получить уравнения для объемной деформации ε и вектора вихря φ_i

$$\varepsilon = \frac{\partial U_k}{\partial x_k}; \qquad \overline{\varphi} = \frac{1}{2}rot\overline{U}, \qquad \text{т. е. } \varphi_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}U_{j,k}, \tag{1.15}$$

где ε_{ijk} — тензор Леви — Чивита.

Применяя операцию дивергенции к векторному уравнению (1.14), получим уравнение для объемной деформации ε

$$\rho\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\triangle\varepsilon + \frac{h^2}{3}(\lambda+2\mu)\triangle^2\varepsilon + \rho\cdot q_{k,k}. \tag{1.16}$$

Применив операцию вихря к уравнению (1.9), будем иметь

$$\rho\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} = \mu\triangle\varphi_i + \frac{h^2}{3}\mu\triangle^2\varphi_i + \rho\varepsilon_{ijk}\cdot q_{j,k}. \tag{1.17}$$

Из (1.16), (1.17) видно, что объемная деформация и вектор вихря удовлетворяют дифференциальному уравнению одного и того же вида с отличием коэффициентов. Поэтому при решении конкретных задач будем использовать общий вид полученных дифференциальных уравнений.

2. Исследование существования волн сильного разрыва в упругой среде с микроструктурой

Рассмотрим уравнение для распространения в пространстве объемной деформации или вектора вихря (1.16), (1.17). На подвижной изолированной поверхности Σ, бегущей со скоростью G, общий вид рассматриваемых уравнений запишем в форме

$$\begin{gathered}\frac{\delta^2}{\delta t^2}(f) - 2G\frac{\delta}{\delta t}(f_{,n}) + G^2 f_{,nn} = c^2(f_{,nn} + g^{\alpha\beta} f_{,\alpha\beta} - 2\Omega f_{,n}) + \\ + \frac{h^2}{3}c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + g^{\sigma\tau}\frac{\partial^2}{\partial y_\sigma \partial y_\tau} - 2\Omega\frac{\partial}{\partial n}\right)(f_{,nn} + g^{\alpha\beta} f_{,\alpha\beta} - 2\Omega f_{,n}),\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $c = c_1$ $(\rho c_1^2 = \lambda + 2\mu)$ — для волн объемной деформации $(g = \varepsilon)$ и $c = c_2$ $(\rho c_2^2 = \mu)$ — для случая распространения волн сдвига $(g = \varphi_i)$. В уравнении (2.1) принято: $\dfrac{\delta f}{\delta t} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + G\dfrac{\partial f}{\partial n}$ — производная по времени t от функции $f(y_1, y_2, t)$, заданной на поверхности Σ; $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ — производная по направлению нормали n; $f_{,\alpha}$ — производная по касательному к поверхности Σ направлению y_α; $\Omega = {(\chi_1 + \chi_2)}/{2} = \Omega(y_1, y_2)$ — средняя кривизна поверхности Σ, где χ_1 и χ_2 — главные кривизны поверхности Σ.

Будем полагать, что в 2δ-окрестности по направлению нормали к поверхности Σ функция $f(y_1, y_2, t)$ ведет себя разрывно и так, что $[f] \neq 0$, $\left[{\partial f}/{\partial n}\right] \neq 0$ и т. д. Здесь

$$[f] = f^+ - f^-,$$

где f^+ — значение функции $f(y_1, y_2, t)$ на правой стороне поверхности Σ, а f^- — значение функции $f(y_1, y_2, t)$ на левой стороне поверхности.

Интегрирование уравнения (2.1) по направлению нормали n в 2δ-окрестности и переход к пределу при $\delta \to 0$ дает

$$-2G\frac{\delta}{\delta t}[f] + G^2[f_{,n}] = c^2[f_{,n}] - 2c^2\Omega[f] + \frac{h}{3}c^2([f_{,nnn}] - 4\Omega[f_{,nn}] + 4\Omega^2[f_{,n}]). \tag{2.2}$$

Для случая распространения разрывов деформации $[\varepsilon] \neq 0$ или сдвига $[\varphi_i] \neq 0$ со скоростями c_1 или c_2 идеальных упругих волн уравнение "переноса" (2.2) дает

$$\frac{\delta[f]}{\delta t} - c\Omega[f] = -c\frac{h^2}{6}([f_{,nnn}] - 4\Omega[f_{,nn}] + 4\Omega^2[f_{,n}]). \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует, что изолированные волны разрыва деформации или сдвига не существуют, так как решение для $[f]$ определяется не только геометрией Ω самого фронта, но и поведением на поверхности Σ градиентов первого $(f_{,n})$, второго $(f_{,nn})$ и третьего $(f_{,nnn})$ порядков. Это соответствует дисперсии упругих волн, т. е. различной скорости движения упругих волн разной амплитуды в зависимости от их частоты.

3. Исследование поведения больших градиентов деформации и вихря вблизи стационарных поверхностей

Исследуем поведение объемной деформации ε или вектора вихря φ_i вблизи стационарной поверхности Σ при больших градиентах ε или φ_i. Из уравнения (2.1) для малых $\partial f/\partial y_\alpha$ получим

$$f_{,nnnn} - 4\Omega f_{,nnn} + \frac{3}{h^2} f_{,nn} + 4\Omega^2 f_{,nn} - \frac{6}{h^2}\Omega f_{,n} = 0. \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) представляет собой уравнение в частных производных для $f(n, y_1, y_2)$, в котором присутствуют производные только по переменной n, а коэффициент $\Omega = \Omega(y_1, y_2)$ есть функция других переменных, так что уравнение (3.1) можно рассматривать как обыкновенное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Его решение имеет вид

$$f = A_1 + A_2 \cdot e^{2\Omega n} + A_3 \sin kn + A_4 \cos kn, \tag{3.2}$$

где $A_i = A_i(y_1, y_2)$ — константы интегрирования, $k = \sqrt{3/h^2 - \Omega^2}$.

На рис. 3.1 показано качественное поведение объемной деформации или вектора вихря в окрестности поверхности Σ средней кривизны Ω.

В соответствии с (3.2) решение для объемной деформации ε или вектора вихря φ_i экспоненциально возрастает в сторону положительного значения Ω и убывает в другую сторону, при этом имеет место гармоническая добавка $A \sin kn$ малой амплитуды с периодом

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi h}{\sqrt{3 - \Omega^2 h^2}}. \tag{3.3}$$

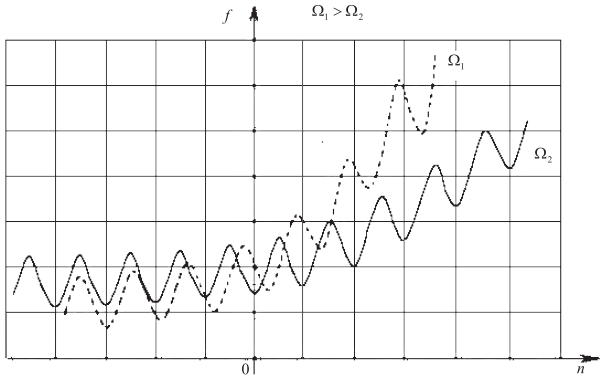

Рис. 3.1. Качественная картина поведения объемной деформации $f = \varepsilon$ или вектора вихря $f = \varphi_i$ вблизи поверхности Σ при больших градиентах $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial n}$ или $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial n}$

Из выражения (3.3) видно, что период колебаний мал за счет характерного размера h микроструктуры. Однако он возрастает при $\Omega h \to \sqrt{3}$,

т. е. при $\left(h/R\right) \to \sqrt{3}$, для случая сферической поверхности Σ. Оценивая величину частоты k, отметим, что не имеет смысла рассматривать ситуацию большой кривизны Ω, т. е. малого радиуса кривизны поверхности Σ, так как это будет противоречить предположению, что радиус кривизны R поверхности Σ меньше характерного размера h представительного объема $\triangle V$.

4. Построение граничных условий для деформирования упругой среды с учетом микроструктуры

Дифференциальные уравнения деформирования упругой среды с учетом микроструктуры, представленные в терминах перемещений, имеют более высокий порядок по сравнению с классическими уравнениями Ламе. Поэтому возникает необходимость формулировки дополнительных граничных условий. Эти условия должны отражать характер деформирования среды вблизи границы. При деформировании представительные элементы среды могут либо поворачиваться как жесткое целое, либо полностью прилипать к внешним границам.

Рассмотрим два случая взаимодействия рассматриваемого материала с внешней жесткой границей (рис. 4.1).

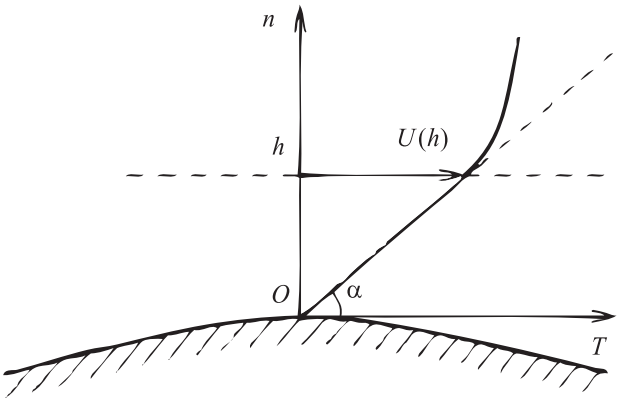

Рис. 4.1. Качественный характер поведения перемещений в области контакта среды с жесткой границей

I. Пусть представительный элемент прилипает к внешней границе и осуществляет мгновенный поворот в точке касания. В таком случае распределение перемещений по толщине h будет носить линейный характер как при мгновенном повороте. При этом, вследствие сплошности среды, вблизи границы поведение перемещения должно быть непрерывным. Таким образом, условие прилипания представительного элемента к границе и условие

гладкости перемещений можно записать следующим образом:

$$U(h)|_{h=0}= 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{n=h}= \frac{U(h)}{h} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{4.1}$$

Условие гладкости функции $U(n)$ при $n = h$ запишем на границе $n = 0$, разложив перемещение и его производную в степенной ряд Тейлора.

$$U(h) = U(0) + U'(0)h + U''(0)\frac{h^2}{2} + U'''(0)\frac{h^3}{6} + U''''(0)\frac{h^4}{24} + \dots ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{n=h}= U'(0) + U''(0)h + U'''(0)\frac{h^2}{2} + U''''(0)\frac{h^2}{6} + \dots . \tag{4.2}$$

Подстановка полученных выражений (4.2) в граничные условия (4.1) с сохранением членов до порядка h дает дополнительное граничное условие

$$3U''(0) + 2U'''(0)h = 0. \tag{4.3}$$

В терминах сдвигов граничное условие (4.3) примет вид

$$3\varphi'(0) + 2h\varphi''(0) = 0. \tag{4.4}$$

II. Пусть представительный элемент полностью прилипает к жесткой границе и не поворачивается. Тогда

$$U(n)|_{n=h}= \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{n=h}= 0. \tag{4.5}$$

Используя разложение последнего граничного условия в ряд (4.2) и удерживая слагаемые до порядка h, получим следующее дополнительное граничное условие:

$$U'(0) + hU''(0) = 0. \tag{4.6}$$

В терминах сдвигов уравнение (4.6) примет вид

$$\varphi(0) + h\varphi'(0) = 0. \tag{4.7}$$

Построенные дополнительные граничные условия позволяют получать единственные решения для задач упругости с учетом микроструктуры материала.

5. Сдвиг криволинейной полосы из упругого материала с учетом микроструктуры

В качестве примера оценки влияния микроструктуры на напряженно-деформированное состояние материала рассмотрим сдвиг криволинейной полосы малой кривизны Ω и шириной H за счет приложенного на границе напряжения τ_0 (рис. 5.1).

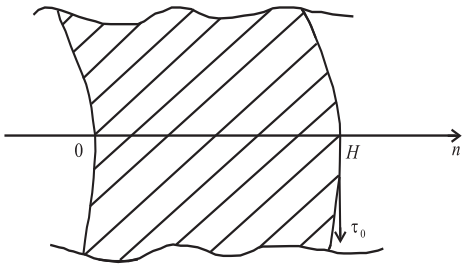

Рис. 5.1. Схематическое изображение полосы материала шириной H с приложенным касательным усилием τ_0

Учитывая, что в рассматриваемом случае кривизна Ω мала, и разлагая функцию $e^{2\Omega n}$, входящую в состав решения (3.2), в ряд Тейлора (при этом удерживая в разложении только линейные члены) [6], общее решение для вектора вихря (или совпадающее с ним для деформации сдвига) примет вид

$$\varphi(n) = c_1 + c_2 2\Omega n + c_3 \sin kn + c_4 \cos kn, \tag{5.1}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — константы интегрирования, определяемые граничными условиями.

Граничные условия для сдвига $\varphi(n)$ на границах полосы при $n = 0$, $n = H$ имеют вид

$$\varphi(0) = \frac{\tau_0}{\mu}, \qquad \varphi(H) = \frac{\tau_0}{\mu},$$
$$h\varphi_{,n}(0) + 3\varphi(0) = 0, \qquad h\varphi_{,n}(H) - 3\varphi(H) = 0. \tag{5.2}$$

Первая пара граничных условий соответствует заданию сдвига за счет касательного напряжения на границе, а вторая — условию недеформируемости прилипшего к границе представительного элемента.

Для определения констант решения (5.1) построим систему линейных алгебраических уравнений для c_1, c_2, c_3, c_4, учитывая (5.2):

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = \frac{\tau_0}{\mu}, \\ 3c_1 + 2h\Omega c_2 + khc_3 + 3c_4 = 0, \\ c_1 + 2\Omega H c_2 + c_3 \sin kH + c_4 \cos kH = \frac{\tau_0}{\mu}, \\ -3c_1 + 2\Omega(h - 3H)c_2 + (kh\cos kH - 3\sin kH)c_3 - \\ \quad -(kh\sin kH + 3\cos kH)c_4 = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Решив систему (5.3) (при решении будем учитывать только главные члены по h) и определив коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4, можно записать решение для вектора вихря (или совпадающее с ним для сдвига)

$$\overline{\varphi}(n) = 1 + hk\frac{\cos kH + 1}{\sin kH} + hk\sin kn - hk\frac{\cos kH + 1}{\sin kH}\cos kn, \qquad (5.4)$$

где $\overline{\varphi}(n) = \varphi(n)/(\tau_0/\mu)$.

Так как в рассматриваемом примере кривизна Ω мала, для простоты построения качественной картины поведения деформации сдвига пренебрежем ею в выражении для k, тогда решение (5.4) для сдвига примет вид

$$\overline{\varphi}(n) = 1 + \sqrt{3}\,\frac{\cos\dfrac{\sqrt{3}}{h}H + 1}{\sin\dfrac{\sqrt{3}}{h}H} + \sqrt{3}\,\frac{\sin\dfrac{\sqrt{3}}{h}(H/2 + n)}{\cos\dfrac{\sqrt{3}}{h}H/2}. \qquad (5.5)$$

Проинтегрировав решение (5.4) для сдвига, получим выражение для перемещения

$$\overline{U}(n) = \left(1 + hk\frac{\cos kH + 1}{\sin kH}\right)n - h\,\frac{\sin k\left(H/2 + n\right)}{\sin k\left(H/2\right)} + c, \qquad (5.6)$$

где $\overline{U}(n) = \dfrac{U(n)}{(\tau_0/\mu)}$, c — произвольная постоянная.

Как следует из выражений (5.4) и (5.6), распределение сдвига в полосе является постоянным в главной части с наложением гармоник малой амплитуды порядка h с периодом $T = \left(2\pi/\sqrt{3}\right)h$. Перемещения носят линейный характер по n в главной части, а также с добавлением гармоник малой амплитуды порядка h с периодом T. На рис. 5.2 показано качественное поведение сдвига и перемещений в полосе.

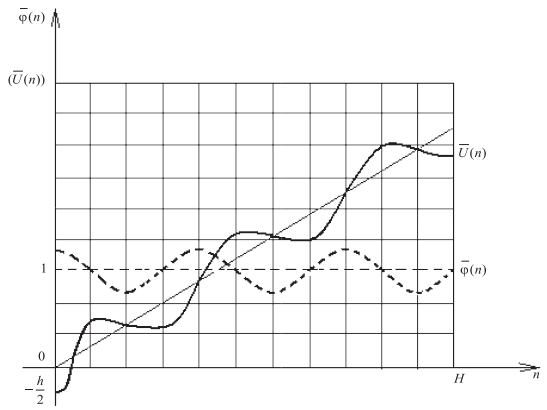

Рис. 5.2. Качественная картина поведения сдвига и перемещения в полосе

Учет влияния кривизны Ω криволинейной полосы в выражениях (5.4) и (5.6) для $\overline{\varphi}(n)$ и $\overline{U}(n)$ ведет к уменьшению частоты k и, соответственно,

к увеличению периода T гармонических возмущений по сравнению с прямолинейной полосой.

Из (5.6) легко следует предельный переход в выражении для сдвига полосы из материала с учетом микроструктуры к сдвигу полосы из идеально упругого материала. В самом деле, в случае, когда влияние микроструктуры материала не учитывается, при $h \to 0$ перемещение $\overline{U}(n) \to n + c$, то есть распределение сдвиговых перемещений в полосе носит линейный характер.

Заключение

Представленный в работе подход к описанию микроструктурных упругих материалов связан с учетом в определении деформаций микроструктурного характерного параметра h/L, который носит смысл относительного линейного размера микроструктуры. Использованный подход позволяет сделать следующий вывод.

Во-первых, учет микроструктуры в кинематике среды ведет к малым гармоническим добавкам к деформациям и перемещениям. Во-вторых, эти добавки можно рассматривать как погрешность в решении задач методами идеальной теории упругости. Сам малый параметр h/L в дифференциальных уравнениях (1.14)—(1.17) деформирования упругой среды с микроструктурой стоит перед старшей производной четвертого порядка и носит сингулярный характер, так что влияние h/L имеет место в зонах больших градиентов (в пограничных слоях).

Литература

[1] Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 416 с.

[2] Четверушкин Б.Н. Минимальные размеры в задачах механики сплошной среды // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 4. С. 27—39.

[3] Введение в механику скальных пород / Д.К. Троллоп [и др.]; пер. с англ; под ред. Х. Бока. — М.: Мир, 1983. 276 с.

[4] Шашкина С.А. Формулировка задачи теории упругости для материалов с микроструктурой // Математические модели и операторные уравнения: сб. науч. тр. Воронеж, 2005. Т. 3. С. 81—86.

[5] Вервейко Н.Д., Воронков А.А. Характеристики деформирования материалов с учетом характерных размеров микроструктуры // Современные проблемы механики и прикладной математики: сб. тр. международной школы-семинара. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. Ч. 1. Т. 1. С. 116—119.

[6] Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.

Поступила в редакцию 29/I/2009;
в окончательном варианте — 29/I/2009.

THE INFLUENCE OF MICROSTRUCTURE OF ELASTIC MATERIAL DEFORMATION

© 2009 N.D. Verveyko, S.A. Shashkina[2]

The paper considers the deformation of elastic material with microstructure. The authors show, that the isolated waves of a deformation fracture or displacement fracture in this material are non-existent, because the solution for a breaking function, set in the mobile surface, is defined by the behavior of the first, second and third gradients for this function. This fact corresponds to the dispersion of elastic waves, or to the different velocity of extension of elastic waves with the different amplitude, depending on their frequencies. As an example of the evaluation of the influence of microstructure on the deflected mode of the material, the displacement of curvilinear strip of small curvature is viewed. It is shown that the displacement and shift in the strip have a linear character in the main part with the superposition of harmonics of low amplutude.

Key words and phrases: elastic material, deformation, microstructure.

Paper received 29/I/2009.
Paper accepted 29/I/2009.

[2]Verveyko Nikolai Dmitrievich (ver38@mail.ru), Shashkina Sophia Aleksandrovna (Soffia-alex@inbox.ru), Dept. of Applied Mathematic and Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russia.