УДК 512.7

БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ТОРА БЕЗ АФФЕКТА В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЙ ГРУППЕ ТИПА F_4

© 2009 Ю.Ю. Крутиков[1]

В данной работе мы вычисляем все когомологические бирациональные инварианты для тора без аффекта в полупростой исключительной группе типа F_4. Нерациональность этого тора была установлена Б.Э. Кунявским и А. Кортелла. Мы доказываем когомологическую нетривиальность основного бирационального инварианта изучаемого тора. Нами найдены все подгруппы в группе Вейля $W(F_4)$, для которых соответствующий когомологический инвариант ненулевой.

Ключевые слова: алгебраический тор, бирациональный инвариант, когомологии, каноническая резольвента, полупростая группа.

Введение

Пусть G — полупростая группа, определенная над полем k, $T \subset G$ — максимальный k-тор. Пусть L — минимальное поле разложения тора T — минимальное расширение Галуа поля k, над которым тор T разложим, то есть $T \otimes_k L \cong \mathbb{G}^d_{m,L}$, где d — размерность тора. Если Π — группа Галуа расширения L/k, то она сохраняет систему корней $P = R(G)$ и поэтому содержится в ее группе автоморфизмов $\Pi \subset \mathrm{Aut}\, R = A(R)$.

Известно [1], что группа разложения Γ_{gen} общего тора T_{gen} (определенного над полем функций многообразия всех максимальных торов) лежит между группой Вейля и группой автоморфизмов системы корней: $W(R) \subset \Gamma_{gen} \subset A(R)$. Максимальный k-тор $T \subset G$ называется *тором без аффекта*, если $\Pi = \Gamma_{gen}$.

Бирациональная геометрия торов без аффекта в полупростых группах стала изучаться более четверти века назад. В пионерской работе [2] данного направления В.Е. Воскресенский и Б.Э. Кунявский разобрали случаи максимальных торов без аффекта в присоединенных и односвязных классических группах. Их результаты получили обобщение в работе А.А. Кляч-

[1]Крутиков Юрий Юрьевич (yuri820710@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ко [3], в которой он установил выполнение принципа Хассе и слабой аппроксимации для максимальных торов без аффекта в полупростых алгебраических группах, определенных над полем алгебраических чисел следующих типов: внутренние формы Шевалле, односвязные группы, присоединенные группы и простые группы. Обе эти работы в основном посвящены вычислению группы $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X})$, которая является бирациональным инвариантом k-тора T. Здесь $\overline{X}$ — это гладкая проективная модель тора T. Напомним, что всякий k-тор T может быть вложен в гладкое проективное k-многообразие X, тогда $\overline{X} = X \otimes_k L$ и есть проективная модель тора T (такая проективная модель для тора существует над любым полем, и ее построение описано в следующем пункте данной работы). Когомологический бирациональный инвариант $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X})$ имеет важное значение, так как вычисление этой группы позволяет установить выполнение принципа Хассе и слабой аппроксимации, а значит, имеет важное значение не только для бирациональной геометрии алгебраических торов, но и для их арифметических приложений. Затем исследователи сконцентрировали свое внимание на проблеме рациональности торов без аффекта в полупростых группах. К настоящему времени эта проблема полностью решена. В совместной работе А.Кортелла и Б.Э. Кунявского [4] разобраны все торы без аффекта в простых односвязных и присоединенных группах и установлена нерациональность этих торов за исключением пяти рациональных случаев: $\operatorname{rk} G \leqslant 2$; G — внутренняя форма присоединенной группы типа A_l; G — форма присоединенной группы типа A_{2l}; G — форма присоединенной группы типа B_l; G — форма односвязной группы типа C_l. И наконец, полный ответ (включая промежуточные группы) получен в работе Н. Лемир, В.Л. Попова и З. Райхштейна [6]. Тем не менее на данный момент почти нет информации о когомологических бирациональных инвариантах $H^1(F, \operatorname{Pic} \overline{X})$ для нерациональных торов без аффекта, где $F \subset L$ — промежуточное расширение поля k. Кроме упомянутых работ [2, 3], частные результаты для торов без аффекта в исключительных группах можно найти в статьях [5, 7]. В данной работе мы вычисляем все когомологические бирациональные инварианты для тора без аффекта в полупростой исключительной группе типа F_4.

1. Каноническая резольвента и методы ее построения

Когомологические бирациональные инварианты $H^1(F, \operatorname{Pic} \overline{X}), k \subset F \subset L$, являются производными от так называемого основного бирационального инварианта алгебраического тора T. Пусть X и Y — гладкие проективные многообразия над полем k, содержащие тор T в качестве открытого подмножества, $\overline{X} = X \otimes_k L$ и $\overline{Y} = Y \otimes_k L$. Тогда существует изоморфизм Π-модулей $\operatorname{Pic} \overline{X} \oplus S_1 \cong \operatorname{Pic} \overline{Y} \oplus S_2$, где S_1, S_2 — пермутационные Π-модули [8]. Модули $\operatorname{Pic}\overline{X}$ и $\operatorname{Pic}\overline{Y}$, связанные таким соотношением, называются *подобными*. Пусть $[\operatorname{Pic}\overline{X}]$ — класс подобия; он является бирациональным инвариантом k-тора T. Решетка $\operatorname{Pic}\overline{X}$ обладает свойством $H^{-1}(\pi, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0, \forall \pi \leqslant \Pi$. Назовем Π-модули с таким свойством *вялыми*. Как известно [8], вложение $T \subset X$ определяет точную последовательность Π-модулей

$$0 \longrightarrow \widehat{T} \longrightarrow \widehat{S} \longrightarrow \operatorname{Pic}\overline{X} \longrightarrow 0, \tag{1}$$

где $\widehat{S}$ — пермутационный Π-модуль, порожденный простыми дивизорами из дополнения $\overline{X} \backslash T$. Пусть теперь

$$0 \longrightarrow \widehat{T} \longrightarrow \widehat{S}_1 \longrightarrow \widehat{N} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

является другой резольвентой модуля $\widehat{T}$, где $\widehat{S}_1$ — пермутационный Π-модуль, а $\widehat{N}$ — вялый. В работе [8] показано, что $[\operatorname{Pic}\overline{X}]$ и $[\widehat{N}]$ совпадают. Будем обозначать класс $[\operatorname{Pic}\overline{X}]$ символом $p_{\Pi}(T)$ или просто $p(T)$, если группа Π зафиксирована. Всякую резольвенту Π-модулей вида (2) называют *канонической резольвентой*, так как она позволяет находить основной бирациональный инвариант $p(T)$ тора T. Заметим, что для любой подгруппы π группы Π имеем класс $p_\pi(T)$, который также является бирациональным инвариантом тора T. Класс $p_\pi(T)$ равен $[\widehat{N}]$, где $\widehat{N}$ рассматривается как π-модуль.

Кратко опишем два метода нахождения канонической (вялой) резольвенты, пользуясь следующим соглашением: для всякого Π-модуля M будем обозначать через $\widehat{M}^0 = \operatorname{Hom}(\widehat{M}, \mathbb{Z})$ двойственный к M Π-модуль.

i.(геометрический метод) В дуальной решетке $\widehat{T}^0$ нужно построить гладкий проективный Π-инвариантный веер Σ, определяющий гладкую проективную модель Демазюра X_Σ. Веер Σ определяет вялую резольвенту Π-модуля $\widehat{T}$, а значит, и $p(T)$ [9].

ii.(алгебраический метод) Имея эпиморфизм Π-модулей $\widehat{S} \twoheadrightarrow \widehat{T}^0$, где $\widehat{S}$ — некоторый пермутационный Π-модуль, рассматриваем гомоморфизмы $\widehat{S}^\pi \to (\widehat{T}^0)^\pi$ для всех подгрупп π группы Π. Добавляя, если необходимо, прямые пермутационные слагаемые к $\widehat{S}$, можно добиться того, что данные отображения станут сюрьективными для любой подгруппы π. Тогда рассмотрим точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \widehat{N}^0 \longrightarrow \widehat{S} \longrightarrow \widehat{T}^0 \longrightarrow 0, \tag{3}$$

которая в свою очередь индуцирует точную последовательность

$$0 \to (\widehat{N}^0)^\pi \to \widehat{S}^\pi \to (\widehat{T}^0)^\pi \to H^1(\pi, \widehat{N}^0) \to 0.$$

А это будет означать, что $H^1(\pi, \widehat{N}^0) = 0, \forall \pi \leqslant \Pi$. Так как $H^{-1}(\pi, \widehat{N}) = H^1(\pi, \widehat{N}^0) = 0$, то, обратив по двойственности точную последовательность (3), мы получим каноническую резольвенту.

Замечание 1.1. Описание алгебраического метода построения канонической резольвенты подразумевает полный перебор всех подгрупп группы Π.

На самом деле можно существенно "проредить" рассматриваемые подгруппы, пользуясь следующим фактом: если π_1 и π_2 сопряжены в Π, то $H^{-1}(\pi_1, \widehat{N}) = H^{-1}(\pi_2, \widehat{N})$, а значит, достаточно рассматривать подгруппы в Π с точностью до сопряжения.

Далее мы предлагаем алгоритм, позволяющий оптимизировать процесс перебора подгрупп для построения канонической резольвенты алгебраическим методом.

Пусть Π — конечная группа, а M — Π-модуль без кручения конечного ранга. Рассмотрим конечный список его $\mathbb{Z}$-подмодулей, состоящий из всевозможных пересечений подмодулей типа $M^{<g>}$, где g "пробегает" группу Π. Так как для любой подгруппы π в Π $M^{\pi} = \bigcap_{g\in\pi} M^{<g>}$, то мы получим полный список $\{K_i\}$ $\mathbb{Z}$-подмодулей M, представимых в виде $K_i = M^{\pi}$, где π — некоторая подгруппа в Π. Пусть $\pi(K_i)$ — подгруппа в Π, состоящая из всех элементов Π, тривиально действующих на K_i. Мы утверждаем, что если эпиморфизм Π-модулей $S \twoheadrightarrow M$ таков, что отображение $S^{\pi(K_i)} \to M^{\pi(K_i)}$ сюрьективно для любого i, то $S^{\pi} \to M^{\pi}$ сюрьективно для любой подгруппы в Π. Действительно, пусть π — подгруппа в Π, тогда по построению списка $\{K_i\}$ найдется номер i такой, что $M^{\pi} = K_i$, тогда $\pi \leqslant \pi(K_i)$. А значит, всякий π-инвариантный элемент из M является и $\pi(K_i)$-инвариантным элементом и, следовательно, имеет прообраз в $S^{\pi(K_i)} \subset S^{\pi}$. Итак, мы обосновали следующий

Алгоритм 1.2 (оптимальный перебор подгрупп). Пусть M — $\mathbb{Z}$-модуль без кручения конечного ранга, на котором действует конечная группа Π.

i. Для каждого элемента g группы Π находим $\mathbb{Z}$-подмодуль инвариантов $M^{<g>}$, создаем из них список List.

ii. Пусть $\mathrm{List}' = \mathrm{List}$, тогда в List добавляем все возможные попарные пересечения элементов списка List′. Если множества List′ и List совпадают, то переходим к следующему шагу, иначе повторяем шаг **ii**.

iii. Для каждого элемента $K_i \in \mathrm{List}$ вычисляем подгруппу $\pi(K_i)$. Получаем список подгрупп $\{\pi(K_i)\}$.

2. Тор без аффекта в связной полупростой группе типа F_4

Пусть T_4 — это тор без аффекта в связной полупростой группе G типа F_4, а Π — группа Галуа минимального поля разложения тора T_4. Известно [10], что группа $W(F_4) = A(F_4)$ изоморфна полупрямому произведению симметрической группы S_3 на группу, которая в свою очередь является полупрямым произведением S_4 на $(\mathbb{Z}_2)^3$; $|W(F_4)| = 2^7 \cdot 3^2$. Решетка характеров $\widehat{T_4}$ тора T_4 может быть реализована как стандартная решетка L_2 [10] в $\mathbb{R}^4$. Если в качестве базиса $\widehat{T_4}$ взять $\alpha_1 = e_1, \alpha_2 = e_2, \alpha_3 = e_3, \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, где e_1, e_2, e_3, e_4 — стандартный базис $\mathbb{R}^4$, то получим точное целочисленное представление группы П. В работе [5] показано, что образ этого представления, который будем обозначать $W(F_4)$, есть группа целочисленных автоморфизмов квадратичной формы

$$F_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

Замечание 2.1. Группа $W(F_4)$ сопряжена над $\mathbb{Q}$ группе ортогональных матриц $O(4,\mathbb{Q})$ [5], более точно, $W(F_4) = T^{-1}O(4,\mathbb{Q})\,T$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от базиса стандартной решетки L_0 к базису стандартной решетки L_2. В свою очередь группа $O(4,\mathbb{Q})$ в качестве нормальной подгруппы содержит группу $O(4, f_0)$ целочисленных автоморфизмов квадратичной формы $f_0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Эта группа является полупрямым произведением $S_4 \rtimes \mathbb{Z}_2^4$, причем

$$O(4,\mathbb{Q}) =< O(4, f_0), \lambda >, \text{ где } \lambda = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Со всякой матрицей $||a_{ij}||$ из $O(4, f_0)$ можно биективно связать отображение $\sigma : \{1,2,3,4\} \to \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4\}$ такое, что $\sigma(k) = i_k$ равно номеру строки в k-м столбце матрицы $||a_{ij}||$, содержащей ненулевой элемент, умноженному на знак этого элемента. Табличная запись отображения σ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$. Если зафиксируем первую строку этой таблицы, то для задания σ достаточно записать вторую строку. По этой записи легко восстановить соответствующую матрицу из $W(F_4)$. Например,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (-3\ -4\,1\,2) \mapsto A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in O(4, f_0),$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in W(F_4).$$

Зафиксируем обозначение τ для элемента $W(F_4)$ вида $T^{-1}\lambda T$, который нельзя представить 4-элементным массивом. В силу (4) любой элемент $W(F_4)$ можно записать в виде $\sigma \cdot \tau^i, i = 0 \dots 2$, где σ соответствует некоторому 4-элементному массиву. Всюду в дальнейшем мы будем использовать данное представление для элементов $W(F_4)$.

Построим каноническую резольвенту для П-модуля $\widehat{T_4}$, используя алгоритм 1.2. Пусть $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ — базис представления $W(F_4)$, а $\chi^1, \chi^2, \chi^3, \chi^4$ — двойственный базис. Тогда целочисленное представление группы Π, вычисленное в этом базисе $\widehat{T_4}^0$, — это группа $W(F_4)^t$. Так как орбиты элементов χ^1 и $\chi^1-\chi^2+\chi^3$ порождают $\widehat{T_4}^0$, то в качестве накрывающего пермутационного можно взять модуль ранга 48

$$\widehat{S}^0 = \widehat{S_1}^0 \oplus \widehat{S_2}^0 = \mathbb{Z}[\Pi/\mathrm{Stab}(\chi^1)] \oplus \mathbb{Z}[\Pi/\mathrm{Stab}(\chi^1-\chi^2+\chi^3)]. \qquad (5)$$

Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \widehat{N}^0 \longrightarrow \widehat{S}^0 \xrightarrow{\varphi} \widehat{T_4}^0 \longrightarrow 0. \qquad (6)$$

Можно выбрать пермутационный базис $\xi^1, ..., \xi^{48}$ модуля $\widehat{S}^0$ так, что

$$\varphi(\xi^1)=\chi^1-\chi^2, \varphi(\xi^2)=\chi^1-\chi^3, \varphi(\xi^3)=\chi^1+\chi^4, \varphi(\xi^4)=\chi^2-\chi^3,$$
$$\varphi(\xi^5)=\chi^2+\chi^4, \varphi(\xi^6)=\chi^3+\chi^4, \varphi(\xi^7)=2\chi^1+\chi^4, \varphi(\xi^8)=2\chi^2+\chi^4,$$
$$\varphi(\xi^9)=2\chi^3+\chi^4, \varphi(\xi^{10})=\chi^1+\chi^2-\chi^3, \varphi(\xi^{11})=\chi^1-\chi^2+\chi^3, \varphi(\xi^{12})=\chi^1-\chi^2-\chi^3,$$
$$\varphi(\xi^{13})=\chi^1+\chi^2+\chi^4, \varphi(\xi^{14})=\chi^1+\chi^3+\chi^4, \varphi(\xi^{15})=\chi^2+\chi^3+\chi^4,$$
$$\varphi(\xi^{16})=\chi^1+\chi^2+\chi^3+\chi^4, \varphi(\xi^{17})=\chi^1+\chi^2-\chi^3+\chi^4, \varphi(\xi^{18})=\chi^1-\chi^2+\chi^3+\chi^4,$$
$$\varphi(\xi^{19})=\chi^1-\chi^2-\chi^3-\chi^4, \varphi(\xi^{20})=\chi^1+\chi^2+\chi^3+2\chi^4,$$
$$\varphi(\xi^{21})=\chi^1, \varphi(\xi^{22})=\chi^2, \varphi(\xi^{23})=\chi^3, \varphi(\xi^{24})=\chi^4, \varphi(\xi^{i+24})=-\varphi(\xi^i), i=1...24.$$

Алгоритм 1.2 оптимального перебора дает с точностью до сопряжения 10 подгрупп π. Ниже в табл. 1 представлены вычисления, показывающие, что последовательность (6) удовлетворяет требованиям сюръективности отображений $(\widehat{S}^0)^\pi \to (\widehat{T_4}^0)^\pi$.

Таблица 1

№	Система образующих $\pi \in \Pi^t$	B — базис $(\widehat{T_4}^0)^\pi$	Прообраз B из $(\widehat{S}^0)^\pi$
1	$(3214)^t, ((-3-41-2)\cdot\tau)^t$	$\chi^1+\chi^2+\chi^3+3\chi^4$	$\xi^3+\xi^5+\xi^6$
2	$(1-234)^t, ((-3-421)\cdot\tau^2)^t$	$\chi^1+2\chi^3+\chi^4$	$\xi^{14}+\xi^{47}$
3	$(13-24)^t, ((34-2-1)\cdot\tau^2)^t$	$\chi^1+\chi^4$	$-\xi^{27}$
4	$(1243)^t, (42-13)^t$	$2\chi^2+\chi^4$	ξ^8
5	$(1432)^t$	$\chi^2-2\chi^3$ $\chi^1-\chi^3$ $2\chi^3+\chi^4$	$\xi^4+\chi^{23}$ $-\xi^{22}-\xi^{26}-\xi^{46}$ $\xi^5+\xi^{28}+\xi^{47}$
6	$(-2-134)^t, ((14-32)\cdot\tau^2)^t$	$\chi^3+\chi^4$ $\chi^1-\chi^2+\chi^4$	$-\xi^6-\xi^{10}-\xi^{44}$ $\xi^3+\xi^{22}$
7	$(1-43-2)^t, ((-2413)\cdot\tau^2)^t$	$\chi^1+\chi^2-\chi^3$	$-\xi^{34}$
8	$((-13-4-2)\cdot\tau^2)^t$	χ^1 $\chi^2+\chi^4$ $-\chi^2+\chi^3$	$-\xi^{21}$ $-\xi^{29}$ ξ^{28}
9	$(-413-2)^t, (2134)^t$	$2\chi^3+\chi^4$ $\chi^1+\chi^2-\chi^3$	$-\xi^{33}$ $-\xi^{34}$
10	$(123-4)^t, ((2-3-14)\cdot\tau)^t$	$\chi^2+\chi^3+\chi^4$ $\chi^1-\chi^2$	$-\xi^{39}$ $-\xi^{25}$

Переходя к точной последовательности двойственных модулей, получаем каноническую резольвенту:

$$0 \longrightarrow \widehat{T_4} \xrightarrow{\varphi^*} \widehat{S} \longrightarrow \widehat{N} \longrightarrow 0, \qquad (7)$$

здесь $\varphi^*(\chi_i)=\chi_i \circ \varphi$. Ввиду точности последовательности (7), $\widehat{N} \simeq \widehat{S}/\varphi^*(\widehat{T_4})$. Возьмем в качестве базиса $\widehat{S}$ элементы $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{44}$, $\varphi^*(\chi_1)$, $\varphi^*(\chi_2)$, $\varphi^*(\chi_3)$, $\varphi^*(\chi_4)$, тогда $\widehat{N} =< [\xi_1], [\xi_2], ..., [\xi_{44}] >$, где $[\xi_i], i = 1...44$ — классы смежности соответствующих элементов. Действие Π на $\widehat{S}$ индуцирует действие Π на $\widehat{N}$.

Перейдем к вычислениям одномерных когомологий модуля $\widehat{N}$. В работе мы используем два алгоритма для вычисления группы $H^1(\pi, \widehat{N}), \pi \leqslant \Pi$. Первый из них применим в следующих условиях. Пусть в π есть нормальная подгруппа η индекса два такая, что $H^1(\eta, \widehat{N}) = 0$. Тогда используем последовательность "ограничение-инфляция":

$$0 \longrightarrow H^1(\pi/\eta, \widehat{N}^\eta) \xrightarrow{Inf} H^1(\pi, \widehat{N}) \xrightarrow{Res} H^1(\eta, \widehat{N}) = 0.$$

Откуда $H^1(\pi, \widehat{N}) \cong H^1(\pi/\eta, \widehat{N}^\eta)$, а так как $\pi/\eta =< g, g^2 = e >$ — циклическая, то $H^1(< g >, \widehat{N}^\eta) \cong H^{-1}(< g >, \widehat{N}^\eta) = \frac{\mathrm{Ker}(g+e)}{\mathrm{Im}(g-e)}$. Таким образом, имеем следующий

Алгоритм 2.2 ("ограничение-инфляция").

i. Вычисляем $\mathbb{Z}$-подмодуль инвариантов $\widehat{N}^\eta$ модуля $\widehat{N}$.

ii. Находим ядро отображения $(g + e) : \widehat{N}^\eta \to \widehat{N}^\eta$.

iii. Находим образ отображения $(g - e) : \widehat{N}^\eta \to \widehat{N}^\eta$.

iv. Вычисляем фактор-группу $\frac{\mathrm{Ker}(g+e)}{\mathrm{Im}(g-e)}$, это и есть $H^1(\pi, \widehat{N})$.

Перейдем ко второму алгоритму. Условие его применения — это 2-порожденность группы π. Пусть мы исследуем подгруппу $\pi =< g_1, g_2 >$. Всякий скрещенный гомоморфизм $\varphi : \pi \to \widehat{N}$ однозначно определяется своими значениями на образующих

$$\varphi(g_1) = b, \varphi(g_2) = a.$$

Так как $\widehat{N}$ — вялый Π-модуль, то $H^1(< g_1 >, \widehat{N}) = H^{-1}(< g_1 >, \widehat{N}) = 0$, а значит, можно выбрать в каждом классе $Z^1(\pi, \widehat{N})$ 1-коцикл φ такой, что $\varphi(g_1) = 0$. Опишем теперь те значения a, которые соответствуют 1-кограницам, то есть элементам группы $B^1(\pi, \widehat{N})$. Если $\varphi \in B^1(\pi, \widehat{N})$ и $\varphi(g_1) = 0, \varphi(g_2) = a$, то существует $\widetilde{a} \in \widehat{N}$ такой, что $\varphi(g_1) = (g_1 - e)\widetilde{a} = 0$, а $\varphi(g_2) = (g_2 - e)\widetilde{a} = a$, то есть a является элементом $\mathbb{Z}$-подмодуля B в $\widehat{N}$, где B — образ отображения $(g_2 - e) : \widehat{N}^{<g_1>} \to \widehat{N}$. Рассмотрим фактор-группу $\widehat{N}/B$. Мы утверждаем, что группа $(\widehat{N}/B)_{tors}$ изоморфна $H^1(\pi, \widehat{N})$. Действительно, пусть элемент a соответствует некоторому 1-коциклу $\varphi \in Z^1(\pi, \widehat{N})$. Так как группа $H^1(\pi, \widehat{N})$ конечна, то существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $m\varphi \in B^1(\pi, \widehat{N})$, то есть $ma \in B$, а значит, класс смежности $[a] \in (\widehat{N}/B)_{tors}$. Обратно, пусть класс $[a] \in (\widehat{N}/B)_{tors}$, тогда для некоторого натурального числа m $ma \in B$, а значит, определяет главный скрещенный гомоморфизм φ такой, что $\varphi(g_1) = ma = (g_2 - e)\widetilde{a}$, где

$\widetilde{a}$ — g_1-инвариантный элемент $\widehat{N}$, то есть $\varphi(g_1) = (g_1 - e)\widetilde{a} = 0$. Тогда $\frac{1}{m}\varphi : \pi \to \widehat{N}$ является 1-коциклом, а значит, класс $[a]$ соответствует элементу $[\frac{1}{m}\varphi]$ группы $H^1(\pi, \widehat{N})$. Согласование структур групп $(\widehat{N}/B)_{tors}$ и $H^1(\pi, \widehat{N})$ очевидно. Таким образом, мы получаем следующий

Алгоритм 2.3 (группы с двумя образующими). Пусть $\pi =< g_1, g_2 >$.

i. Вычисляем $\mathbb{Z}$-подмодуль инвариантов $\widehat{N}^{<g_1>}$ модуля $\widehat{N}$) .

ii. Находим образ отображения $(g_2 - e) : \widehat{N}^{<g_1>} \to \widehat{N}$ — $\mathbb{Z}$-модуль B.

iii. Вычисляем $(\widehat{N}/B)_{tors}$, используя алгоритм 2.4.14 из книги [12]. Это и есть $H^1(\pi, \widehat{N})$.

Известный результат [11, гл. 4, §6] определяет, что p-компонента группы $H^1(G, \widehat{N})$ содержится в группе $H^1(G_p, \widehat{N})$, где G_p — силовская p-подгруппа в G. Таким образом, сначала мы будем рассматривать не всю подгруппу, а только 2- и 3-подгруппы в Π. Из них выделим подгруппы с нетривиальным инвариантом. Далее для групп, содержащих выделенные подгруппы в качестве силовских, мы будем вычислять одномерные когомологии соответствующего модуля.

В работе [5] были вычислены одномерные когомологии вялого модуля $\widehat{N}$ для силовской 2-группы Π_2 и силовской 3-группы Π_3 группы Π. Эти бирациональные инварианты оказались нулевыми, а так как все подгруппы Π_3 циклические, то $H^1(\pi, \widehat{N}) = 0$, $\forall \pi \leqslant \Pi_3$. Таким образом, нам осталось рассмотреть подгруппы силовской 2-группы Π_2 и группы, их содержащие. Как абстрактная группа Π_2 изоморфна полупрямому произведению $D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2^4$.

Далее мы перечисляем все подгруппы группы Π_2, рассматривая гомоморфизм проекции $D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2^4 \twoheadrightarrow D_4$ на первый множитель, и учитываем замечание 2.1.

При этом гомоморфизме проекции любая подгруппа Π_2 переходит в подгруппу D_4. Сужение гомоморфизма на эту подгруппу обладает ядром, являющимся подгруппой в $\mathbb{Z}_2^4$. Подгруппы D_4 хорошо известны и имеют не более двух образующих. Подгруппы $\mathbb{Z}_2^4$ можно получить, перебирая множества порождающих элементов (достаточно ограничиться четырьмя образующими). Кроме того, любой элемент из образа определяет набор из 16 возможных прообразов, получающихся с учетом знака. Итак, пусть мы имеем список подгрупп в D_4, список подгрупп в $\mathbb{Z}_2^4$ и можем генерировать все элементы группы по заданным образующим. Тогда имеем следующий

Алгоритм 2.4 (полный перебор подгрупп в Π_2).

i. Фиксируем подгруппу $H \leqslant D_4$ с ее образующими σ_1, σ_2.

ii. Создаем списки возможных прообразов для элементов σ_1, σ_2 — $\{\sigma_i^j\}, i = 1, 2, j = 1...16$.

iii. Фиксируем подгруппу $K \leqslant \mathbb{Z}_2^4$.

iv. Генерируем группу $G =< \sigma_1^k, \sigma_2^j, K >$.

v. Если выполняется условие о связи между порядками образа, ядра и прообраза $|G|/|K| = |H|$, то G является подгруппой в Π_2, переходящей при гомоморфизме в H.

Перебирая все подгруппы H в D_4, получаем все подгруппы в Π_2. С помощью этого алгоритма с точностью до сопряжения элементами всей группы Π были найдены 18 нециклических подгрупп 4 порядка, 41 нециклическая подгрупа 8 порядка, 33 нециклические подгруппы 16 порядка, 15 нециклических подгрупп 32 порядка, 7 нециклических подгрупп 64 порядка в Π_2.

Так как для циклических групп когомологии вялого модуля нулевые, остается рассмотреть подгруппы, найденные выше. Мы рассматриваем группы по возрастанию их порядка. Для каждой группы всегда находилась либо циклическая подгруппа индекса 2, либо нециклическая подгруппа (с точностью до сопряжения) индекса 2, рассмотренная на предыдущем шаге, с нулевой группой одномерных когомологией. Таким образом, в каждом случае применим алгоритм 2.2. Результаты его работы позволили выделить две подгруппы порядка 4, шесть подгрупп порядка 8, пять подгрупп порядка 16 и одну подгруппу порядка 32, для которых когомологический инвариант вялого модуля нетривиален. Список этих подгрупп читатель может найти в таблицах 2 и 3 теоремы 2.6. Следуя намеченному плану, мы переходим к рассмотрению подгрупп группы Π, силовские 2-подгруппы которых сопряжены упомянутым выше подгруппам Π_2.

Алгоритм 2.5 (нахождение подгрупп с заданной силовской 2-группой). Дана 2-подгруппа π в группе Π.

i. Составляем полный список $\{\sigma_i\}$ 3-подгрупп в группе Π.

ii. Для каждой подгруппы σ_i генерируем группу $G =< \pi, \sigma_i >$.

iii. Если порядок силовской 2-подгруппы группы G равен порядку группы π, то G является одной из искомых подгрупп.

Мы применили алгоритм 2.5 для каждой из 2-групп таблиц 2 и 3. Были найдены 12 подгрупп в группе Π, все они оказались 2-порожденными. Для каждой из них вычислили когомологический инвариант, используя алгоритм 2.3. Он оказался нетривиальным для четырех групп: № 14 табл. 2 (ее силовская 2-подгруппа — группа № 11 табл. 2), № 15 табл. 2 (ее силовская 2-подгруппа — группа № 12 табл. 2), № 16 табл. 2 (ее силовская 2-подгруппа — группа № 13 табл. 2), № 2 табл. 3 (ее силовская 2-подгруппа — группа № 1 табл. 3).

Наконец, собирая все представленные выше результаты, получаем основную теорему.

Теорема 2.6. Пусть T_4 — максимальный k-тор без аффекта в полупростой группе типа F_4, L — минимальное поле разложения тора T с группой Галуа $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$, X — гладкая проективная модель тора T, $\overline{X} = X \otimes L$. Тогда в обозначениях замечания 2.1

i. Когомологический бирациональный инвариант $H^1(\pi, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) = \mathbb{Z}_2$ тогда и только тогда, когда подгруппа π группы Π сопряжена одной из следующих групп (табл. 2).

Таблица 2

№	Порядок подгруппы π	Система образующих π
1	4	$(-1-234), (-12-3-4)$
2	4	$(-12-34), (-1432)$
3	8	$(-12-34), (1-23-4), (-1432)$
4	8	$(-143-2), (-12-34)$
5	8	$(-12-34), (1432), (-1-23-4)$
6	8	$(1-4-32), (-1-2-34)$
7	8	$(34-1-2), (-12-34)$
8	16	$(-143-2), (123-4), (-12-34)$
9	16	$(-2341), (1-23-4)$
10	16	$(34-1-2), (-1432), (-12-34)$
11	16	$(34-1-2), (-1-234), (-21-43)$
12	16	$(-2341), (14-32)$
13	32	$(-2341), (-1432), (1-23-4)$
14	48	$(2431)\cdot\tau, (-1-234)$
15	48	$(-2341), \tau$
16	96	$(-12-34)\cdot\tau, (-2341)$

ii. Когомологический бирациональный инвариант $H^1(\pi, \operatorname{Pic}\overline{X}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ тогда и только тогда, когда подгруппа π группы Π сопряжена одной из следующих групп (табл. 3).

Таблица 3

№	Порядок подгруппы π	Система образующих π
1	8	$(34-1-2), (2-1-43)$
2	24	$(2-4-31)\cdot\tau, (-3-412)$

iii. В остальных случаях $H^1(\pi, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0$.

Автор статьи благодарит В.Е. Воскресенского и С.Ю. Попова за постоянное внимание и поддержку, а также Б.Э. Кунявского за полезные замечания и исправления.

Литература

[1] Воскресенский В.Е. Максимальные торы без аффекта в полупростых алгебраических группах // Матем. заметки. 1988. Т. 44. Вып. 3. С. 309–318.

[2] Воскресенский В.Е., Кунявский Б.Э. О максимальных торах в полупростых алгебраических группах // Деп. в ВИНИТИ 5.03.84. № 1269. Куйбышев, 1984.

[3] Клячко А.А. Прямые слагаемые перестановочных модулей и бирациональная геометрия. Арифметика и геометрия многообразий. Самара, 1992.

[4] Cortella A., Kunyavski B. Rationality problem for generic tori in simple groups // J. Algebra 225 (2000). P. 771–793.

[5] Попов С.Ю. Решетки Галуа и их бирациональные инварианты // Вестник СамГУ. 1998. № 4(10). С. 71–83.

[6] Lemire N., Popov V.L., Reichstein Z. Cayley groups // J. Amer. Math. Soc. 19 (2006). P. 921–967.

[7] Белова Л.А. Модули четверной группы Клейна и их когомологические инварианты // Вестник СамГУ. 2008. № 6(65). С. 59–70.

[8] Воскресенский В.Е. Алгебраические торы М.: Наука, 1977.

[9] Воскресенский В.Е. Проективные инвариантные модели Демазюра // Известия АН СССР. Сер.: Математическая. 1982. Т. 46. № 2. С. 195–210.

[10] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Системы корней. М.: Мир, 1972.

[11] Алгебраическая теория чисел / под ред. Дж. Касселса и А. Фрелиха. М.: Мир, 1969.

[12] Cohen H. A course in computational algebraic number theory. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1996.

Поступила в редакцию 15/*VI*/2009;
в окончательном варианте — 15/*VI*/2009.

BIRATIONAL INVARIANTS FOR THE TORUS WITHOUT AFFECT IN A GROUP OF F_4 TYPE

© 2009 Yu.Yu. Krutikov[2]

In the paper all the cohomological birational invariants for the torus without affect in a semisimple exceptional group of F_4 type are calculated. Kunyavski B. and Cortella A. have proved that this torus is not rational. We prove that the Picard group of a projective model for the studied torus is not cohomologically trivial. We find all the subgroups in Weyl group $W(F_4)$ for which the corresponding cohomological invariant is not trivial.

Key words: algebraic torus, birational invariant, cohomology, flasque resolution, semisimple group.

Paper received 15/*VI*/2009.
Paper accepted 15/*VI*/2009.

[2]Krutikov Yuri Yurievich (`yuri820710@mail.ru`), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.