УДК 517.956.3

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2009 В.Б. Дмитриев[1]

В работе рассматривается смешанная задача для гиперболического уравнения с нелинейным интегральным условием вместо стандартного граничного и нелинейной правой частью. Задача рассмотрена в пространстве произвольной размерности. Доказаны существование и единственность решения.

**Ключевые слова:** нелокальная задача, нелинейные условия, гиперболическое уравнение, априорная оценка, обобщенное решение.

## Введение

Математическое моделирование ряда процессов, изучаемых в физике, химии и биологии, нередко приводит к постановке нелокальных задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Весьма удобным способом описания налагаемых на искомое решение условий является задание их в интегральной форме как среднее значение решения на принадлежащих области, в которой ищется решение, многообразиях. Исследования нелокальных задач с интегральными условиями показали, что стандартные методы для их изучения часто оказываются неприемлемыми без соответствующих модификаций.

Важный шаг был сделан в работе А.И. Кожанова и Л.С. Пулькиной [4], где была доказана однозначная разрешимость краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений.

В настоящей работе доказана однозначная обобщенная разрешимость задачи с нелокальным условием, содержащим как интегральный оператор от искомого решения, так и значение производной от него на границе.

[1]Дмитриев Виктор Борисович (dmitriev_v.b@mail.ru), кафедра математических методов и информационных технологий Самарского муниципального института управления, 443084, Россия, г. Самара, ул Стара-Загора, 96.

Однако как интегральное условие, так и правая часть нелинейны по $u$, поэтому вывод нужных неравенств был более труден и тонок, чем в работе [2].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\, u_{x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\, u_{x_i} + b(x,t)\, u_t =$$

$$= f(x,t,u) \tag{1.1}$$

в цилиндре $Q_T = \{(x,\tau) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \tau < T\}$, где $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, и поставим для него задачу с начальными условиями Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{1.2}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{1.3}$$

и нелокальным условием

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\mathbf{n}, x_i)\,|_{S_T} = \int_0^t \int_\Omega K_1(x,y,\tau,u(y,\tau))\,dy\,d\tau +$$

$$+ \int_\Omega K_2(x,y,t,u(y,t))\,dy,\ x \in \partial\Omega, \tag{1.4}$$

где $\varphi(x), \psi(x), K_1(x,y,\tau,u(y,\tau)), K_2(x,y,t,u(y,t))$ заданы, а $S_T = \{(x,t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ — боковая поверхность цилиндра $Q_T$. Здесь

$$a_{ij} = a_{ji},\ \nu\xi^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2,\ \nu > 0.$$

Введем понятие обобщенного решения поставленной задачи. Для этого умножим (1.1) на $v(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ такую, что $v(x,T) = 0$, и, предполагая, что $u(x,t)$ решение задачи (1.1)–(1.4), проинтегрируем по $Q_T$:

$$\int_0^T \int_\Omega Lu \cdot v\,dx\,dt = \int_0^T \int_\Omega fv\,dx\,dt.$$

Интегрируя левую часть, получаем

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Big(-u_tv_t+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\,u_{x_j}v_{x_i}+\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\,u_{x_i}v+b(x,t)\,u_tv+$$

$$+a(x,t)\,uv\Big)\,dx\,dt+\int\limits_\Omega u_tv\Big|_0^T\,dx-\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}v\,\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\mathbf{n},x_i)\,ds\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega fv\,dx\,dt.$$

Заметим, что $u_t|_{t=0}=\psi$, и в силу условия (1.4) получим тождество, с помощью которого введем понятие обобщенного решения:

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(-u_tv_t+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\,u_{x_j}v_{x_i}+\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\,u_{x_i}v+b(x,t)\,u_tv+$$

$$+a(x,t)\,uv)\,dx\,dt-\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}v(x,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega K_1(x,y,\tau,u(y,\tau))\,dy\,d\tau\,ds\,dt-$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}v(x,t)\int\limits_\Omega K_2(x,y,t,u(y,t))\,dy\,ds\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f(x,t,u)\,v(x,t)\,dx\,dt+\int\limits_\Omega\psi(x)\,v(x,0)\,dx. \tag{1.5}$$

**Определение.** Назовем обобщенным решением из $W_2^1(Q_T)$ задачи (1.1)–(1.4) функцию $u(x,t)\in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию (1.2) и тождеству (1.5) для любой функции $v\in W_2^1(Q_T)$, такой, что $v(x,T)=0$.

Основным результатом работы является следующая

**Теорема.**

Пусть выполнены следующие условия:

$$\max_{Q_T}\Big(|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}|,|\frac{\partial a_i}{\partial x_i}|,|\frac{\partial b}{\partial t}|,|a_i|,|b|\Big)\leqslant\mu_1,$$

$$|K_1(x,y,\tau,u_1)-K_1(x,y,\tau,u_2)\,|\leqslant R_1(y,\tau)\,|u_1-u_2|,$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega R_1^2(y,t)\,dy\,dt=R_{11}<\infty,\ |K_1(x,y,t,0)\,|\leqslant F_1(y,t)\quad\forall x\in\Omega,$$

$$\int_0^T \left( \int_\Omega F_1(y,\tau)\,dy \right)^2 d\tau = M_{11} < \infty,$$

$$|K_2(x,y,t,u_1) - K_2(x,y,t,u_2)\,| \leqslant R_2(y,t)\,|u_1 - u_2|,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega R_2^2(y,t)\,dy = R_{21} < \infty, \ |K_2(x,y,t,0)\,| \leqslant F_2(y,t) \quad \forall x \in \Omega,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega F_2(y,t)\,dy = M_{21} < \infty,$$

$$\left| \frac{\partial K_2(x,y,t,u)}{\partial t} \right| \leqslant A(y,t)\,|u| + B(y,t),$$

$$\int_0^T \int_\Omega A^2(y,t)\,dy\,dt = M_{22} < \infty, \ \int_0^T \left( \int_\Omega B(y,t)\,dy \right)^2 dt = M_{23} < \infty,$$

$$|f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2)\,| \leqslant H(x,t)\,|u_1 - u_2|,$$

$$|f(x,t,0)\,| \leqslant E(y,t) \quad \forall x \in \Omega,$$

$$E(x,t) \in L_{2,1}(Q_T),\ \varphi(x) \in W_2^1(\Omega),\ \psi(x) \in L_2(\Omega),$$

$$\int_0^T \sup_{x\in\Omega} H(x,t)\,dt = G < \infty.$$

Тогда задача (1.1)–(1.4) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$.

Доказательство проделаем следующим образом: сначала получим априорную оценку, затем докажем единственность решения, затем при помощи априорной оценки докажем существование решения.

Мы будем использовать неравенство

$$\int_{\partial\Omega} |u|\,ds \leqslant c \int_\Omega \Big( |\nabla u| + |u| \Big)\,dx, \tag{1.6}$$

справедливое для любой функции $u \in W_1^1(\Omega)$ и области $\Omega$ с гладкой границей [5, с. 77].

## 2. Априорная оценка

Рассмотрим уравнение

$$Lw = f(x,t,w). \tag{2.1}$$

Пусть $w(x,t) \in W_2^2(Q_T)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее нелокальному условию

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_j}\cos(\mathbf{n},x_i)\,|_{S_T} = \int\limits_0^t\int\limits_\Omega K_1(x,y,\tau,w(y,\tau))\,dy\,d\tau +$$

$$+\int\limits_\Omega K_2(x,y,t,w(y,t))\,dy. \tag{2.2}$$

Умножим уравнение (2.1) на $2w_t$ и результат проинтегрируем по $Q_t$, $t \leqslant T:$

$$2\int\limits_{Q_t} Lw\cdot w_t\,dx\,dt = 2\int\limits_{Q_t} fw_t\,dx\,dt. \tag{2.3}$$

Левую часть (2.3) преобразуем с помощью интегрирования по частям и, полагая $y(t) = \int\limits_\Omega \Big(w_t^2 + \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}\Big)\,dx$, получаем

$$y(t) \leqslant y(0) + c_1\int\limits_0^t y(t)\,dt + 2\int\limits_{S_t} w_t \int\limits_0^t\int\limits_\Omega K_1(x,y,\tau,w(y,\tau))\,dy\,d\tau\,ds\,dt +$$

$$+2\int\limits_{S_t} w_t\int\limits_\Omega K_2(x,y,t,w(y,t))\,dy\,ds\,dt + 2\int\limits_{Q_t} f(x,t,w)\,w_t\,dx\,dt. \tag{2.4}$$

Здесь постоянная $c_1$ определяется постоянными $\nu$ и $\mu_1$ из условий теоремы.

Преобразуем первый интеграл по боковой поверхности следующим образом:

$$\int\limits_{S_t} w_t(x,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega K_1(x,y,\tau,w(y,\tau))\,dy\,d\tau\,ds\,dt =$$

$$= -\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^t w(x,t)\int\limits_\Omega K_1(x,y,t,w)\,dy\,dt\,ds +$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega} w(x,t)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega K_1(x,y,\tau,w(y,\tau))\,dy\,d\tau\,ds = i_{11}+i_{12}.$$

Оценим получившиеся интегралы. В силу наложенных на ядро условий после серии несложных оценок имеем:

$$|i_{11}| = \left|\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^t w(x,t)\int\limits_\Omega K_1(x,y,t,w)\,dy\,dt\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{Q_t}(w^2+w_t^2+|\nabla w|^2)\,dx\,dt + 2c|\Omega|R_{11}k(t)+2c|\Omega|M_{11}.$$

Здесь $k(t)=\sup\limits_{0\leqslant\xi\leqslant t}\int\limits_\Omega w^2(y,\xi)\,dy$.

Далее, применяя известные неравенства, в том числе неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$|i_{12}| \leqslant c_2\left(\int\limits_\Omega(|\nabla w|^2+w^2)\,dx\right)^{\frac12}\left(R_{11}\,k(t)+M_{11}^2\right)^{\frac12}. \tag{2.5}$$

Здесь обозначили $c_2 = 2\sqrt{c|\partial\Omega|}$.

Преобразуем второй интеграл по боковой поверхности следующим образом:

$$\int\limits_{S_t} w_t(x,t)\int\limits_\Omega K_2(x,y,t,w(y,t))\,dy\,ds\,dt =$$

$$= -\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^t w(x,t)\int\limits_\Omega\left(\frac{\partial K_2(x,y,t,w)}{\partial t}+\frac{\partial K_2(x,y,t,w)}{\partial w}w_t(y,t)\right)dy\,dt\,ds+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega} w(x,t)\int\limits_\Omega K_2(x,y,t,w(y,t))\,dy\,ds-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega} w(x,0)\int\limits_\Omega K_2(x,y,0,w(y,0))\,dy\,ds = i_{21}+i_{22}+i_{23}.$$

Оценим получившиеся интегралы. Используя наложенные на ядро условия и неравенство Коши — Буняковского, получаем после серии оценок:

$$|i_{21}| \leqslant c_3\int\limits_{Q_t}(w^2+w_t^2+|\nabla w|^2)\,dx\,dt + 2c|\Omega|M_{22}k(t)+2c|\Omega|M_{23}.$$

Здесь $c_3 = c\max\{2M_{22}|\Omega|+1, R_{21}|\Omega|\}$.

Далее, применяя неравенство Коши — Буняковского и затем неравенство (1.6), получаем

$$|i_{22}| = \left| \int\limits_{\partial\Omega} w(x,t) \int\limits_{\Omega} K_2(x,y,t,w(y,t))\,dy\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \left( \int\limits_{\Omega} (|\nabla w|^2 + w^2)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( R_{21} \int\limits_{\Omega} w^2(x,t)\,dx + M_{21}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.6)$$

Введем обозначение

$$z(t) \equiv \int\limits_{\Omega} \Big( w^2 + w_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} \Big)\,dx.$$

Теперь воспользуемся неравенством [5, с. 204]

$$\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)\,dx \leqslant 2 \int\limits_{\Omega} w^2(x,0)\,dx + 2t \int\limits_0^t y(t)\,dt. \qquad (2.7)$$

Тогда получим

$$k(t) = \sup_{0 \leqslant \xi \leqslant t} \int\limits_{\Omega} w^2(x,\xi)\,dx \leqslant 2 \int\limits_{\Omega} w^2(x,0)\,dx + 2t \int\limits_0^t y(t)\,dt, \qquad (2.8)$$

и, применяя к (2.5) и к (2.6):

$$|i_{12}| \leqslant M_{14} z^{\frac{1}{2}}(t) \Big[ 2R_{11} \int\limits_{\Omega} w^2(x,0)\,dx + 2R_{11} t \int\limits_0^t y(t)\,dt + M_{11}^2 \Big]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.9)$$

$$|i_{22}| \leqslant M_{24} z^{\frac{1}{2}}(t) \Big[ 2R_{21} \int\limits_{\Omega} w^2(x,0)\,dx + 2R_{21} t \int\limits_0^t y(t)\,dt + M_{21}^2 \Big]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.10)$$

Здесь константы $M_{14}$ и $M_{24}$ определяются константами $\nu$ и $c_2$. Заметим, что с помощью (2.9) можно оценить и $|i_{23}|$:

$$|i_{23}| \leqslant 2M_{24}(z(0))^{\frac{1}{2}} (2R_{21} z(0) + M_{21}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Складывая (2.4) и (2.7) и обозначая $\sup\limits_{0 \leqslant \xi \leqslant t} z(\xi) = \hat{z}$, $d = 2 + 8\Big(R_{11} + R_{21}\Big) c|\Omega|$, $2c|\Omega|(M_{11} + M_{23}) + \hat{z}(t) = z_1(t)$, получаем после преобразований с учетом оценок на $|i_{11}|, |i_{12}|, |i_{21}|, |i_{22}|, |i_{23}|$:

$$z_1(t) \leqslant dz_1(0) + (c_1 + c_4 + dt)\, t \cdot z_1(t) + 2\|B\|_{2,1,Q_t}\, z_1^{\frac{1}{2}}(t) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{2} M_{i4}\, z_1^{\frac{1}{2}}(t)\left(2R_{i1}\, z(0) + 2R_{i1}t^2 \cdot z_1(t) + M_{i1}^2\right)^{\frac{1}{2}} + z_1(t)\int\limits_0^t \lambda(t)\, dt.$$

Здесь мы ввели обозначение $\lambda(t) = \sup\limits_{x\in\Omega} H(x,t)$. При этом константа $c_4$ определяется константами $\nu$, $c$ и $c_3$.

Однако для наших целей нам нужно оценить не именно интеграл $\int_0^t \lambda(t)\, dt$, а более общий $\int_{t_1}^{t_1+t} \lambda(t)\, dt$ (где $t_1 + t \leqslant T$) для произвольного $t_1$. Имеем из условия: $\int_0^T \lambda(t)\, dt < \infty$, и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем: $\int_{t_1}^{t_1+t} \lambda(t)\, dt < \varepsilon$, как только мера Лебега множества $E = [t_1, t_1 + t]$ достаточно мала: $\mu(E) = t < \delta$.

После преобразований получаем следующую оценку, верную для любого $t \in [0, T]$:

$$\hat{z}^{\frac{1}{2}}(t) \leqslant p(t) z^{\frac{1}{2}}(0) + q(t)\|B\|_{2,1,Q_t} + r(t), \tag{2.11}$$

где $p(t), q(t)$ и $r(t)$ определяются постоянными $c, M_{ij}, G$ и $R_{i1}$ и величиной $t$. Это энергетическое неравенство, позволяющее оценить энергетическую норму решения $w(x,t)$ через начальные данные Коши и $f(x,t,w)$.

## 3. Доказательство единственности решения

Пусть задача (1.1)–(1.4) имеет два обобщенных решения $u_1$ и $u_2$ из $W_2^1(Q_T)$. Тогда их разность $u = u_1 - u_2 \in W_2^1(Q_T)$ удовлетворяет равенству

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\, u_{x_i} v + b(x,t)\, u_t v)\, dx\, dt -$$

$$-\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v(x,t) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \Big\{ K_1(x,y,\tau,u_1(y,\tau)) - K_1(x,y,\tau,u_2(y,\tau)) \Big\}\, dy\, d\tau\, ds\, dt -$$

$$-\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v(x,t) \int\limits_\Omega \Big\{ K_2(x,y,t,u_1(y,t)) - K_2(x,y,t,u_2(y,t)) \Big\}\, dy\, ds\, dt -$$

$$-\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2)) v\, dx\, dt = 0 \tag{3.1}$$

и при $t=0$ обращается в нуль. Возьмем в этом равенстве

$$v(x,t)=\begin{cases} 0, & \text{при } p\leqslant t\leqslant T,\\ \int\limits_p^t u(x,\tau)\,d\tau, & \text{при } 0\leqslant t\leqslant p. \end{cases} \tag{3.2}$$

Подставим $v$ из (3.2) в (3.1) и выразим $u, u_t$ и $u_{x_i}$ через $v$ и их производные.

После преобразований, учитывая условия $v_t|_{t=0}=u|_{t=0}=0$, $v_{x_i}|_{t=p}=0$ и условия теоремы, получаем

$$\int\limits_\Omega\left[v_t^2(x,p)+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\,v_{x_j}(x,t)\,v_{x_i}(x,t)\,|_{t=0}\right]dx=$$

$$=-\int\limits_{Q_p}\Big[\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}v_{x_j}(x,t)\,v_{x_i}(x,t)+$$

$$+2\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\,v_{x_i}(x,t)\,v_t(x,t)+2\,b\,v_t^2(x,t)+2\Big(\sum_{i=1}^n\frac{\partial a_i(x,t)}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}\Big)v_t(x,t)\,v(x,t)\Big]\,dx\,dt-2\int\limits_0^p\int\limits_{\partial\Omega}v(x,t)\times$$

$$\times\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Big\{K_1(x,y,t,u_1(y,\tau))-K_1(x,y,t,u_2(y,\tau))\Big\}\,dy\,d\tau\,ds\,dt-$$

$$-2\int\limits_0^p\int\limits_{\partial\Omega}v(x,t)\int\limits_\Omega\Big\{K_2(x,y,t,u_1(y,t))-K_2(x,y,t,u_2(y,t))\Big\}\,dy\,ds\,dt-$$

$$-2\int\limits_0^p\int\limits_\Omega(f(x,t,u_1)-f(x,t,u_2))v\,dx\,dt. \tag{3.3}$$

При $t\leqslant p$ имеем $u=v_t$ и, применяя условия теоремы и известные неравенства, в том числе неравенство Коши — Буняковского и неравенство (1.6), получаем:

$$\int\limits_\Omega\left[u^2(x,p)+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\,v_{x_j}v_{x_i}|_{t=0}\right]dx\leqslant c_5\int\limits_{Q_p}\left(|\nabla v|^2+(p^2+p+1)\,u^2\right)\,dx\,dt+$$

$$+2\left|\int_0^p\int_\Omega (f(x,t,u_1)-f(x,t,u_2))v\,dx\,dt\right|. \tag{3.4}$$

Здесь $c_5$ зависит только от $\mu_1$, $c, |\Omega|, R_{11}, R_{21}$. Далее, для почти всех $x\in\Omega$ и $t\in[0,p]$

$$v^2=\left(\int_p^t u\,d\tau\right)^2\leqslant (p-t)\int_t^p u^2 d\tau\leqslant p\int_0^p u^2 d\tau.$$

С помощью этого неравенства произведем следующие оценки:

$$\left|\int_0^p\int_\Omega (f(x,t,u_1)-f(x,t,u_2))v\,dx\,dt\right|\leqslant \int_0^p\int_\Omega H(x,t)\,|v\,u|\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant p}\int_\Omega\left(|u|\sqrt{p}\cdot\sqrt{\int_0^p u^2\,dt}\right)\,dx\cdot\int_0^p \sup_{x\in\Omega} H(x,t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}G\sqrt{p}\sup_{0\leqslant t\leqslant p}\int_\Omega u^2\,dx+\frac{1}{2}G\sqrt{p}\int_{Q_p}u^2\ dx\,dt.$$

Введем функции $g_i(x,t)=\int\limits_t^0 u_{x_i}(x,\tau)\,d\tau$. В силу (3.2) $v_{x_i}{=}\int\limits_p^t u_{x_i}(x,\tau)\,d\tau=$ $=g_i(x,p)-g_i(x,t)$, $\quad t\leqslant p$ и, подставляя в (3.4), мы получаем после ряда оценок

$$\int_\Omega u^2(x,p)\,dx+(\nu-2c_5p)\int_\Omega\sum_{i=1}^n g_i^2(x,p)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c_6\int_{Q_p}\left(\sum_{i=1}^n g_i^2+u^2\right)\,dx\,dt+G\sqrt{p}\sup_{0\leqslant t\leqslant p}\int_\Omega u^2\,dx, \tag{3.5}$$

где $c_6(p)=c_5(3+p+p^2)+G\sqrt{p}$.

Воспользуемся теперь произволом в выборе $p$. Для $\xi\in[0,p_0]$ имеем

$$\int_\Omega u^2(x,\xi)\,dx+(\nu-2c_5p_0)\int_\Omega\sum_{i=1}^n g_i^2(x,\xi)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c_6(p_0)\int_{Q_{p_0}}\left(\sum_{i=1}^n g_i^2+u^2\right)\,dx\,dt+G\sqrt{p_0}\sup_{0\leqslant \xi\leqslant p_0}\int_\Omega u^2(x,\xi)\,dx. \tag{3.6}$$

Перейдем теперь к супремуму по всем $\xi \in [0, p_0]$. После преобразований получаем

$$(1 - G\sqrt{p_0}) \sup_{0 \leqslant \xi \leqslant p_0} \int\limits_{\Omega} u^2(x,\xi)\, dx + (\nu - 2c_5 p_0) \sup_{0 \leqslant \xi \leqslant p_0} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} g_i^2(x,\xi)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_6(p_0) \int\limits_{Q_{p_0}} \left( \sum_{i=1}^{n} g_i^2 + u^2 \right) dx\, dt. \tag{3.7}$$

Для $p_0 \in [0, \nu/(4c_5)]$ коэффициент $\nu - 2c_5 p_0 \geqslant \nu/2$ , а $u(x,p_0)$ и $g_i(x,p_0)$ при $p_0 = 0$ равны нулю. Кроме того, $1 - G\sqrt{p_0} \geqslant 1/2$ при $p_0 \leqslant 1/(4G^2)$.

Тогда мы получаем неравенство для супремумов, а значит, что при $\xi = p_0$ оно будет верно:

$$\int\limits_{\Omega} \left( u^2(x,p_0) + \sum_{i=1}^{n} g_i^2(x,p_0) \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_6(p_0)}{\min(1/2, \nu/2)} \int\limits_0^{p_0} \int\limits_{\Omega} \left( u^2(x,\tau) + \sum_{i=1}^{n} g_i^2(x,\tau) \right) dx\, d\tau.$$

Это в силу неравенства Гронуолла [1, с. 23], где $g(t) = 0$, означает, что $\int\limits_{\Omega} \left( u^2(x,p) + \sum\limits_{i=1}^{n} g_i^2(x,p) \right) dx = 0$, тогда $u(x,p) = 0$ и $g_i(x,p) = 0$ при $p \in [0,\gamma]$, где $\gamma = \min\Big(\nu/(4c_5), 1/(4G^2)\Big)$. Повторяя рассуждение для $t \in [\gamma, 2\gamma]$, убедимся, что $u(x,t) = 0$ на этом промежутке. И так в конечное число шагов докажем обращение $u(x,t)$ в нуль для всех $t \in [0,T]$. Единственность доказана.

## 4. Доказательство существования решения

Воспользуемся методом Галеркина. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ есть фундаментальная система в $W_2^1(\Omega)$ и выполняется свойство ортонормированности: $(\varphi_k, \varphi_l) = \int\limits_{\Omega} \varphi_k \varphi_l\, dx = \delta_k^l$. Приближенное решение $u^N(x,t)$ ищем в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\, \varphi_k(x) \tag{4.1}$$

из соотношений

$$(u_{tt}^N, \varphi_l) + \int\limits_{\Omega} \Big[ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, u_{x_j}^N(x,t)\, \varphi_{lx_i}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\, u_{x_i}^N(x,t)\, \varphi_l(x) +$$

$$+b(x,t)\,u_t^N(x,t)\,\varphi_l(x)\Big]\,dx-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\varphi_l\int\limits_0^t\int\limits_\Omega K_1(x,y,\tau,u^N(y,\tau))\,dy\,d\tau\,ds-\int\limits_{\partial\Omega}\varphi_l\int\limits_\Omega K_2(x,y,t,u^N(y,t))\,dy\,ds-$$

$$-(f(x,t,u^N(x,t)),\varphi_l)=0,\ \ l=1,2,\ldots,N, \tag{4.2}$$

$$c_k^N(0)=\alpha_k^N,\ \ \frac{d}{dt}c_k^N(t)\,|_{t=0}=(\psi,\varphi_k). \tag{4.3}$$

Здесь $\alpha_k^N$ — коэффициенты сумм $\varphi^N(x)=\sum\limits_{k=1}^N\alpha_k^N\varphi_k(x)$, аппроксимирующих при $N\to\infty$ функцию $\varphi(x)$ в норме $W_2^1(\Omega)$. Подставим (4.1) в (4.2) и после несложных преобразований и смены порядка суммирования получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}c_l^N(t)+\sum_{k=1}^N c_k^N(t)\int\limits_\Omega\Bigg(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\,\varphi_{kx_j}(x)\,\varphi_{lx_i}(x)+\sum_{i=1}^n a_i\,\varphi_{kx_i}(x)\,\varphi_l(x)+$$

$$+b\,\varphi_{kt}(x)\,\varphi_l(x)\Bigg)\,dx-\int\limits_{\partial\Omega}\varphi_l(x)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega K_1(x,y,\tau,\sum_{k=1}^N c_k^N(\tau)\,\varphi_k(y))\,dy\,d\tau\,ds-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\varphi_l(x)\int\limits_\Omega K_2(x,y,t,\sum_{k=1}^N c_k^N(t)\,\varphi_k(y))\,dy\,ds-$$

$$-(f(x,t,\sum_{k=1}^N c_k^N(t)\,\varphi_k(x)),\varphi_l)=0, \tag{4.4}$$

$$l=1,\ldots,N.$$

Нужно оценить коэффициенты системы (4.4), и из условий теоремы следует, что это конечные величины. Далее, функции в левой части (4.4) липшицевы по каждой из переменных $c_l^N(t)$.

Таким образом, система (4.4) — система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по $t$ для неизвестных $c_k^N(t)$, $k=1,\ldots,N$, разрешенная относительно старших производных, а остальные слагаемые представляют собой липшицевы функции неизвестных $c_k^N(t)$, $k=1,\ldots,N$; ее свободные члены $f_l\equiv(f,\varphi_l)\in L_2(0,T)$, если $f\in L_{2,1}(Q_T)$, $\varphi\in W_2^1(\Omega)$ и $\psi\in L_2(\Omega)$. Таким образом, система (4.4) для любого $N$ однозначно разрешима при начальных условиях (4.3) [7, с. 27], причем $\frac{d^2c_k^N}{dt^2}\in L_2(0,T)$.

Мы построили последовательность $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$. Отметим, что для $u^N$ справедлива оценка (2.11). Правая часть (2.11) мажорируется постоянной, не зависящей от $N$ и $t \in \in [0,T]$, так что

$$\int\limits_{\Omega} \Big[(u^N)^2 + |\nabla u^N|^2 + (u_t^N)^2\Big]\, dx \leqslant c_7, \quad t \in [0,T], \tag{4.5}$$

и тогда

$$\|u^N\|_{W_2^1(Q_T)} \leqslant c(T). \tag{4.6}$$

Благодаря (4.6) из последовательности $\{u^N\}, N = 1, 2, \ldots,$ можно выбрать подпоследовательность (за которой сохраним то же наименование), сходящуюся слабо в $W_2^1(Q_T)$ к некоторому элементу $u_1 \in W_2^1(Q_T)$. Согласно условию (4.5) из этой последовательности можно выделить подпоследовательность (за которой вновь сохраним то же обозначение), которая будет сходиться равномерно по $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Omega)$ слабо к элементу $u \in L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0,T]$, при этом в силу (4.6) $u \in W_2^1(Q_T)$ [5, с. 214]. Более того, полученная последовательность будет сходиться равномерно по $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Omega)$ к элементу $u \in L_2(\Omega)$ для любого $t \in [0,T]$ сильно.

Действительно, применяя лемму [6, с. 529] для случая $m = 2$, получим:

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} (u, \psi_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \|u\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{4.7}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon_1 > 0$. Найдем $N_\varepsilon$ для $\varepsilon = \varepsilon_1/(4c_7)$ из условия леммы. Неравенство (4.7), примененное для $u^N - u^{N_1}$ при $N_1 > N$, будет выглядеть так:

$$\|u^N - u^{N_1}\|_{2,\Omega} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} (u^N - u^{N_1}, \psi_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \|u^N - u^{N_1}\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Так как $\|u^N\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant c_7$ при всех $t \in [0,T]$ в силу (4.5), то

$$\varepsilon \|u^N - u^{N_1}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon \left(\|u^N\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u^{N_1}\|_{W_2^1(\Omega)}\right) \leqslant \frac{\varepsilon_1}{4c_7}(c_7 + c_7) = \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Теперь возьмем $N = \max\limits_{i=1,\ldots,N_\varepsilon} N_i$, где $N_i$ определяется из условия $|(u^{N_i} - u^{N_1}, \psi_k(x))| < \varepsilon_1/(2\sqrt{N_\varepsilon}) \quad \forall N_1 > N_i$. $N_i$ существуют в силу слабой сходимости $\{u^N\}, N = 1, 2, \ldots,$ в норме $L_2(\Omega)$ к элементу $u \in L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0,T]$.

Тогда мы имеем $(u^{N_i} - u^{N_1}, \psi_k(x))^2 < \varepsilon_1^2/(4N_\varepsilon) \quad \forall i = 1, \ldots, N_\varepsilon$ при $N_1 > N$. Поэтому $\left(\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon} (u^N - u^{N_1}, \psi_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{\varepsilon_1^2/4} = \varepsilon_1/2$, а тогда

$\|u^N - u^{N_1}\|_{2,\Omega} \leqslant \varepsilon_1$ в силу (4.8). Это и означает сильную сходимость $\{u^N\}, N = 1, 2, \ldots,$ к элементу $u \in L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0, T]$.

Покажем, что $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1.1)–(1.4). Начальное условие будет выполнено в силу отмеченной сходимости $u^N(x,t)$ к $u(x,t)$ в $L_2(\Omega)$ и того, что $u^N(x,0) \to \varphi(x)$ в $L_2(\Omega)$. Теперь умножим каждое из (4.2) на свою функцию $d_l(t) \in W_2^1(0,T)$, $d_l(T) = 0$, полученные равенства просуммируем по всем $l$ от 1 до $N$ и проинтегрируем по $t$ от 0 до $T$. После этого в первом члене проведем интегрирование по частям, перенося $\frac{\partial}{\partial t}$ с $u^N$ на $v \equiv \sum\limits_{l=1}^{N} d_l(t)\,\varphi_l(x)$. Это даст тождество

$$\int\limits_{Q_T} \Big( -u_t^N v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j}^N v_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_{x_i}^N v + b\, u_t^N v + a\, u^N v dx \Big)\, dx\, dt -$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} K_1(x,y,\tau,u^N(y,\tau))\, dy\, d\tau\, ds\, dt -$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v \int\limits_{\Omega} K_2(x,y,t,u^N(y,t))\, dy\, ds\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} f(x,t,u^N) v\, dx\, dt + \int\limits_{\Omega} u_t^N v|_{t=0}\, dx, \tag{4.9}$$

справедливое для любой функции $v$ вида $\sum\limits_{l=1}^{N} d_l(t)\,\varphi_l(x)$. Совокупность таких $v$ мы обозначим через $\mathfrak{M}_N$. В (4.9) можно перейти к пределу по выбранной выше подпоследовательности при фиксированном $v$ из какого-либо $\mathfrak{M}_{N_i}$. Это приведет к тождеству (1.5) для предельной функции $u$ при любой функции $v \in \mathfrak{M}_{N_i}$.

При этом сильная сходимость $\{u^N\}$ к $u$ в $L_2(\Omega)$ нам нужна для того, чтобы интегралы, содержащие функции $K_1(x,y,\tau,u^N(y,\tau))$, $K_2(x,y,t,u^N(y,t))$, $f(x,t,u^N)$, сходились к соответствующим интегралам с функцией $u$ вместо $u^N$.

Далее, $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}_N$ плотно в $\hat{W}_2^1(Q_T)$, а $u \in W_2^1(Q_T)$, следовательно, (1.5) будет выполняться для $u(x,t)$ при любой функции $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$. Таким образом, предельная функция $u(x,t)$ есть обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ задачи (1.1)–(1.4).

## Литература

[1] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Иностр. лит., 1961. 122 с.

[2] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2006. № 2(42). С. 15–27.

[3] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения гиперболического типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки, 2006. № 42. С. 35–40.

[4] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Доклады Академии наук. 2005. Т. 404. № 5.

[5] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

[6] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

[7] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для ун-тов. Изд. 4-е. М.: Наука, 1974. 331 с.

Поступила в редакцию 22/*VI*/2009;
в окончательном варианте — 22/*VI*/2009.

## A MIXED PROBLEM WITH NONLINEAR INTEGRAL CONDITION FOR A HYPERBOLIC EQUATION

© 2009 V.B. Dmitriev[2]

Mixed problem for the hyperbolic equation with non-linear integral condition instead of a standard boundary condition and non-linear right side is viewed in the work. The task is viewed in the space of arbitrary dimensionality. The existence and uniqueness of the solution is proved.

**Key words:** nonlocal problem, hyperbolic equation, apriori estimation, generalized solution.

Paper received 22/*VI*/2009.
Paper accepted 22/*VI*/2009.

[2]Dmitriev Victor Borisovich (`dmitriev_v.b@mail.ru`), The Dept. of Mathematical Methods and Information Technologies, Samara Municipal Management Institute, Samara, 443084, Russia.