УДК 539.4

# МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕД С МИКРОСТРУКТУРОЙ В УСЛОВИЯХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

© 2009 А.Г. Михеев[1]

В статье получены макроскопические уравнения поведения композита в условиях изотермического фазового перехода. Под действием внешних нагрузок в объеме одного из компонентов из старой фазы образуется и вырастает новая фаза с новыми механическими свойствами.

**Ключевые слова:** композиты, фазовый переход, микроструктура, эффективные характеристики, макроскопические уравнения, статистическое усреднение, структурные деформации.

Рассмотрим микронеоднородную двухкомпонентную среду, занимающую объем $V$ и ограниченную поверхностью $S$. Пусть первый компонент занимает объем $V_1$, а второй компонент занимает объем $V_2$. При этом компоненты образуют матричную смесь. Пусть в объеме второго компонента $V_2$ происходит фазовый переход первого рода. Объем зарождающейся новой фазы обозначим $V_p$, а объем старой фазы как $V_q\,(V_2 = V_q + V_p)$. При фазовом превращении $V_q \to V_p$ в материале новой фазы возникают и развиваются необратимые структурные деформации $\alpha_{ij}(\mathbf{r})$, вызванные перестройкой кристаллической и доменной структуры материала. При этом $0 \leqslant \sqrt{\alpha_{ij}(\mathbf{r})\alpha_{ij}(\mathbf{r})} \leqslant \alpha_{\max}$, здесь $\alpha_{\max}$ — максимальный уровень структурных деформаций.

Локальный закон Гука для такой среды имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = 2\mu_1\left(\sqrt{e_{kl}e_{kl}}\right)\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) + \delta_{ij}\lambda_1\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}), && \mathbf{r}\in V_1,\\
&\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = 2\mu_q\left(\sqrt{e_{kl}e_{kl}}\right)\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) + \delta_{ij}\lambda_q\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}), && \mathbf{r}\in V_q,\\
&\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = 2\mu_p\left(\sqrt{e_{kl}e_{kl}}\right)\left(\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) - \alpha_{ij}(\mathbf{r})\right) + \delta_{ij}\lambda_p\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}), && \mathbf{r}\in V_p.
\end{aligned} \tag{1}$$

В качестве условий фазовых переходов принимаются поверхности нагружения

$$\begin{aligned}
&\left(s_{ij} - 2n_+\alpha_{ij}\right)\left(s_{ij} - 2n_+\alpha_{ij}\right) = {k_+}^2 \quad (V_q \to V_p)\,,\\
&\left(s_{ij} - 2n_-\alpha_{ij}\right)\left(s_{ij} - 2n_-\alpha_{ij}\right) = {k_-}^2 \quad (V_q \to V_p)\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

[1]Михеев Алексей Георгиевич (miheev_aleksey@mail.ru), кафедра математики, информатики и математических методов в экономике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Геометрическая структура рассматриваемой среды описывается случайными индикаторными функциями координат

$$\kappa_p(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_p, \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_p, \end{cases} \qquad \kappa_q(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_q, \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_q. \end{cases}$$

Для линеаризации уравнений (1) примем приближенно равенство

$$\mu_s = \mu_s\left(\sqrt{e_{kl}e_{kl}}\right) = \mu_s\left(\Lambda_s\right), \qquad \Lambda_s = \sqrt{\langle e_{kl}\rangle_s \langle e_{kl}\rangle_s}.$$

Тогда закон деформирования среды можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij}\left(\mathbf{r}\right) = 2\left(\langle\mu\rangle + \left(\mu_q\left(\Lambda_2\right) - \mu_1\left(\Lambda_1\right)\right)\kappa'_q\left(\mathbf{r}\right) + \right. \\ &\left. + \left(\mu_p\left(\Lambda_2\right) - \mu_1\left(\Lambda_1\right)\right)\kappa'_p\left(\mathbf{r}\right)\right)\varepsilon_{ij}\left(\mathbf{r}\right) - 2\mu_p\alpha_{ij}\left(\mathbf{r}\right)\kappa_p\left(\mathbf{r}\right) + \\ &+\delta_{ij}\left(\langle\lambda\rangle + \left(\lambda_q - \lambda_1\right)\kappa'_q\left(\mathbf{r}\right) + \left(\lambda_p - \lambda_1\right)\kappa'_p\left(\mathbf{r}\right)\right)\varepsilon_{pp}\left(\mathbf{r}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Для установления эффективного закона деформирования рассматриваемой микронеоднородной среды необходимо усреднить уравнения (3) по полному объему

$$\begin{aligned} &\langle s_{ij}\rangle = 2\langle\mu\rangle\langle e_{ij}\rangle + 2\left(\mu_q - \mu_1\right)\left\langle\kappa'_q e'_{ij}\right\rangle + 2\left(\mu_p - \mu_1\right)\left\langle\kappa'_p e'_{ij}\right\rangle - 2\mu_p\langle\kappa_p\alpha_{ij}\rangle, \\ &\langle\sigma_{pp}\rangle = 3\langle K\rangle\langle\varepsilon_{pp}\rangle + 3\left(K_q - K_1\right)\left\langle\kappa'_q\varepsilon'_{pp}\right\rangle + 3\left(K_p - K_1\right)\left\langle\kappa'_p\varepsilon'_{pp}\right\rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

Из соотношения (4) следует, что для установления эффективного закона Гука необходимо вычислить моменты $\left\langle\kappa'_s\varepsilon'_{ij}\right\rangle$. Для этого усредним систему уравнений равновесия

$$\varepsilon'_{ij}\left(\mathbf{r}\right) = \int\limits_V G_{ik\,,lj}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\right)\ \tau'_{kl}\left(\mathbf{r}_1\right)\ dr_1. \tag{5}$$

Умножая уравнения (5) на $\kappa'\left(\mathbf{r}\right)$ и усредняя их по объему $V$, принимая во внимание изотропность структуры композита, а затем, выразив величины $\langle e_{ij}\rangle_s$через $\langle e_{ij}\rangle$, находим

$$\begin{aligned} &\left\langle\kappa'_p e'_{ij}\right\rangle = \alpha z a_p c_p\left(b_p\langle e_{ij}\rangle + d_p\langle\alpha_{ij}\rangle_p\right), \quad \left\langle\kappa'_p\varepsilon'_{ss}\right\rangle = \gamma\omega_p c_p\langle\varepsilon_{ss}\rangle, \\ &\left\langle\kappa'_q e'_{ij}\right\rangle = \alpha z a_q c_q\left(b_q\langle e_{ij}\rangle + d_q\langle\alpha_{ij}\rangle_p\right), \quad \left\langle\kappa'_q\varepsilon'_{ss}\right\rangle = \gamma\omega_q c_q\langle\varepsilon_{ss}\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $a_p = \left(1 - \alpha\left(1 + c_p[m_p] - m_p\right)\right)^{-1}$, $a_q = \left(1 - \alpha\left(1 + c_q[m_q] - m_q\right)\right)^{-1}$, $b_p = \dfrac{1}{\langle\mu\rangle} - m_p + a_q\alpha c_q\left(\dfrac{1}{\langle\mu\rangle} - m_q\right)$, $b_q = \dfrac{1}{\langle\mu\rangle} - m_q + \alpha a_p c_p\left(\dfrac{1}{\langle\mu\rangle} - m_p\right)$, $d_p = m_p\left(1 - c_p\right) + \alpha a_q m_p c_q c_p$, $d_q = -m_p c_p + \alpha a_p m_p c_p\left(1 - c_p\right)$, $\omega_p = q_1 - 1 + [q_2]c_q + \gamma[q_2]\omega_q c_q$, $\omega_q = \left(1 - \gamma\left(1 + [q_2]c_q - q_2\right)\right)^{-1}[q_2]\left(c_q - 1\right)$, $z = \left(1 - a_q a_p\alpha^2[m_p][m_q]c_q c_p\right)^{-1}$.

Подставляя вычисленные величины $\left\langle\kappa'_s\varepsilon'_{ij}\right\rangle$ в уравнения (4), получим эффективный закон деформирования рассматриваемой микронеоднородной среды

$$\begin{aligned} \langle s_{ij}\rangle &= 2\mu^* \langle e_{ij}\rangle - 2\mu^\alpha \langle \alpha_{ij}\rangle_p\,, \\ \langle \sigma_{ij}\rangle &= 3K^* \langle \varepsilon_{ij}\rangle\,. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\mu^* = \langle\mu\rangle \left(1 + \alpha z \left([m_q]\, a_q b_q c_q + [m_p]\, a_p b_p c_p\right)\right),$$

$$\mu^\alpha = \langle\mu\rangle \left(m_p - \alpha z \left([m_q]\, a_q c_q c_p^{-1} + [m_p]\, a_p d_p\right)\right).$$

Величины $\Lambda_s$ вычисляются при решении системы уравнений, полученной из соотношений (6) и правила механического смешивания

$$\begin{aligned} \Lambda_p &= (1 + \alpha z a_p b_p)\, e + \alpha z a_p d_p \alpha, \\ \Lambda_q &= (1 + \alpha z a_q b_q)\, e + \alpha z a_q d_q \alpha, \\ \Lambda_1 &= c^{-1} (e - c_q \Lambda_q - c_p \Lambda_p)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Для решения системы (8) необходимо задать вид функции модулей пластичности $\mu_s(\Lambda_s)$, определяемый из эксперимента по деформационным свойствам материалов. Систему (8) в силу ее нелинейности следует решать численными методами с применением ЭВМ.

Рассмотрим поведение композиционного материала в условиях фазового перехода. Для определения макроскопического условия фазового превращения в рассматриваемой среде и закона ее деформирования необходимо усреднить соотношения (2) по объему новой фазы $V_p$.

$$\langle (s_{ij} - 2n_{+,-}\alpha_{ij})\ (s_{ij} - 2n_{+,-}\alpha_{ij})\rangle_p = k_{+,-}^2.$$

Ограничимся верхней оценкой этого условия, которое принимает вид

$$\langle s_{ij} - 2n_{+,-}\alpha_{ij}\rangle_p \langle s_{ij} - 2n_{+,-}\alpha_{ij}\rangle_p = k_{+,-}^2. \tag{9}$$

Подставим в условие (9) локальный закон Гука и применим правило механического смешивания

$$\begin{gathered} \left(2\mu_p \left(\langle e_{ij}\rangle_p - \langle \alpha_{ij}\rangle_p\right) - 2n_{+,-} \langle \alpha_{ij}\rangle_p\right) \times \\ \times \left(2\mu_p \left(\langle e_{ij}\rangle_p - \langle \alpha_{ij}\rangle_p\right) - 2n_{+,-} \langle \alpha_{ij}\rangle_p\right) = k_{+,-}^2. \end{gathered}$$

Исключая из этого уравнения с помощью формул (6), (7) деформации $\langle e_{ij}\rangle_p$, $\langle e_{ij}\rangle$, находим закон нагружения рассматриваемой среды

$$\langle s_{ij}\rangle = k^* \frac{\langle \alpha_{ij}\rangle}{\sqrt{\langle \alpha_{ij}\rangle \langle \alpha_{ij}\rangle}} + 2n^* \langle \alpha_{ij}\rangle_2 \tag{10}$$

и ассоциированную с ним макроскопическую поверхность нагружения

$$\left(\langle s_{ij}\rangle - 2\, n_{+,-}^* \langle \alpha_{ij}\rangle_2\right) \left(\langle s_{ij}\rangle - 2n_{+,-}^* \langle \alpha_{ij}\rangle_2\right) = k_{+,-}^{*2}. \tag{11}$$

Здесь $k_{+,-}^* = \left(\dfrac{k_{+,-}\mu^*}{\mu^\alpha}\right)$ — эффективный начальный предел фазового перехода, $n_{+,-}^* = \mu^* \langle a\rangle \left(1 - \alpha_1 + \dfrac{n_{+,-}}{a_p \mu_p}\right) - (1 - \alpha_1)\, a_p \mu_p c_p$ — эффективный коэффициент упрочнения.

Процесс фазового перехода может быть описан кинетическим уравнением

$$\frac{d\alpha}{dc_p} = h\,(1-\alpha)^{\lambda}\,c_p, \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \quad c_p|_{\alpha=0} = 0, \quad c_p|_{\alpha=\alpha_{\max}} = c_2. \tag{12}$$

Из уравнения (12) находим зависимость роста уровня структурных деформаций от концентрации новой фазы

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} = 1 - \left(1 - c_p^2\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \quad \text{или} \quad c_p = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} - 1\right)^{1-\lambda}}. \tag{13}$$

Параметр роста $\lambda$ остается постоянным на протяжении всего процесса фазового перехода, и его значение используется в уравнениях (11) во всем диапазоне развития структурных деформаций $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}$.

Тогда соотношение (11) принимает вид

$$\langle s_{ij}\rangle = \left(k^*_{+,-} + 2n^*_{+,-}\alpha_{\max}\left(1 - (1-c_p)^{\frac{1}{1-\lambda}}\right)\right)\frac{\langle\alpha_{ij}\rangle}{\sqrt{\langle\alpha_{kl}\rangle\,\langle\alpha_{kl}\rangle}}.$$

Таким образом, получены макроскопические определяющие уравнения поведения композиционного материала в условиях фазового перехода первого рода и его эффективные характеристики [1, 2].

## Литература

[1] Михеев А.Г. К теории сверхупругого поведения композиционных материалов с нестабильными компонентами // Вестник СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки, 2004. № 26. С. 108—114.

[2] Михеев А.Г. Закономерности фазовых превращений в нелинейно-упругих средах // Математическое моделирование и краевые задачи: труды Всероссийской научной конференции. Самара: СамГТУ. 2004. Ч. I. С. 267—272.

Поступила в редакцию 13/*III*/2009;
в окончательном варианте — 13/*III*/2009.

# DEFORMATION MODEL OF NONLINEAR ELASTIC MEDIUM WITH MICROSTRUCTURE IN CONDITIONS OF PHASE TRANSITIONS

© 2009 A.G. Mikheev[2]

In the article macroscopic equations of behaviour of a composite in conditions of isothermal phase transition are received. Under an action of external loadings in volume of one of the components from an old phase is formed and the new phase with new mechanical properties grows.

**Key words and phrases:** composites, phase transition, microstructure, macroscopic equations, statistical averaging, structural deformation.

Paper received 13/*III*/2009.
Paper accepted 13/*III*/2009.

[2]Mikheev Alexey Georgievich (miheev_aleksey@mail.ru), Dept. of Mathematics, Computer Science and Mathematical Methods in the Economy, Samara State University, Samara, 443011, Russia.