УДК 517.54

УРАВНЕНИЕ ГАХОВА ДЛЯ ВНЕШНЕЙ СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ТОЧКОЙ ВЕТВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА[1]

© 2009 С.Р. Насыров,[2] Л.Ю. Низамиева[3]

В статье доказывается разрешимость аналога уравнения Ф.Д. Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности с одной точкой ветвления произвольного порядка, расположенной над бесконечностью.

Ключевые слова: смешанная обратная краевая задача, уравнение Гахова, вращение векторного поля, риманова поверхность, краевая задача со свободной границей, полианалитические функции.

Введение

В статье рассматривается внешняя смешанная обратная краевая задача по параметру x на полигональной римановой поверхности в случае, когда эта поверхность имеет единственную точку ветвления, расположенную над бесконечностью.

Отметим, что впервые постановка внутренней смешанной обратной краевой задачи по параметру x в областях на плоскости была дана в [2] В.Н. Монаховым. Основным этапом в [2] являлось исследование разрешимости задачи для областей, в которых известная часть границы является многоугольником.

В [4, 5] была исследована аналогичная задача на римановых поверхностях без точек ветвления. В отличие от однолистного случая, где ищется область с частично неизвестной границей, при формулировке задачи был

[1]Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований № 08-01-00381 и № 09-01-97008-р.

[2]Насыров Семен Рафаилович (snasyrov@ksu.ru), кафедра математического анализа Казанского государственного университета, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

[3]Низамиева Лилия Юнисовна (NizamievaLU@yandex.ru), кафедра естественнонаучных дисциплин Казанского кооперативного института, 420045, Россия, г. Казань, ул. Н. Ершова, 58.

предложен принципиально новый подход: искать кривую на известной римановой поверхности R, разбивающую R на две части, одна из которых является искомой римановой поверхностью.

Представляет интерес исследование аналогичных задач для римановых поверхностей с точками ветвления. В [6] была дана постановка задачи для расположенных над $\mathbb{C}$ полигональных римановых поверхностей с простыми точками ветвления, получено интегральное представление решения, зависящее от нескольких акцессорных параметров, доказана локальная единственность решения в зависимости от этих параметров.

В [1, 7] была дана постановка внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности. При этом в [1] рассматривался случай, когда полигональная риманова поверхность не имеет точек ветвления, в [7] — когда поверхность имеет одну простую точку ветвления, лежащую над ∞. Были получены интегральные представления решения.

В отличие от внутренних задач, во внешних задачах, когда искомая риманова поверхность содержит точки над ∞, при интегрировании выражения, которое представляет собой интегральное представление для производной искомой функции, возникает естественное условие однозначности интеграла. Такого типа условия в теории обратных краевых задач принято называть уравнениями Ф.Д. Гахова. В [1, 7] были построены аналоги уравнения Гахова для соответствующих задач и доказана их разрешимость.

В настоящей работе рассматривается случай, когда над бесконечностью располагается точка ветвления произвольного порядка. Получено интегральное представление решения. Выведено уравнение Гахова для этой задачи. Методами теории векторных полей доказана разрешимость этого уравнения.

1. Постановка задачи и построение интегрального представления решения

Под римановой поверхностью будем понимать любое накрытие $\pi : R \to \overline{\mathbb{C}}$ сферы Римана связной поверхностью R, вообще говоря, разветвленное и небезграничное. Если отображение π (проекция) определяется из контекста однозначно, то будем говорить для краткости, что R — риманова поверхность (над $\overline{\mathbb{C}}$).

Предположим, что существует компактная риманова поверхность с краем $\overline{R} = R \cup \partial R$, и отображение π можно продолжить до непрерывного отображения $\overline{\pi} : \overline{R} \to \overline{\mathbb{C}}$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — кривые, обходящие компоненты края ∂R в положительном направлении, и $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — их проекции на $\mathbb{C}$. В этом случае будем для краткости говорить, что R — риманова поверхность, ограниченная кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_l$. Будем называть отображение $\overline{\pi}$ также проекцией. Если эта проекция локально однолистна в окрестности границы ∂R, то будем говорить, что R не имеет граничных точек ветвления. В этом случае проекция индуцирует на $\overline{R} \setminus \overline{\pi}^{-1}(\infty)$ с плоскости $\mathbb{C}$ метрику, на R — комплексную структуру со сферы $\overline{\mathbb{C}}$. Поэтому можно говорить об углах поверхности R в точках края ∂R, если кривые $\beta_1, \dots, \beta_l$ — кусочно-гладкие в $\mathbb{C}$. Ниже, как это принято в теории римановых поверхностей, будем иногда отождествлять объекты на поверхности и их проекции там, где это не вызывает недоразумений.

Пусть R — риманова поверхность над $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Поверхность R ограничена одной кривой — ломаной с последовательными вершинами в точках z_1, $z_2, \dots, z_n$ и $z_{n+1} = \infty$ (см. рисунок), при этом звенья ломаной $\overline{z_{n+1}z_1}$ и $\overline{z_n z_{n+1}}$ являются вертикальными лучами l_1 и l_n, идущими вверх из точек $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_n = x_n + i\,y_n$ соответственно.

2. R не имеет граничных точек ветвления.

3. Существует одна и только одна точка из R, проектирующаяся в ∞, причем эта точка — точка ветвления R кратности $\nu - 1$, $\nu \geqslant 2$.

Обозначим через $\pi\alpha_k$ внутренние углы R в точках края Z_k, соответствующих вершинам ломаной z_k, $0 < \alpha_k < 2\pi$, $k = 1, \dots, n$. Используя аналог соотношения Римана — Гурвица для разветвленных накрытий с краем [8], получим, что выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) = 2\nu + 1.$$

Пусть L_z^1 — кривая, которая обходит часть края ∂R в положительном направлении от точки Z_1 до точки Z_n и, следовательно, проектируется в ломаную $\overline{z_1 z_2 \dots z_n}$.

Задача. Требуется разбить $\overline{R}$ на две части кривой L_z^2 таким образом, чтобы выполнялись условия.

1. Кривая L_z^2 имеет начало в точке Z_1 и оканчивается в точке Z_n, причем все ее точки лежат в R, за исключением концов; проекция L_z^2 на $\mathbb{C}$ является простой кривой, которую можно представить как график некоторой непрерывной функции $y = y(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_n$.

2. Пусть D_z — та часть R, которая лежит «справа» от L_z^2 при ее обходе, соответствующем возрастанию параметра x. Тогда существует аналитическая в D_z функция $\omega(z)$, конформно отображающая D_z на жорданову область D_ω в $\mathbb{C}$ и удовлетворяющая следующим краевым условиям:

а) в плоскости $\omega = \varphi + i\psi$ дуге L_z^2 соответствует дуга L_ω^2 с уравнением $\varphi = f_1(x)$, $\psi = f_2(x)$, где $f_1(x) + i f_2(x) = \widetilde{\omega}(x) := \omega(x + i\,y(x))$, $x \in [x_1, x_n]$, — граничные значения функции $\omega(z)$ на L_z^2 и $x = \Re z$; будем предполагать, что функция $\widetilde{\omega}(x)$ непрерывно дифференцируема и $\omega'(x) \neq 0$, $a \leqslant x \leqslant b$;

б) уравнение дуги L_ω^1, дополняющей L_ω^2 до замкнутого контура L_ω, $\Phi(\varphi, \psi) = 0$ считается заданным. Предполагается, что функция $\Phi(\varphi, \psi)$ дважды непрерывно дифференцируема, и гладкие дуги L_ω^1 и L_ω^2 образуют в точках стыка ω_1 и ω_2 ненулевые углы $\pi\gamma_1$ и $\pi\gamma_2$.

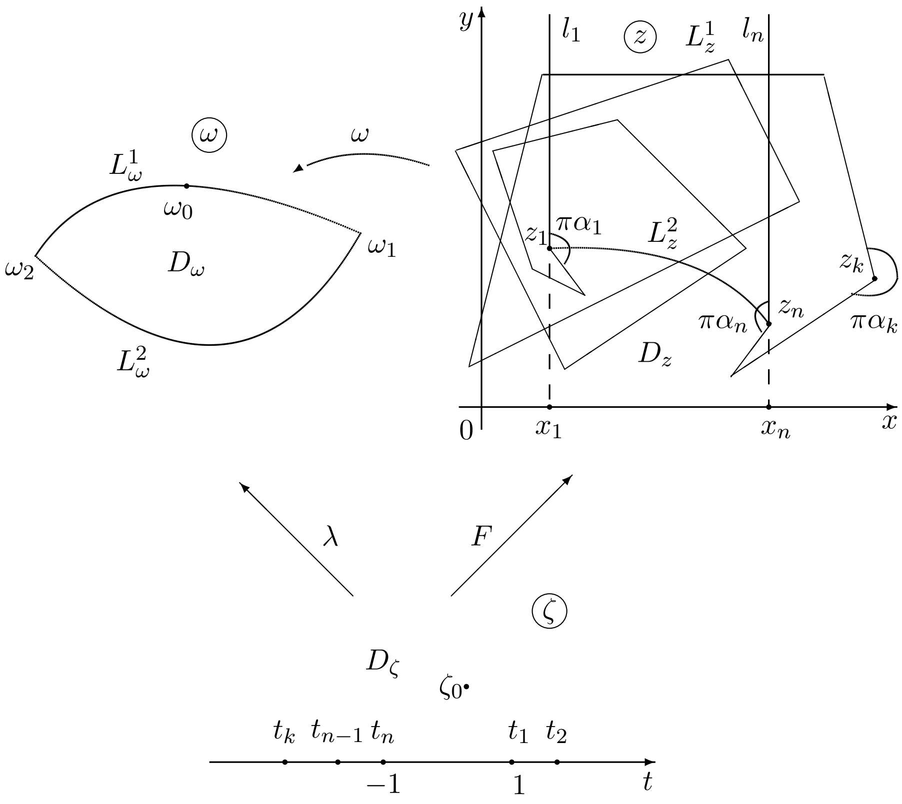

Рис. Ограничение поверхности R ломаной с последовательными вершинами в точках $z_1,\ z_2,\ldots,z_n$ и $z_{n+1}=\infty$

Под решением задачи будем понимать пару $(L_z^2,\omega(z))$, состоящую из кривой L_z^2 и функции $\omega(z)$.

Как и в [2], конформно отобразим верхнюю полуплоскость $D_\zeta = \{\Im\zeta > 0\}$ на D_ω функцией $\omega=\lambda(\zeta)$ так, чтобы точки ∞, 1, -1, лежащие на вещественной оси, переходили соответственно в фиксированную точку $\omega_0\in L_\omega^1$, ω_1 и ω_2. Пусть t_k — точки на границе D_ζ, соответствующие вершинам ломаной L_z^1, $k=1,\ldots,n$, при отображении $F=\omega^{-1}\circ\lambda$. Сравнивая граничные значения функций ω и λ на участках, соответствующих L_ω^2, получим соотношение $f_1(x)+if_2(x)=\lambda(t)$, из него найдем граничное условие

$$x=H(t), \tag{1.1}$$

которому должна удовлетворять функция $z=F(\zeta)$, конформно отображающая D_ζ на D_z.

Пусть уравнение прямых, на которых лежат стороны полигона, имеет вид

$$a_kx-b_ky=c_k,\quad k=1,\ldots,n-1.$$

Тогда получим граничные условия для функции F на участках, соответствующих звеньям ломаной:

$$a_k x(t) - b_k y(t) = c_k, \quad t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{1.2}$$

Отметим, что здесь через (t_k, t_{k+1}) обозначена часть границы D_ζ в расширенной комплексной плоскости от точки t_k до точки t_{k+1}, проходимая в положительном направлении. Пусть ζ_0 — точка в D_ζ, соответствующая точке ∞ плоскости z.

Найдем функцию $z = F(\zeta)$, отображающую верхнюю полуплоскость D_ζ на D_z, которая на вещественной оси удовлетворяет краевым условиям (1.1), (1.2). Если она известна, то известно и уравнение $z = F(t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ контура L_z^2, а функция $\omega(z)$ восстанавливается по формуле $\omega = \lambda(F^{-1}(z))$, где $\zeta = F^{-1}(z)$ — функция, обратная к $z = F(\zeta)$. Поэтому будем называть функцию $z = F(\zeta)$ также решением нашей задачи.

Дифференцируя (1.1) и (1.2), запишем граничные условия для производной $F'(\zeta)$ в виде

$$\begin{aligned} a_k \frac{dx(t)}{dt} - b_k \frac{dy(t)}{dt} &= 0, \ t \in (t_k, t_{k+1}), \ k = 1, \ldots, n-1, \\ \frac{dx(t)}{dt} &= h(t), \ t \in (-1, 1). \end{aligned}$$

где $h(t) = H'(t) \leqslant 0$ при $t \in (-1, 1)$, т. к. функция $H(t)$ монотонно убывает на $(-1, 1)$.

Таким образом, функция $dF(\zeta)/d\zeta$ является решением краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами в полуплоскости D_ζ

$$\Re[(a(t) + ib(t))dz(t)/dt] = c(t), \ t \in (-\infty, \infty), \tag{1.3}$$

где

$$a(t) = \begin{cases} a_k, & t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, \ldots, n-1; \\ 1, & t \in (-1, 1), \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} b_k, & t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k = 1, \ldots, n-1; \\ 0, & t \in (-1, 1), \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1; \\ h(t), & t \in (-1, 1). \end{cases}$$

Решение ищем в классе функций $dF(\zeta)/d\zeta$, ограниченных в вершинах полигона с углами, большими π, имеющих интегрируемые особенности в остальных и имеющих полюс $(\nu+1)$-го порядка в точке ζ_0.

Перепишем задачу (1.3) в виде $\Re[(a(t) + ib(t))\Phi(t)] = c(t)|t - \zeta_0|^{2(\nu+1)}$,

$$\text{где} \quad \Phi(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{\nu+1}(\zeta - \overline{\zeta_0})^{\nu+1} dF(\zeta)/d\zeta.$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\alpha_1 < 1$, $\alpha_n < 1$. Рассмотрим функцию $\Pi(\zeta) = e^{i\theta} \prod\limits_{k=1}^{n} (\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1}$. Выделим однозначную ветвь этой функции в D_ζ таким образом, чтобы она принимала положительные значения при вещественных $\zeta \in (-1, 1)$. Тогда эта функция может быть взята за каноническую функцию однородной задачи Гильберта, и решение запишется в следующем виде:

$$\Phi(\zeta) = \frac{dF(\zeta)}{d\zeta}(\zeta-\zeta_0)^{\nu+1}(\zeta-\overline{\zeta_0})^{\nu+1} = \frac{\Pi(\zeta)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^{2(\nu+1)}}{\Pi(t)(t-\zeta)}dt + P(\zeta)\Pi(\zeta),$$

где $P(\zeta)$ — некоторый многочлен. Нетрудно видеть, что на бесконечности $|\Pi(\zeta)| \sim |\zeta|^d$, где $d = \sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k - 1) = 2\nu + 1$.

Чтобы искомый контур был конечен, следует положить $P(\zeta) \equiv 0$, так как

$$\frac{\Pi(\zeta)}{(\zeta-\zeta_0)^{\nu+1}(\zeta-\overline{\zeta_0})^{\nu+1}} \sim \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta \to \infty.$$

Итак,

$$z = F(\zeta) = z_1 + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{\zeta}\frac{\Pi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-\zeta_0)^{\nu+1}(\zeta-\overline{\zeta_0})^{\nu+1}}\int_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^{2(\nu+1)}}{\Pi(t)(t-\zeta)}dt, \tag{1.4}$$

это единственное решение задачи.

2. Разрешимость уравнения Гахова

Условием однозначности функции $F(\zeta)$, определенной формулой (1.4), будет служить равенство $c_{-1} = 0$, где c_{-1} — вычет функции $dF(\zeta)/d\zeta$ в точке $\zeta = \zeta_0$. Вычислим

$$c_{-1} = \lim_{\zeta\to\zeta_0}\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}\left\{(\zeta-\zeta_0)^{\nu+1}\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\right\}.$$

Имеем

$$A := \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}\left\{\frac{1}{(\zeta-\overline{\zeta_0})^{\nu+1}}\frac{\Pi(\zeta)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^{2(\nu+1)}}{\Pi(t)(t-\zeta)}dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\nu!\pi i}\sum_{m_1+m_2+m_3=\nu} C_\nu^{m_1m_2m_3} f_1^{(m_1)}(\zeta) f_2^{(m_2)}(\zeta) f_3^{(m_3)}(\zeta), \tag{2.1}$$

где

$$f_1(\zeta) = \Pi(\zeta), \ \ f_2(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-\overline{\zeta_0})^{\nu+1}}, \ \ f_3(\zeta) = \int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^{2(\nu+1)}}{\Pi(t)(t-\zeta)}dt,$$

$$C_\nu^{m_1m_2m_3} = \frac{\nu!}{m_1!m_2!m_3!}.$$

Найдем производные

$$f_1^{(m_1)}(\zeta) = \Pi(\zeta)\sum_{\sum k_j = m_1} C_{m_1}^{k_1\ldots k_\nu}\prod_{j=1}^{n}\frac{\beta_j(\beta_j-1)\cdot\ldots\cdot(\beta_j-k_j+1)}{(\zeta-t_j)^{k_j}} =$$

$$= m_1!\Pi(\zeta)\sum_{\sum k_j=m_1}\prod_{j=1}^{n}\frac{C_{\beta_j}^{k_j}}{(\zeta-t_j)^{k_j}},$$

где

$$C_{\beta_j}^{k_j}=\frac{\beta_j(\beta_j-1)\cdot\ldots\cdot(\beta_j-k_j+1)}{k_j!},$$

$$f_2^{(m_2)}(\zeta)=\frac{(-1)^{m_2}(\nu+m_2)!}{\nu!(\zeta-\overline{\zeta_0})^{\nu+m_2+1}},\quad f_3^{(m_3)}(\zeta)=m_3!\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^{2(\nu+1)}}{\Pi(t)(t-\zeta)^{m_3+1}}dt.$$

Тогда с учетом (2.1) получаем

$$A=\frac{\Pi(\zeta)}{\nu!\pi i}\sum_{m_1+m_2+m_3=\nu}C_\nu^{m_1m_2m_3}\sum_{\sum k_j=m_1}m_1!\prod_{j=1}^{n}\frac{C_{\beta_j}^{k_j}}{(\zeta-t_j)^{k_j}}\times$$

$$\times\frac{(-1)^{m_2}(\nu+m_2)!}{\nu!(\zeta-\overline{\zeta_0})^{\nu+m_2+1}}m_3!\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^{2(\nu+1)}}{\Pi(t)(t-\zeta)^{m_3+1}}dt=$$

$$=\frac{\Pi(\zeta)}{\nu!\pi i}\sum_{m_1+m_2+m_3=\nu}\sum_{\sum k_j=m_1}\prod_{j=1}^{n}\frac{C_{\beta_j}^{k_j}}{(\zeta-t_j)^{k_j}}\frac{(-1)^{m_2}C_{\nu+m_2}^{\nu}}{(\zeta-\overline{\zeta_0})^{\nu+m_2+1}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^{2(\nu+1)}}{\Pi(t)(t-\zeta)^{m_3+1}}dt.$$

Обозначим

$$M_m(\zeta_0)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(t)|t-\zeta_0|^{2(\nu+1)}}{\Pi(t)(t-\zeta_0)^{m+1}}dt.$$

Тогда уравнение $c_{-1}=0$ эквивалентно равенству

$$\sum_{m_1+m_2+m_3=\nu}\sum_{\sum k_j=m_1}\prod_{j=1}^{n}\frac{C_{\beta_j}^{k_j}}{(\zeta_0-t_j)^{k_j}}\frac{(-1)^{m_2}C_{\nu+m_2}^{\nu}}{(\zeta_0-\overline{\zeta_0})^{\nu+m_2}}M_{m_3}(\zeta_0)=0$$

или

$$\sum_{m=0}^{\nu}M_m(\zeta_0)\sum_{l=0}^{\nu-m}\frac{(-1)^lC_{\nu+l}^{\nu}}{(\zeta_0-\overline{\zeta_0})^{\nu+l}}\sum_{\sum k_j=\nu-l-m}\prod_{j=1}^{n}\frac{C_{\beta_j}^{k_j}}{(\zeta_0-t_j)^{k_j}}=0. \qquad (2.2)$$

Назовем (2.2) уравнением Ф.Д. Гахова для нашей задачи или для краткости просто уравнением Гахова.

Введем функцию

$$G(\zeta)=\sum_{m=0}^{\nu}M_m(\zeta)\sum_{l=0}^{\nu-m}(-1)^lC_{\nu+l}^{\nu}(\zeta-\overline{\zeta})^{\nu-l}\sum_{\sum k_j=\nu-l-m}\prod_{j=1}^{n}\frac{C_{\beta_j}^{k_j}}{(\zeta-t_j)^{k_j}}.$$

Нетрудно видеть, что разрешимость уравнения Гахова равносильна существованию нулей функции G в верхней полуплоскости.

Заметим, что существует единственная точка $\widetilde{\xi}\in(-1,1)$ такая, что $M_0(\widetilde{\xi})=0$. В остальных точках вещественной оси функция M_0 отлична от нуля.

Для доказательства разрешимости уравнения $G(\zeta)=0$ рассмотрим векторное поле, определяемое в верхней полуплоскости функцией G, подсчитаем его вращение $V_G(\partial Q)$ на границе области Q, которая получается из полукруга $\{\Im\zeta > 0, |\zeta| < R\}$ достаточно большого радиуса R с центром в начале координат выбрасыванием малых полукругов радиуса ε с центром в точках t_j и малого полукруга круга радиуса δ в точке $\widetilde{\xi}$. Предположим, что на границе Q это векторное поле в нуль не обращается. Покажем, что тогда $V_G(\partial Q) \neq 0$. В силу известных результатов [3] это будет означать разрешимость уравнения $G(\zeta)=0$ в области Q.

Заметим, что граница ∂Q состоит из полуокружностей и отрезков вещественной оси, не содержащих точек t_k и $\widetilde{\xi}$. На этих отрезках непрерывная функция G принимает вещественные значения и не обращается в нуль. Следовательно, вращение $V_G(\partial Q)$ равно сумме вращений векторного поля вдоль полуокружностей. Подсчитаем эти вращения.

А) Рассмотрим вращение векторного поля на полуокружности $T_R = \{|\zeta| = R,\ \Im\zeta \geqslant 0\}$.

Обозначим

$$S_l(\zeta) = \sum_{\sum k_j = \nu - l} \prod_{j=1}^{n} \frac{C_{\beta_j}^{k_j}}{(\zeta - t_j)^{k_j}}.$$

При $|\zeta| = R \to \infty$ имеем (равномерно по $\theta = \arg\zeta$)

$$M_m(\zeta) \sim a(-1)^{m+1}\zeta^{\nu-m}\overline{\zeta}^{\ \nu+1},$$

где

$$a = \int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\Pi(t)}dt \neq 0.$$

Также равномерно по θ

$$S_l(\zeta) \sim \frac{C_{2\nu+1}^{\nu-l}}{\zeta^{\nu-l}},\ \ R \longrightarrow \infty.$$

Тогда

$$G(\zeta) \sim a\overline{\zeta}^{\nu+1} \sum_{m=0}^{\nu} (-1)^{m+1}\zeta^{\nu-m} \sum_{l=0}^{\nu-m} (-1)^l \frac{C_{\nu+l}^{\nu} C_{2\nu+1}^{\nu-l-m}(\zeta - \overline{\zeta})^{\nu-l}}{\zeta^{\nu-l-m}} =$$

$$= a\overline{\zeta}^{\nu+1} \sum_{m=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-m} (-1)^{m+1+l} C_{\nu+l}^{\nu} C_{2\nu+1}^{\nu-l-m} \zeta^l (\zeta - \overline{\zeta})^{\nu-l} =$$

$$= a\overline{\zeta}^{\,\nu+1} \sum_{l=0}^{\nu} (-1)^{l+1}\zeta^l(\zeta - \overline{\zeta})^{\nu-l} C_{\nu+l}^{\nu} \sum_{m=0}^{\nu-l} (-1)^m C_{2\nu+1}^{\nu-l-m} =$$

$$= a\overline{\zeta}^{\,\nu+1} \sum_{l=0}^{\nu} (-1)^{l+1}\zeta^l(\zeta - \overline{\zeta})^{\nu-l} C_{\nu+l}^{\nu} C_{2\nu}^{\nu-l} =$$

$$= (-1)^{\nu+1} a \frac{(2\nu)!}{\nu!} \overline{\zeta}^{\,\nu+1} \sum_{l=0}^{\nu} C_\nu^l \zeta^l (\overline{\zeta} - \zeta)^{\nu-l} = (-1)^{\nu+1} a \frac{(2\nu)!}{\nu!} \overline{\zeta}^{\,2\nu+1}.$$

При достаточно больших R

$$V_G(T_R) = \int_{\theta=0}^{\pi} d \arg \left[(-1)^{\nu+1} a \frac{(2\nu)!}{\nu!} R^{2\nu+1} e^{-i(2\nu+1)\theta} \right] = -(2\nu+1)\pi.$$

B) Докажем, что при малых $\varepsilon > 0$ вращение векторного поля G на полуокружности $T_\varepsilon^j = \{|\zeta - t_j| = \varepsilon,\ \Im\zeta \geqslant 0\}$

$$V_G(T_\varepsilon^j) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant n. \tag{2.3}$$

Пусть $\zeta = t_j + \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Имеем

$$S_l(\zeta) \sim \frac{C_{\beta_j}^{\nu-l}}{(\zeta - t_j)^{\nu-l}}, \ \ \varepsilon = |\zeta - t_j| \to 0$$

равномерно по θ. Тогда

$$G(\zeta) \sim M_0(t_j) G_1(\zeta), \quad \varepsilon \to 0,$$

где

$$G_1(\zeta) = \sum_{l=0}^{\nu} (-1)^l C_{\nu+l}^{\nu} C_{\beta_j}^{\nu-l} \left(\frac{\zeta - \overline{\zeta}}{\zeta - t_j} \right)^{\nu-l}.$$

Поэтому (2.3) эквивалентно равенству

$$V_{G_1}(T_\varepsilon^j) = 0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим два случая. Для простоты обозначений будем писать β вместо β_j.

1) Пусть $0 < \beta < 1$. Так как

$$\left| \frac{\zeta - \overline{\zeta}}{\zeta - t_j} \right| = 2 \sin\theta \leqslant 2,$$

то, учитывая, что $(-1)^{\nu+l} C_\beta^{\nu-l} < 0$, $1 \leqslant l \leqslant \nu$, получаем

$$\Re G_1(\zeta) \geqslant P(\beta), \tag{2.5}$$

где многочлен ν-й степени

$$P(\beta) = C_{2\nu}^{\nu} + \sum_{l=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu+l} C_{\nu+l}^{\nu} C_\beta^{\nu-l} 2^{\nu-l}.$$

Докажем, что

$$P(\beta) = C_{2\nu}^{\nu} \prod_{j=1}^{\nu} \left(1 - \frac{\beta}{2j-1} \right). \tag{2.6}$$

Так как $P(0) = C_{2\nu}^{\nu}$, то достаточно доказать, что точки $2j-1$, $j = 1, \ldots, \nu$ являются нулями многочлена P. Итак, требуется доказать, что

$$\Sigma_{j\nu} := \sum_{l=0}^{\nu} (-1)^{\nu+l} C_{\nu+l}^{\nu} C_{2j-1}^{\nu-l} 2^{\nu-l} = 0, \quad j = 1, \ldots, \nu. \tag{2.7}$$

Равенства (2.7) можно доказать индукцией по ν и j с использованием соотношения

$$\Sigma_{j\nu} = \Sigma_{j-1,\nu} - 4\Sigma_{j-1,\nu-1}. \tag{2.8}$$

При $\nu = 2$ или $j = 1$ равенства (2.7) проверяются непосредственно. Установим (2.8). Для этого заметим, что

$$\Sigma_{j\nu} = \sum_{k+\mu=2\nu} a_k b_\mu, \tag{2.9}$$

где

$$a_k = (-1)^k C_k^\nu,\ \ k \geqslant \nu, \quad b_\mu = C_{2j-1}^\mu 2^\mu,\ \ \mu \geqslant 0.$$

Числа a_k и b_μ являются тейлоровскими коэффициентами разложения в степенной ряд в нуле функций

$$f(\zeta) = (-1)^\nu \zeta^\nu (1+\zeta)^{-(\nu+1)} \ \text{ и } \ g(\zeta) = (1+2\zeta)^{2j-1}.$$

В силу (2.9) сумма Σ_{jn} совпадает с коэффициентом при $\zeta^{2\nu}$ в разложении функции $f(\zeta)g(\zeta)$. Таким образом,

$$\Sigma_{j\nu} = \frac{(-1)^\nu}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{(1+2\zeta)^{2j-1} d\zeta}{\zeta^{\nu+1}(1+\zeta)^{\nu+1}}, \tag{2.10}$$

где $\delta > 0$ достаточно мало. Из (2.10) с учетом равенства

$$\int_{|\zeta|=\delta} \frac{(1+2\zeta)^{2j-1} d\zeta}{\zeta^{\nu+1}(1+\zeta)^{\nu+1}} = \int_{|\zeta|=\delta} \frac{(1+2\zeta)^{2j-3} d\zeta}{\zeta^{\nu+1}(1+\zeta)^{\nu+1}} + 4\int_{|\zeta|=\delta} \frac{(1+2\zeta)^{2j-3} d\zeta}{\zeta^{\nu}(1+\zeta)^{\nu}}$$

следует (2.8). Итак, (2.6) доказано. Из (2.5) и (2.6) с учетом неравенства $\beta < 1$ следует, что $\Re G_1(\zeta) > 0$ на T_ε^j, поэтому справедливо (2.4), а следовательно и (2.3).

2) Теперь рассмотрим случай, когда $-1 < \beta < 0$. Обозначим $\alpha = -\beta$, $0 < \alpha < 1$. Имеем $C_\beta^k = C_{-\alpha}^k = (-1)^k C_{\alpha+k-1}^k$. Поэтому

$$G_1(\zeta) = \sum_{l=0}^{\nu} C_{\nu+l}^\nu C_{\alpha+\nu-l-1}^{\nu-l} \left(\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{\zeta-t_j}\right)^{\nu-l} = \sum_{k=0}^{\nu} C_{2\nu-k}^\nu C_{\alpha+k-1}^k \left(\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{\zeta-t_j}\right)^k.$$

$$\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{\zeta-t_j} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} = 1 - e^{-2i\theta} = 1 + e^{2i\phi} = 2e^{i\phi}\cos\phi,$$

$\phi = \pi/2 - \theta$, $|\phi| \leqslant \pi/2$. Обозначим $\omega = e^{2i\phi}$. Когда точка ζ пробегает полуокружность T_ε^j, точка ω пробегает единичную окружность. Имеем

$$G_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\nu} C_{2\nu-k}^\nu C_{\alpha+k-1}^k (1+\omega)^k = \sum_{k=0}^{\nu} C_{2\nu-k}^\nu C_{\alpha+k-1}^k \sum_{j=0}^{k} C_k^j \omega^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu} \omega^j \sum_{k=j}^{n} C_{2\nu-k}^\nu C_{\alpha+k-1}^k C_k^j.$$

Так как

$$C_{\alpha+k-1}^k C_k^j = C_{\alpha+j-1}^j C_{\alpha+k-1}^{k-j},$$

то

$$G_1(\zeta) = \sum_{j=0}^{\nu} C^j_{\alpha+j-1}\omega^j \sum_{k=j}^{\nu} C^{\nu}_{2\nu-k} C^{k-j}_{\alpha+k-1} = P(\omega),$$

где

$$P(\omega) = \sum_{j=0}^{\nu} C^j_{\alpha+j-1} C^{\nu-j}_{2\nu+\alpha}\omega^j.$$

Докажем, что многочлен $P(\omega)$ не обращается в нуль в круге $\{|\omega| \leqslant 1\}$. Обозначим

$$A_j = C^j_{\alpha+j-1} C^{\nu-j}_{2\nu+\alpha}. \tag{2.11}$$

Справедливо следующее утверждение [9, отдел III, гл. 1, п. 22].

Лемма. Пусть имеет место неравенство

$$A_0 > A_1 > A_2 > A_3 > \ldots > A_\nu > 0. \tag{2.12}$$

Тогда в замкнутом единичном круге $\{|\omega| \leqslant 1\}$ *многочлен* $P(\omega) = \sum_{k=0}^{n} A_k z^k$ *не обращается в нуль.*

Теперь докажем, что коэффициенты (2.11) многочлена $P(\omega)$ удовлетворяют (2.12). Имеем

$$\frac{A_j}{A_{j+1}} = \frac{C^j_{\alpha+j-1} C^{\nu-j}_{2\nu+\alpha}}{C^{j+1}_{\alpha+j} C^{\nu-j-1}_{2\nu+\alpha}} = \frac{j+1}{j+\alpha} \cdot \frac{\nu+j+\alpha+1}{\nu-j} > 1, \quad 0 \leqslant j \leqslant \nu-1,$$

так как $0 < \alpha < 1$. В силу следствия $P(\omega) \neq 0$, $|\omega| \leqslant 1$. Значит, вращение векторного поля, определяемого $P(\omega)$, на единичной окружности равно нулю, откуда следует (2.4).

C) Покажем, что если при малых δ векторное поле $G(\zeta)$ не обращается в нуль на полуокружности $T_\delta = \{|\zeta - \widetilde{\xi}| = \delta\}$, то $|V_G(T_\delta)| = \pi$.

Рассмотрим поведение $M_m(\zeta)$ в окрестности точки $\widetilde{\xi}$. Пусть $\zeta = \widetilde{\xi} + \tau$. Обозначим

$$B_k = \int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\Pi(t)} (t - \widetilde{\xi})^k dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В силу выбора $\widetilde{\xi}$ имеем $B_{2\nu+1} = 0$. Кроме того, очевидно, что $B_{2\nu} > 0$. Тогда

$$M_m(\zeta) = \int_{-1}^{1} \frac{h(t)(t-\zeta)^{\nu-m}(t-\overline{\zeta})^{\nu+1}}{\Pi(t)} dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\Pi(t)} (t - \widetilde{\xi} - \tau)^{\nu-m} (t - \widetilde{\xi} - \overline{\tau})^{\nu+1} dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\Pi(t)} [(t - \widetilde{\xi})^{2\nu-m+1} - (t - \widetilde{\xi})^{2\nu-m} \times$$

$$\times[(\nu-m)\tau+(\nu+1)\overline{\tau}]+\ldots]dt=$$
$$=B_{2\nu-m+1}-[(\nu-m)\tau+(\nu+1)\overline{\tau}]B_{2\nu-m}+O(|\tau|^2).$$

Следовательно,

$$G(\zeta)=(-1)^{\nu-1}B_{2\nu}C_{2\nu}^{\nu}[\nu\tau+(\nu+1)\overline{\tau}]+(-1)^{\nu-1}B_{2\nu}C_{2\nu-1}^{\nu}(\tau+\overline{\tau})+O(|\tau|^2)=$$
$$=(-1)^{\nu-1}D_\nu(\tau+\overline{\tau})+O(|\tau|^2),\quad |\tau|\to 0,$$

где $D_\nu=B_{2\nu}(\nu C_{2\nu}^{\nu}+C_{2\nu-1}^{\nu})>0$.

Отметим, что в силу того, что функция $G(\zeta)$ является $(2\nu+2)$-аналитической в некоторой окрестности точки $\zeta=\widetilde{\xi}$,

$$G(\zeta)=(-1)^{\nu-1}D_\nu(\tau+\overline{\tau})+\sum_{k=0}^{2\nu+1}\overline{\tau}^k\Phi_k(\tau),$$

где функции $\Phi_k(\tau)$ аналитичны в окрестности нуля и $\Phi_0(0)=\Phi_0'(0)=\Phi_1(0)=0$. Следовательно, в некотором замкнутом круге $|\tau|\leqslant\delta_0$ эти функции ограничены вместе со своими производными, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Re G(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})=(-1)^\nu 2D_\nu\delta\sin\theta-$$
$$-\Im\sum_{k=0}^{2\nu+1}\overline{\tau}^k[\tau\Phi_k'(\tau)-k\Phi_k(\tau)]=(-1)^\nu 2D_\nu\delta\sin\theta+O(\delta^2),$$

$\delta\to 0$, равномерно по $\theta\in[0,\pi]$. Таким образом, существует $c>0$ такое, что при малых δ

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\Re G(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})-(-1)^\nu 2D_\nu\delta\sin\theta\right|\leqslant c\delta^2.$$

Пусть $\widetilde{G}(\zeta)=(-1)^\nu G(\zeta)$. Определим при малых δ

$$\theta_0=\theta_0(\delta)=\arcsin\frac{c\delta}{2D_\nu}.$$

При $\theta_0\leqslant\theta\leqslant\pi-\theta_0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Re\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})\geqslant 0,$$

следовательно, функция $\Re\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})$ является монотонно возрастающей функцией по θ на отрезке $[\theta_0,\pi-\theta_0]$.

Теперь рассмотрим значения $\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})$ на отрезках $[0,\theta_0],[\pi-\theta_0,\pi]$. Имеем

$$\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})=-2D_\nu\delta\cos\theta+O(\delta^2),\quad \delta\to 0$$

равномерно по θ. Поэтому при $\theta\in[0,\theta_0]$ имеем

$$|\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})-\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta)|\leqslant 2D_\nu(1-\cos\theta)\delta+O(\delta^2)\leqslant$$
$$\leqslant 2D_\nu(1-\cos^2\theta)\delta+O(\delta^2)=O(\delta^2),\quad \delta\to 0.$$

Поскольку

$$\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta)=-D_\nu\delta+O(\delta^2),\quad \delta\to 0,$$

при достаточно малых δ значения $\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})$ при $\theta \in [0,\theta_0]$ лежат в левой полуплоскости. Аналогично показывается, что при $\theta \in [\pi-\theta_0,\pi]$ и достаточно малых δ значения $\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})$ лежат в правой полуплоскости. В силу монотонности $\Re\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})$ на $[\theta_0,\pi-\theta_0]$ отсюда следует, что при малых δ кривая $\widetilde{G}(\widetilde{\xi}+\delta e^{i\theta})$, $\theta \in [0,\pi]$ пересекает мнимую ось в единственной точке A (по предположению, A не совпадает с началом координат). Эта точка делит кривую на две части, одна из которых BA лежит в левой полуплоскости, а другая AC — в правой. Поскольку точка A лежит на мнимой оси, а точки B и C — на действительной, получаем, что в случае, когда A лежит в верхней полуплоскости,

$$V_G(T_\delta) = V_{\widetilde{G}}(T_\delta) = V_{\widetilde{G}}(BA) + V_{\widetilde{G}}(AC) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi,$$

а если в нижней, то

$$V_G(T_\delta) = V_{\widetilde{G}}(T_\delta) = V_{\widetilde{G}}(BA) + V_{\widetilde{G}}(AC) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Таким образом вращение векторного поля $V_G(\partial Q) = (2\nu+1)\pi \pm \pi \neq 0$. Это означает, что векторное поле G обращается в нуль по крайней мере в одной точке области Q, следовательно, справедлива

Теорема. Уравнение Гахова (2.2) в полуплоскости D_ζ имеет по крайней мере одно решение.

Литература

[1] Насыров С.Р., Галиуллина Г.Р. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 25–30.

[2] Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.

[3] Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И. Векторные поля на плоскости. М: Физматгиз, 1963. 248 с.

[4] Насыров С.Р. О методе полигональной аппроксимации в смешанных обратных краевых задачах по параметру x. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1982. 48 с. Библ.: 19 назв. Деп. в ВИНИТИ 17.05.82, № 2459–82.

[5] Насыров С.Р. Смешанная обратная краевая задача на римановых поверхностях // Изв. вузов. Математика. 1990. № 10. С. 25–36.

[6] Насыров С.Р., Фаизов И.З. Локальная единственность решения смешанной обратной краевой задачи на полигональных римановых поверхностях с простыми точками ветвления // Уч. зап. Казан. гос. ун-та. 2006. Т. 148. Сер.: Физ.-мат. Кн. 2. С. 97–108.

[7] Насыров С.Р., Низамиева Л.Ю. Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности с простой точкой ветвления на бесконечности // Уч. зап. Казан. гос. ун-та. 2008. Т. 150. Сер.: Физ.-мат. Кн. 1.

[8] Nasyrov S.R. Generalized Riemann–Hurwitz Formula // Rev. Romain Acad. Sci. 1995. V. 40. № 2. P. 177–194.

[9] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: ГИТТЛ, 1956. Т. 1. 396 с.

Поступила в редакцию 18/*III*/2009;
в окончательном варианте — 19/*IV*/2009.

GAKHOV EQUATION FOR EXTERNAL MIXED INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM ON RIEMANN SURFACES WITH BRANCH-POINT OF ARBITRARY ORDER OVER THE INFINITY

© 2003 S.R. Nasyrov[4] L.Yu. Nizamieva[5]

We prove the solvability of an analog of the Gakhov equation for an external mixed inverse boundary value problem on a polygonal Riemann surface with a unique branch-point over the infinity.

Key words and phrases: mixed inverse boundary value problem, Gakhov's equation, rotation of vector field, Riemann surface, boundary value problems with free boundaries, polyanalytical functions.

Paper received 18/*III*/2009.
Paper accepted 19/*IV*/2009.

[4]Nasyrov Semen Raphailovich (`snasyrov@ksu.ru`), Dept. of Mechanics and Mathematics, Kazan State University, 18, Kremlyovskaya str., Kazan, 420008, Russia.

[5]Nizamieva Lilya Yunisovna (`NizamievaLU@Yandex.ru`), Dept. of Natural Sciences, Kazan Cooperation Institute, 58, N. Ershov str., Kazan, 420045, Russia.