УДК 539.4

# К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО УПРОЧНЕНИЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ С НЕСТАБИЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ СТРУКТУРОЙ

© 2009 А.Л. Сараев[1]

В публикуемой работе представлены математические модели фазовых превращений в упругой среде с нестабильной фазовой структурой. Исследовано механическое поведение материала, в которым новая фаза образует отдельные включения, и материала, в котором новая и старая фазы образуют взаимопроникающие каркасы. Статистическое осреднение нелинейных систем уравнений равновесия микронеоднородных сред с нестабильными компонентами позволяет установить макроскопические определяющие уравнения их деформирования и вычислить соответствующие эффективные характеристики.

**Ключевые слова:** определяющие уравнения, фазовые превращения, эффективные характеристики, микронеоднородность, статистическое осреднение.

## Введение

Моделирование процессов фазовых превращений первого рода в твердых телах является одной из актуальных проблем современной механики, решение отдельных аспектов которой позволяет приемлемо оценивать механические свойства нестабильных металлов и сплавов, эффекты сверхпластичности, "памяти формы" и т. д.

Фазовый переход в нестабильной среде сопровождается возникновением и развитием в представительском объеме рассматриваемого тела новой компоненты, ограниченной поверхностью. Рост этого объема и его поверхности характеризует количественную сторону процесса фазового превращения, вызванного внешними механическими воздействиями, изменением температуры и т. д. В новой фазе образуется материал с новыми свойствами. Разрывы деформаций при переходе через фазовую границу образуют неупругие структурные деформации, их уровень является одной из физико-механических констант среды и всегда ограничен.

[1]Сараев Александр Леонидович (alex_saraev@mail.ru), кафедра математики, информатики и математических методов в экономике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

# 1. Макроскопические уравнения упрочнения нестабильной среды, содержащие отдельные включения

Пусть упругая среда, в которой происходит фазовый переход первого рода, занимает объем $V$, ограниченный поверхностью $S$. Объем зарождающейся и развивающейся новой фазы в виде отдельных микросфер обозначим $V_2$, объем старой фазы — $V_1$. При прямом фазовом превращении $(V_1 \to V_2)$ в материале новой фазы под воздействием внешних нагрузок возникают и развиваются необратимые структурные деформации $\alpha_{ij}(\mathbf{r})$, вызванные перестройкой кристаллической и доменной структуры материала. Эти деформации являются ограниченными предельными сдвигами двойниковых доменов $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}$, $\alpha = \sqrt{\alpha_{ij}\alpha_{ij}}$, где $\alpha_{\max}$ — максимальный уровень структурных деформаций. Закон Гука такой среды имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = 2\mu_1\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda_1\varepsilon_{pp}, && \mathbf{r} \in V_1, \\ &\sigma_{ij} = 2\mu_2\left(\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}\right) + \delta_{ij}\lambda_2\varepsilon_{pp}, && \mathbf{r} \in V_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

здесь $\sigma_{ij}$, $\varepsilon_{ij}$ — тензоры напряжений и полных деформаций, $\mu_s$, $\lambda_s$ $(s = 1, 2)$ — параметры Ламе компонентов.

В качестве условий фазовых переходов второго компонента в первый и обратно принимаются поверхности нагружения

$$\begin{aligned} &s_{ij}s_{ij} = k_+^2(\alpha), \quad (V_1 \to V_2)\,, \\ &s_{ij}s_{ij} = k_-^2(\alpha), \quad (V_2 \to V_1)\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{+,-} = k_{+,-}^{\infty} + n_{+,-}^{\infty}\alpha + \left[\left(k_{+,-}^{0} - k_{+,-}^{\infty}\right) + \left(n_{+,-}^{0} - n_{+,-}^{\infty}\right)\alpha\right] \times \\ \times \left[1 - \exp\left(\frac{n_{+,-}^{0} - n_{+,-}^{\infty}}{k_{+,-}^{0} - k_{+,-}^{\infty}}\alpha\right)\right], \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $k_{+,-}^{0,\infty}$,$n_{+,-}^{0,\infty}$ — соответственно пределы и коэффициенты линейного упрочнения прямого и обратного фазовых переходов. Как показывают экспериментальные наблюдения, эти величины зависят от температуры, и их значения определяют тип поведения нестабильной среды (сверхупругость, эффект "памяти формы" или обычное пластическое течение).

Геометрическая структура такого двухкомпонентного материала описывается случайной изотропной индикаторной функцией координат $\kappa(\mathbf{r})$, равной нулю в точках первого компонента и единице в точках второго. С помощью этой функции локальный закон Гука для среды записывается в виде

$$\begin{aligned} &s_{ij}(\mathbf{r}) = 2\left(\mu_1 + [\mu]\kappa(\mathbf{r})\right)e_{ij}(\mathbf{r}) - 2\mu_1\alpha_{ij}(\mathbf{r}), \\ &\sigma_{pp}(\mathbf{r}) = 3\left(K_1 + [K]\kappa(\mathbf{r})\right)\varepsilon_{pp}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь $s_{ij} = \sigma_{pp} - \dfrac{1}{3}\delta_{ij}\cdot\sigma_{ij}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \dfrac{1}{3}\delta_{ij}\cdot\varepsilon_{pp}$, $K_s = \dfrac{2}{3}\mu_s + \lambda_s$, квадратными скобками обозначены разрывы величин при переходе фазовой границы —

$[f] = f_2 - f_1$. Структурные деформации удовлетворяют условию несжимаемости $\alpha_{pp}(\mathbf{r}) = 0$.

Индикаторная функция $\kappa(\mathbf{r})$, напряжения, полные и структурные деформации предполагаются статистически однородными и эргодическими полями, поэтому их математические ожидания совпадают со средними значениями по полному объему $V$ и объемам фаз $V_s$ [1]

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int\limits_V f(\mathbf{r}) d\,\mathbf{r}, \qquad \langle f \rangle_s = \frac{1}{V_s} \int\limits_{V_s} f(\mathbf{r}) d\,\mathbf{r} \qquad (s = 1, 2),$$

угловыми скобками обозначена операция осреднения.

Для установления макроскопических определяющих уравнений рассматриваемой среды и вычисления ее эффективных характеристик необходимо установить связь между макроскопическими напряжениями и макроскопическими полными и структурными деформациями. С этой целью необходимо усреднить по полному объему локальный закон Гука (1.4)

$$\begin{aligned} &\langle s_{ij} \rangle = 2\mu_1 \langle e_{ij} \rangle + 2[\mu] \langle e_{ij} \rangle_2 - 2\mu_1 \langle \alpha_{ij} \rangle, \\ &\langle \sigma_{pp} \rangle = 3K_1 \langle \varepsilon_{pp} \rangle + 3[K] \langle \varepsilon_{pp} \rangle_2 . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь штрихами обозначены флуктуации величин в объеме $V$. Соотношения (1.5) показывают, что для установления эффективного закона Гука необходимо выразить величины $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_2$ через макроскопические деформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Это достигается статистическим осреднением системы деформирования среды, состоящей из локальных уравнений (1.4), уравнений равновесия $\sigma_{ip,p}(\mathbf{r}) = 0$ и соотношений Коши $2\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})$, связывающих компоненты тензора деформаций с компонентами вектора перемещений $u_i(\mathbf{r})$.

Граничными условиями такой системы являются условия отсутствия флуктуаций величин на поверхности $S$ объема $V$, а сама система сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений, ядрами которой являются вторые производные тензора Грина [2]

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \int\limits_V \mathbf{G}_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tau'_{kl}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \tag{1.6}$$

Вычислим величины $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_2$. Умножая уравнения (1.6) на $\kappa'(\mathbf{r})$, усредняя их затем по объему $V$, принимая во внимание изотропность структуры композита и используя известное соотношение $\langle f \rangle_2 = \langle f \rangle + c_2^{-1} \langle k' f' \rangle$, находим [2]

$$\begin{gathered} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_2 = \frac{1}{1 + \alpha_1 c_1 (m-1)} \left( \langle e_{ij} \rangle + \frac{m c_1 \alpha_1}{c_2} \langle \alpha_{ij} \rangle \right), \\ \langle \varepsilon_{pp} \rangle_2 = \frac{1}{1 + \gamma_1 c_1 (q-1)} \langle \varepsilon_{pp} \rangle. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь $\alpha = \dfrac{2}{15} \dfrac{4 - 5\nu_1}{1 - \nu_1}$, $\gamma = \dfrac{1}{3} \dfrac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1}$, $\nu_1 = \dfrac{1}{2} \dfrac{3K_1 - 2\mu_1}{3K_1 + 2\mu_1}$, $m = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$, $q = \dfrac{K_2}{K_1}$, $c_s = \dfrac{V_s}{V}$ — объемные содержания фаз.

Подстановка формул (1.7) в соотношения (1.5) дает макроскопический закон Гука рассматриваемой микронеоднородной среды

$$\langle s_{ij}\rangle = 2\mu^* \langle e_{ij}\rangle - 2\mu^\alpha \langle \alpha_{ij}\rangle\,, \qquad \langle \sigma_{pp}\rangle = 3K^* \langle \varepsilon_{pp}\rangle\,. \tag{1.8}$$

Здесь $\mu^* = \mu_1\left(1 + \dfrac{c_2(m-1)}{1+\alpha_1 c_1(m-1)}\right)$, $K^* = K_1\left(1 + \dfrac{c_2(q-1)}{1+\gamma_1 c_1(q-1)}\right)$, $\mu^\alpha = \dfrac{\mu_2}{1+\alpha_1 c_1(m-1)}$, звездочкой обозначены эффективные модули упругости микронеоднородной среды.

Выражения для $\mu^*$, $K^*$ показывают, что образующаяся новая вторая фаза играет роль отдельных включений, а первоначальная первая фаза — роль связующей матрицы, так как при $\mu_1 = 0$, $K_1 = 0$ величины $\mu^* \equiv K^* \equiv 0$ для любых $c_1$, $c_2$, а при $\mu_2 = 0$, $K_2 = 0$ величины $\mu^*$, $K^*$ тождественно в нуль не обращаются.

Для определения макроскопических условий прямого и обратного фазовых превращений в рассматриваемой среде и закона ее деформирования необходимо усреднить соотношения (1.2) по объему новой фазы $V_2$

$$\langle s_{ij}s_{ij}\rangle_2 = \left\langle k^2_{+,-}(\alpha)\right\rangle_2.$$

Ограничиваясь верхней оценкой Коши — Буняковского $\langle z\rangle^2 \leqslant \left\langle z^2\right\rangle$ этого условия, получим [2]

$$\langle s_{ij}\rangle_2 \langle s_{ij}\rangle_2 = \left\langle k^2_{+,-}(\alpha)\right\rangle_2^2. \tag{1.9}$$

Постановка в условие (1.9) локального закона Гука (1.1) и применение правила механического смешивания дают макроскопические поверхности нагружения

$$\left(\langle s_{ij}\rangle - 2n^*_{+,-}\langle \alpha_{ij}\rangle_2\right)\left(\langle s_{ij}\rangle - 2n^*_{+,-}\langle \alpha_{ij}\rangle_2\right) = k^{*2}_{+,-}\left(\langle \alpha_{ij}\rangle_2\right) \tag{1.10}$$

и ассоциированный с ней закон деформирования

$$\langle s_{ij}\rangle = k^*_{+,-}\nu_{ij} + 2n^*_{+,-}\langle \alpha_{ij}\rangle_2\,, \qquad \nu_{ij} = \frac{\langle \dot\alpha_{ij}\rangle}{\sqrt{\langle \dot\alpha_{kl}\rangle\langle \dot\alpha_{kl}\rangle}}. \tag{1.11}$$

Здесь

$$k^*_{+,-} = k_{+,-}\left(\langle \alpha_{ij}\rangle_2\right)\frac{\mu^* c_2}{\mu^\alpha} \tag{1.12}$$

есть эффективный начальный предел фазового перехода;

$$n^*_{+,-} = \frac{k^*_{+,-}}{k_{+,-}}\left(\mu_2\left(1-\alpha_1 c_1 m\right)\right) - \mu_\alpha \tag{1.13}$$

является эффективным коэффициентом упрочнения, характеризующим скорость перемещения поверхности (1.10) в шестимерном пространстве макронапряжений.

Известно, что процесс фазового перехода ($V_1 \to V_2$) происходит в два этапа. На первом этапе происходит интенсивное образование зон новой фазы (зародышей), которое сопровождается быстрым прогрессирующим ростом концентрации зародышей $c_2 = \dfrac{V_2}{V}$ при относительно небольшом уровне

структурных деформаций $\alpha_{ij}$. На втором этапе насыщения образование новой фазы замедляется и происходит в основном за счет объемного роста самих зародышей, внутри которых структурные деформации $\alpha_{ij}$ развиваются до своих максимальных значений.

Деление процесса фазового превращения ($V_1 \to V_2$) на два этапа достаточно условно, так как на практике оба процесса наблюдаются параллельно с преобладанием одного из них в разных стадиях развития уровней структурных деформаций. С достаточной степенью точности этот процесс может быть описан кинетическим уравнением [3]

$$\frac{d\alpha}{dc_2} = h(1-\alpha)^{\lambda} c_2 \qquad (0 \leqslant \lambda \ \leqslant 1). \tag{1.14}$$

Параметр роста $\lambda$ уравнения (1.14) служит показателем разделения этапов фазового перехода и является материальной константой рассматриваемой нестабильной среды. Решение уравнения (1.14) с учетом начального условия $c_2|_{\alpha=0} = 0$ дает зависимость роста уровня структурных деформаций от концентрации новой фазы

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} = 1 - \left(1 + (1-\lambda)\frac{hc_2^2}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Дополнительное условие $c_2|_{\alpha=\alpha_{\max}} = 1$ позволяет вычислить коэффициент $h = -\dfrac{2}{1-\alpha}$. Таким образом,

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} = 1 - \left(1 - c_2^2\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}, \tag{1.15}$$

или

$$c_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} - 1\right)^{1-\lambda}}. \tag{1.16}$$

Уравнения (1.15), (1.16) представляют собой так называемую логистическую кривую, график которой до определенной концентрации зародышей является вогнутым, что означает прогрессирующий рост новой фазы, а затем становится выпуклым, что означает замедленный рост — насыщение.

Поскольку величина $\lambda$ остается постоянной на протяжении всего процесса фазового перехода ($V_1 \to V_2$), то ее значение может быть измерено на границе упругого поведения и нелинейного упрочнения нестабильной среды. Затем это вычисленное значение $\lambda$ должно быть использовано в уравнениях (1.11) во всем диапазоне развития структурных деформаций $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max}$.

Соотношение (1.11) принимает вид

$$\langle s_{ij} \rangle = \left(k^*_{+,-} + 2n^*_{+,-}\alpha_{\max}\left(1 - (1-c_2)^{\frac{1}{1-\lambda}}\right)\right)\nu_{ij}. \tag{1.17}$$

## 2. Эффективные характеристики упрочнения нестабильной фазовой структуры, образованной взаимопроникающими каркасами

Пусть теперь объем зарождающейся и развивающейся новой фазы $V_2$ и объем старой фазы $V_1$ образуют при прямом фазовом превращении ($V_1 \to V_2$) взаимопроникающие каркасы.

В этом случае усредненный по полному объему закон Гука имеет вид

$$\begin{aligned} \langle s_{ij} \rangle &= 2 \langle \mu \rangle \langle e_{ij} \rangle + 2[\mu] \left\langle \kappa' e'_{ij} \right\rangle - 2\mu_1 \langle \alpha_{ij} \rangle , \\ \langle \sigma_{pp} \rangle &= 3 \langle K \rangle \langle \varepsilon_{pp} \rangle + 3[K] \left\langle \kappa' \varepsilon'_{pp} \right\rangle . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь штрихами обозначены флуктуации величин в объеме $V$. Соотношения (2.1) показывают, что для установления эффективного закона Гука необходимо выразить величины $\left\langle \kappa' e'_{ij} \right\rangle$ через макроскопические деформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Статистическое усреднение системы уравнений равновесия рассматриваемой среды в данном случае дает

$$\begin{aligned} \left\langle \kappa' e'_{ij} \right\rangle &= -\frac{\alpha c_1 c_2 [m]}{1 - \alpha [m][c]} \langle e_{ij} \rangle - \frac{\alpha c_2 m_1}{1 - \alpha [m][c]} \langle \alpha_{ij} \rangle, \\ \left\langle \kappa' e'_{ij} \right\rangle &= -\frac{\gamma c_1 c_2 [q]}{1 - \gamma [q][c]} \langle \varepsilon_{pp} \rangle. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\alpha = \dfrac{2}{15} \dfrac{4 - 5\langle \nu \rangle}{1 - \langle \nu \rangle}$, $\gamma = \dfrac{1}{3} \dfrac{1 + \langle \nu \rangle}{1 - \langle \nu \rangle}$, $\nu_s = \dfrac{1}{2} \dfrac{3K_s - 2\mu_s}{3K_s + 2\mu_s}$, $m_s = \dfrac{\mu_s}{\langle \mu \rangle}$, $q_s = \dfrac{K_s}{\langle K \rangle}$.

Подстановка формул (2.2) в соотношения (2.1) дает макроскопический закон Гука вида (1.8), в котором эффективные параметры выражаются формулами

$$\begin{aligned} \mu^* &= \langle \mu \rangle \left( 1 - \frac{\alpha c_1 c_2 [m]^2}{1 - \alpha [m][c]} \right), \\ K^* &= \langle K \rangle \left( 1 - \frac{\gamma c_1 c_2 [q]^2}{1 - \gamma [q][c]} \right), \\ \mu^\alpha &= \mu_1 \left( 1 + \frac{\alpha c_2 [m]}{1 - \alpha [m][c]} \right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Выражения (2.3) для $\mu^*$, $K^*$ показывают, что образующаяся новая и первоначальная фазы являются матричной смесью, так как для любых $c_1$, $c_2$ при $\mu_1 = 0$, $K_1 = 0$ и отдельно при $\mu_2 = 0$, $K_2 = 0$ величины $\mu^*$, $K^*$ тождественно в нуль не обращаются. Описанная выше процедура определения макроскопического условия фазового превращения в рассматриваемой среде и закона ее деформирования в данном случае дает макроскопическую поверхность нагружения и ассоциированный закон течения вида (1.15) и (1.16), в котором макроскопические параметры задаются формулами

$$\begin{aligned} k^*_{+,-} &= k_{+,-} \left( \langle \alpha_{ij} \rangle_2 \right) \frac{\mu^* c_2}{\mu^\alpha}, \\ n^*_{+,-} &= \frac{k^*}{k_{+,-}} \left( n_{+,-} + \mu_2 \left( 1 - \frac{\alpha c_1 m_2}{1 - \alpha [m][c]} \right) \right) - \mu^\alpha. \end{aligned} \tag{2.4}$$

С учетом соотношений (1.15) и (1.16) макроскопические уравнения нелинейного деформирования рассматриваемой среды принимают вид (1.17).

## Литература

[1] Сараев Л.А. Моделирование макроскопических пластических свойств многокомпонентных композиционных материалов. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2000. 282 с.

[2] Сараев Л.А., Глущенков В.С. Неупругие свойства многокомпонентных композитов со случайной структурой. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2004. 164 с.

[3] Сараев А.Л. К теории фазовых превращений в композиционных материалах с нестабильными компонентами // Вестник Самарского государственного технического университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 2. С. 85—89.

Поступила в редакцию 9/*II*/2009;
в окончательном варианте — 9/*II*/2009.

## TO THE THEORY OF NONLINEAR HARDENING OF ELASTIC MEDIUM WITH UNSTABLE PHASE STRUCTURE

© 2009 A.L. Saraev[2]

In the published work mathematical models of phase changes in elastic medium with unstable phase structure are presented. Mechanical behavior of material, in which new phase forms separate inclusions, and material, where new and old phases form interpenetrating skeletons is researched. Statistical averaging of nonlinear systems of equilibrium equations of microinhomogenities with unstable components allows to establish macroscopically determining equations of their deformation and calculate their effective characteristics.

**Key words and phrases:** determining equations, phase changes, effective characteristics, microinhomogenities, statistical averaging.

Paper received 9/*II*/2009.
Paper accepted 9/*II*/2009.

[2]Saraev Alexandr Leonidovich (alex_saraev@mail.ru), Dept. of Mathematics, Computer Science and Mathematical Methods in Economy, Samara State University, Samara, 443011, Russia.