*МАТЕМАТИКА*

УДК 519.999

# ОБ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

 Т.Б. Кузнецова, В.М. Тюрин[1]

В пространствах Соболева — Слободецкого $H^s(R)$, Соболева — Степанова $W^s(R^p)$ и Степанова — Бесова $W^s(V^p)$ $(0 < s < \infty)$ доказана эквивалентность свойств обратимости для линейного дифференциального оператора с ограниченными коэффициентами.

**Ключевые слова:** дифференциальный оператор, обратимость, корректность, коэрцитивность, функциональные пространства.

Пусть $X$ — банахово пространство; $C = C(R^n, X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $u : R^n \to X$ с sup-нормой; $(n \in N)$ ; $M^p = M^p(R^n, X)$ — пространство Степанова сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u : R^n \to X$ с конечной нормой

$$\|u\|_{M^p} = \sup_{x\in R^n} \left( \int\limits_{K(x)} \|u(x)^p dx\| \right)^{1/p} \quad (p > 1),$$

где $K(x)$ — единичный куб в $R^n$ с центром в точке $x \in R^n$, $\|\cdot\|$ — норма в $X$; $L^p = L^p(R^n, X)$ — лебегово пространство сильно измеримых функций $u : R^n \to X$ с обычной нормой; $L^\infty = L^\infty(R^n, X)$ — пространство сильно измеримых функций $u : R^n \to X$, для которых $ess\|u(x)\| < \infty (x \in R^n); C^m = C^m(R^n, X)$ пространство функций $u : R^n \to X$, ограниченных и непрерывных вместе с производными $D^\alpha u$ до порядка $m$ включительно, при этом

$$\|u\|_{C^m} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in R^n} \|D^\alpha u(x)\|, D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

[1]Кузнецова Татьяна Борисовна (sviat@lipetsk.ru), Тюрин Василий Михайлович (tuvm@lipetsk.ru), кафедра высшей математики Липецкого государственного технического университета, 398600, Россия, г. Липецк, ул. Московская, д. 30.

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $m \in Z_+$, $C^0 = C$; $C_0^\infty = C_0^\infty(R^n, X)$ — линейное пространство дифференцируемых функций $u : R^n \to X$ с компактным носителем.

Если $0 < s < \infty$, то положим $[s] + \{s\} = s$, здесь $[s]$ целое число, $0 \leqslant \{s\} < 1$. Рассмотрим пространство Соболева — Слободецкого $H^S = H^S(L^p), 0 < s \neq$ (целое число) с нормой

$$\|u\|_S = \sum_{|\alpha| \leqslant [S]} \|D^\alpha u\|_0 + \langle u \rangle_{1[S]},$$

$$\langle u \rangle_{1[S]} = \sum_{|\alpha| \leqslant [S]} \left( \int\limits_{R^n \times R^n} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p dxdy}{|x-y|^{n+p\{s\}}} \right)^{1/p} < \infty,$$

где $x \in H^S$, $\| \cdot \|_0$ — норма в $L^p$ [1, с. 60; 2, с. 228].

Пространство Соболева — Степанова $W^S(M^p)$ состоит из функций $u \in M^p$, имеющих обобщенные производные $D^\alpha u \in M^p$, при этом

$$\|u\|_{W^S(M^p)} = \sum_{|\alpha| \leqslant [S]} \|D^\alpha u\|_{M^P} + \langle u \rangle_{2[S]}, u \in W^S(M^p), 0 < s \neq (\text{целое число}),$$

$$\langle u \rangle_{2[S]} = \sum_{|\alpha| \leqslant [S]} \sup_{x,y \in R^n} \left( \int\limits_{K(x) \times K(y)} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p dxdy}{|x-y|^{n+p\{s\}}} \right)^{1/p} < \infty.$$

Обозначим через $W_p^s(F)$ одно из пространств $H^S(L^p), W^S(M^p), W^S(V^p)$, при этом $F = \{L^p, M^p, V^p\}$. Определение пространств $V^p, W^S(V^p)$ дано ниже. Положим также $\left\{ L^p_{\{s\}}, M^p_{\{s\}}, V^p_{\{s\}} \right\} = F_{\{s\}}$ — пространства, в которых норма определяется соответственно

$$\|u\|_{L^p_{\{s\}}} = \|u\|_0 + \langle u \rangle_{10}, \langle u \rangle_{10} = \left( \int\limits_{R^n \times R^n} \frac{\|u(x) - u(y)\|^p dxdy}{|x-y|^{n+p\{s\}}} \right)^{1/p} < \infty,$$

$$\|u\|_{M^p_{\{S\}}} = \|u\|_{M^p} + \langle u \rangle_{20},$$

$$\langle u \rangle_{20} = \sup_{x,y \in R^n} \left( \int\limits_{K(x) \times K(y)} \frac{\|u(x) - u(y)\|^p dxdy}{|x-y|^{n+p\{s\}}} \right)^{1/p} < \infty,$$

$$\|u\|_{V^p_{\{S\}}} = \|u\|_{V^p} + \langle u \rangle_{30},$$

$$\langle u \rangle_{30} = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \left( \int\limits_{\substack{e_{j-1} < |x| \leqslant e_j, \\ e_{j-1} < |y| \leqslant e_j,}} \frac{\|u(x) - u(y)\|^p dxdy}{|x-y|^{n+p\{s\}}} \right)^{1/p} < \infty.$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $P : W_p^S(F) \to F_{\{s\}}$ в частных производных, действующий по формуле

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leqslant [s]} A\alpha(x) D^{\alpha} u,$$

где $A\alpha \in L^{\infty}(R^n, EndX), EndX$ — пространство линейных ограниченных операторов $A : X \to X$.

Оператор $P : W_p^S(F) \to F_{\{s\}}$ назовем корректным [3], если существует такая положительная постоянная $k = k_F$, что имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_p^S(F)} \leqslant k \|Pu\|_{F_{\{S\}}} \tag{1}$$

для всех $u \in W_p^S(F)$.

Пространства $W_p^S(F)$ хорошо изучены и широко применяются при рассмотрении различных вопросов, связанных с теорией линейных дифференциальных уравнений [1—5].

В работе устанавливается эквивалентность свойств корректности (обратимости) оператора $P : W_p^S(F) \to F_{\{s\}}$ при $F = L^p, F = M^p, F = V^p$. Аналогичная задача для натуральных $s$ изучалась в работе [6] ($F = L^p$, $F = M^p$).

1. Рассмотрим гладкую финитную функцию $\varphi_1 = \varphi_1(x, \xi, T) : R^n \to [0, 1]$ с носителем в шаре $B(\xi, 2T) \subset R^n$, причем $\varphi_1(x, \xi, T) = 1$ при $x \in B(\xi, T)$ и $|D^{\alpha}\varphi_1| \leqslant b_0 T^{-1}$ ($b_0$ не зависит от параметров $T > \max\{n, 2\}$ и $\xi \in R^n$, $\alpha \neq 0$), т. е. $\varphi_1 \in C_0^{\infty}$. Положим $\varphi = \varphi(x, \xi, \eta, T) = \varphi_1(x, \xi, T) \cdot \varphi_1(x, \eta, T)$.

**Лемма 1.** Для любой функции $u \in L_p^s$ справедлива оценка

$$\left( \int\limits_{R^n \times R^n} \frac{\|\varphi(x, \xi, \eta, T)u(x) - \varphi(x, \xi, \eta, T)u(y)\|^p}{|x - y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant a \left( \int\limits_{\substack{|x-\xi| \leqslant 4T + |\xi - \eta|, \\ |x-\xi| \leqslant 4T + |\xi - \eta|}} \frac{\|u(x) - u(y)\|^p}{|x - y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} + a \left( 4 + \frac{|\xi - \eta|^{\beta}}{T} \right) T^{-\{s\}} \|u\|_0 , \tag{2}$$

где $a > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $u, T, \xi$ и $\eta$, $\beta = \max\left(1 - \{s\}, \frac{n}{p}\right)$, $0 < \{s\} < 1$.

Неравенство (2) доказывается прямой непосредственной оценкой интеграла в левой части. В дальнейшем предположим, что $\frac{n}{p} \geqslant 1$.

Пусть $u \in W_p^s(F)$. Тогда

$$P(\varphi u) = \varphi P u + Q(u, \varphi), \tag{3}$$

где $Q(u, \varphi)$ — некоторый линейный дифференциальный оператор порядка $[s] - 1$ по переменной $u$, коэффициенты которого финитны.

**Лемма 2.** Имеют место следующие неравенства $(0 < \{s\} < 1)$ :

$$\|Q(u,\varphi_1)\|_{M^p} \leqslant b_1 T^{-1} \sum_{|\alpha|\leqslant[s]} \sup_{|x-\xi|\leqslant 2T} \left( \int\limits_{K(x)} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad u \in M^p. \quad (4)$$

$$\|Q(u,\varphi_1)\|_0 \leqslant b_2 T^{-1} \sum_{|\alpha|\leqslant[s]} \sup_{|x-\xi|\leqslant 2T} \left( \int\limits_{K(x)} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad u \in L^p. \quad (5)$$

$$\|Q(u,\varphi_1)\|_{[s]} \leqslant a_1 T^{-1} \sum_{|\alpha|\leqslant[s]} \left( \int\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 4T,\\ |y-\xi|\leqslant 4T}} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/2} +$$

$$+ a_2 T^{-1} \sum_{|\alpha|\prec[s]} \left( \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 4T} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad u \in L^p. \quad (6)$$

$$\langle Q(u,\varphi)\rangle_{2[s]} \leqslant a_3 T^{-1} \sum_{|\alpha|\leqslant[s]} \sup_{\substack{|x-\xi|\leqslant 4T,\\ |y-\xi|\leqslant 4T}} \left( \int\limits_{K(x)\times K(y)} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/2} +$$

$$+ a_4 T^{-1} \sum_{|\alpha|\leqslant[s]} \sup_{|x-\xi|\leqslant 4T} \left( \int\limits_{K(x)} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad u \in M^p. \quad (7)$$

Положительные постоянные $b_1$, $b_2$, $a_1 - a_4$ не зависят от $u$, $T$ и $\xi$. Неравенства (6) и (7) вытекают из леммы 1.

**Теорема 1.** Оператор $P: \ H^s \to L^p_{\{s\}}$ является корректным тогда и только тогда, когда оператор $P: \ W^s(M^p) \to M^p_{\{s\}}$ корректен.

**Доказательство I.** Пусть оператор $W^s(M^p) \to M^p_{\{s\}}$ является корректным. Возьмем производную функцию $u \in H^s$ Очевидно, что $\varphi_1 u \in W^s(M^p)$. В силу корректности $P: \ W^s(M^p) \to M^p_{\{s\}}$ согласно (3) имеем

$$\|\varphi_1 u\|_{W^s(M^p)} \leqslant k_2 \|\varphi_1 P u\|_{M^p} + k_2 \|Q(u,\varphi_1)\|_{M^p} +$$
$$+ k_2 \langle \varphi_1 P u\rangle_{20} + k_2 \langle Q(u,\varphi_1)\rangle_{20}. \quad (8)$$

Величина $\langle \varphi_1 P u\rangle_{20}$ оценивается сверху следующим образом:

$$\langle \varphi_1 P u\rangle_{20} \leqslant c_1 \sup_{\substack{|x-\xi|\leqslant 4T,\\ |y-\xi|\leqslant 4T}} \left( \int\limits_{K(x)\times K(y)} \frac{\|pu(x) - pu(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+c_2 T^{-1} \sup_{|x-\xi|\leqslant 4T} \left( \int\limits_{K(x)} \|Pu(x)\|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{9}$$

Постоянные $c_1$, $c_2$ не зависят от $u$, $T$ и $\xi$. На основе неравенств (4), (7)—(9) получаем $([s]=m)$.

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{|x-\xi|\leqslant \frac{T}{2}} \left( \int\limits_{K(x)} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} +$$

$$+\sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{\substack{|x-\xi|\leqslant \frac{T}{2},\\ |y-\xi|\leqslant \frac{T}{2}}} \left( \int\limits_{K(x)\times K(y)} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant (a_4 k_2 + b_2 k_2)\, T^{-1} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{|x-\xi|\leqslant 4T} \left( \int\limits_{K(x)} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} +$$

$$+a_3 k_2 T^{-1} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{\substack{|x-\xi|\leqslant \frac{T}{2},\\ |y-\xi|\leqslant \frac{T}{2}}} \left( \int\limits_{K(x)\times K(y)} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+\left(k_2 + c_2 T^{-1}\right) \sup_{|x-\xi|\leqslant 4T} \left( \int\limits_{K(x)} \|Pu(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} +$$

$$+c_1 \sup_{\substack{|x-\xi|\leqslant 4T,\\ |y-\xi|\leqslant 4T}} \left( \int\limits_{K(x)\times K(y)} \frac{\|Pu(x) - Pu(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p}. \tag{10}$$

По индукции из (10) находим

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \left( \int\limits_{K(\xi)} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} +$$

$$+\sum_{|\alpha|\leqslant m} \left( \int\limits_{K(\xi)\times K(\xi)} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 8^{-C_t^2} k_0^t T^{-t} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \left( \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 10^t T} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} +$$

$$+8^{-C_t^2} k_0^t T^{-t} \sum_{|\alpha|\leqslant m} \left( \int\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 10^t T,\\ |y-\xi|\leqslant 10^t T}} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+d_0 \sum_{\vartheta=0}^{t-1} 8^{-C_\vartheta^2} \cdot K_0^\vartheta T^{-\vartheta} \left( \left( \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 10^t T} \|Pu(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 10^t T,\\ |y-\xi|\leqslant 10^t T}} \frac{\|Pu(x) - Pu(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p},$$

где $t \in N$, $c_t^2 = \binom{2}{t}$, $k_0 = \max(b_2 k_2 + a_4 k_2, a_3 k_2)$, $d_0 = \max(c_2 k_2 T^{-1}, C_1, k_2)$. Отсюда, используя выпуклость функции $\vartheta \to \vartheta^p$, получим

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{K(\xi)} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx + \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{K(\xi)\times K(\xi)} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \leqslant$$

$$\leqslant d_1 8^{-pC_t^2} T^{-pt} \Big( \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 10^t T} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 10^t T,\\ |y-\xi|\leqslant 10^t T}} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \Big) +$$

$$+d_2 \left( \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 10^t T} \|Pu(x)\|^p \, dx + \int\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 10^t T,\\ |y-\xi|\leqslant 10^t T}} \frac{\|P^\alpha u(x) - P^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right), \quad (11)$$

где $d_1 = 4^{p-1} k_0^p N^{p-1}$, $d_2 = 4^{p-1} d_0^p k_2^p \left( \sum\limits_{\vartheta=0}^{t-1} 8^{-c_\vartheta^2} \cdot k_0^\vartheta T^{-\vartheta} \right)$, $N$ — число производных $D^\alpha u \, (|\alpha| \leqslant m)$.

Возьмем куб $K(0,R)$, ребра которого имеют длину $R \in N$ и соответственно параллельны осям координат $R^n$. Разобьем этот куб на $v = R^n$ единичных кубов $K(\xi_j)$. Применим к каждому кубу $K(\xi_j)$ неравенство (11):

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{K(0,R)} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx +$$

$$+\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{K(0,R)\times K(0,R)}\frac{\|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\leqslant d_1 8^{-pC_t^2}T^{-pT}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{v}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{|x-\xi_j|\leqslant 10^tT}\|D^\alpha u(x)\|^p\,dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{j,l=1}^{v}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{\substack{|x-\xi_j|\leqslant 10^tT,\\ |y-\xi_j|\leqslant 10^tT}}\frac{\|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\right)+$$

$$+d_2\left(\sum_{j=1}^{v}\int\limits_{|x-\xi_j|\leqslant 10^tT}\|Pu(x)\|^p\,dx+\sum_{j,l=1}^{v}\int\limits_{\substack{|x-\xi_j|\leqslant 10^tT,\\ |y-\xi_j|\leqslant 10^tT}}\frac{\|Pu(x)-Pu(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\right). \tag{12}$$

Считая $T\in N$, шар $B\left(\xi_j,10^tT\right)$ в (12) заменим кубом $K\left(\xi_j,2\cdot 10^tT\right)$ и разобьем его на $\mu=\left(2\cdot 10^tT\right)^n$ единичных кубов $K(\xi_{ij})$ (кубы $K(\xi_j)$, $K\left(\xi_j,2\cdot 10^tT\right)$ расположены так же, как и куб $K(0,R)$). Нетрудно проверить, что

$$\sum_{j=1}^{v}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{|x-\xi_j|\leqslant 10^tT}\|D^\alpha u(x)\|^p\,dx\leqslant\mu\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u(x)\|_0^p, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{v}\int\limits_{|x-\xi_j|\leqslant 10^tT}\|Pu(x)\|^p\,dx\leqslant\mu\,\|Pu(x)\|_0^p, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{v}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{\substack{|x-\xi_j|\leqslant 10^tT,\\ |x-\xi_j|\leqslant 10^tT}}\frac{\|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\leqslant$$

$$\leqslant\mu^2\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{R^n\times R^n}\frac{\|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+py}}dxdy, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{v}\int\limits_{\substack{|x-\xi_j|\leqslant 10^tT,\\ |x-\xi_j|\leqslant 10^tT}}\frac{\|Pu(x)-Pu(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\leqslant\mu^2\int\limits_{R^n\times R^n}\frac{\|Pu(x)-Pu(y)\|^p}{|x-y|^{n+py}}dxdy. \tag{16}$$

Так как $R$ произвольно и $\mu$ не зависит от $R$, то из оценок (12)—(16) получаем

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_0^p+\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{R^n\times R^n}\frac{\|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\leqslant$$

$$\leqslant 8^{-pC_t^2} d_1 T^{-pt} \mu \left( \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_0^p + \mu \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int\limits_{R^n \times R^n} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right) +$$

$$+ d_2 \mu \|Pu\|_0^p + d_2 \mu^2 \cdot \langle Pu \rangle_1^p \,. \tag{17}$$

Выберем числа $t, T$ достаточно большими, таким образом, чтобы выполнялись неравенства $pt > 2n$ и $8^{-pC_t^2} d_1 T^{-pt} \mu (1+\mu) < \frac{1}{2}.$ В этом случае из (17) следует

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u(x)\|_0^p + \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int\limits_{R^n \times R^n} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \leqslant$$

$$\leqslant 2d_2 \|Pu(x)\|_0^p + 2d_2 \mu^2 \cdot \langle Pu \rangle_1^p \,. \tag{18}$$

Очевидно, неравенство (18) показывает, что оператор $P: \ H^S \to L^p_{\{s\}}$ корректен.

**Доказательство II.** Пусть оператор $P: \ H^S \to L^p_{\{s\}}$ корректен. Возьмем произвольный элемент $u \in W^s(M^p)$ и рассмотрим функцию $\varphi_1 u \in H^s$. Так как $\varphi_1 u \in H^s$, то в силу корректности оператора $P: \ H^S \to L^p_{\{s\}}$ получаем неравенство

$$\|\varphi_1 u\|_s \leqslant k_1 \|\varphi_1 P u\|_0 + k_1 \|Q(u, \varphi_1)\|_0 + k_1 \langle \varphi_1 P u \rangle_{10} + k_2 \langle Q(u,\varphi_1) \rangle_{10} \,, \tag{19}$$

причем

$$\langle \varphi_1 P u \rangle_{10} < c_3 \left( \int\limits_{\substack{|x-\xi| \leqslant 4T + |\xi - \mu|, \\ |y-\eta| \leqslant 4T + |\xi - \mu|}} \frac{\|Pu(x) - Pu(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+ c_4 T^{-\{s\}} \left( \int\limits_{|x-\xi| \leqslant 4T} \|Pu(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} . \tag{20}$$

Постоянные $k_1 > 0, \ c_3 > 0$ в (20) не зависят от $u$, $T$ и $\eta$, а $c_4$ не зависит от $u$, но зависит от $|\xi - \eta|^\beta \cdot T^{-1}$. Предположим, что $|\xi - \eta|^\beta < T^{-1}$. При таких условиях неравенство (20) запишется в виде

$$\langle \varphi_1 P u \rangle_{10} < c_3 \left( \int\limits_{\substack{|x-\xi| \leqslant 5T, \\ |y-\eta| \leqslant 5T}} \frac{\|Pu(x) - Pu(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+ c_4 T^{-\{s\}} \left( \int\limits_{|x-\xi| \leqslant 4T} \|Pu(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} , \tag{21}$$

где $c_4$ уже не зависит от $|\xi-\eta|^{\beta}\cdot T^{-1}$.

Из оценок (6), (19) и (21) следует неравенство

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left(\int\limits_{|x-\xi|\leqslant\frac{T}{2}}\|D^{\alpha}u(x)\|^{p}\,dx\right)^{1/p}+\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left(\iint\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant\frac{T}{2},\\|y-\eta|\leqslant\frac{T}{2}}}\frac{\|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(y)\|^{p}}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left(k_1+c_4T^{-\{s\}}\right)\left(\int\limits_{|x-\xi|\leqslant 5T}\|Pu(x)\|^{p}\,dx\right)^{1/p}+$$

$$+\left(k_1b_2T^{-1}+a_2k_1T^{-1}\right)\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left(\int\limits_{|x-\xi|\leqslant 5T}\|D^{\alpha}u(x)\|^{p}\,dx\right)^{1/p}+$$

$$+k_1c_3\left(\int\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 5T,\\|y-\eta|\leqslant 5T}}\frac{\|Pu(x)-Pu(y)\|^{p}}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy+\right.$$

$$\left.+k_1a_1T^{-1}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 5T,\\|y-\eta|\leqslant 5T}}\frac{\|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(y)\|^{p}}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\right)^{1/p}. \qquad (22)$$

Индукцией по $T$ устанавливаем, что

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left(\int\limits_{|x-\xi|\leqslant\frac{T}{2}}\|D^{\alpha}u(x)\|^{p}\,dx\right)^{1/p}+\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left(\iint\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant\frac{T}{2},\\|y-\eta|\leqslant\frac{T}{2}}}\frac{\|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(y)\|^{p}}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant 12^{-C_1^2}k_3^tT^{-1}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left(\int\limits_{|x-\xi|\leqslant 12^{t}_{\frac{2}{T}}}\|D^{\alpha}u(x)\|^{p}\,dx\right)^{1/p}+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 12^{t}_{\frac{2}{T}},\\|y-\eta|\leqslant 12^{t}_{\frac{2}{T}}}}\frac{\|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(y)\|^{p}}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\right)^{1/p}\right)+$$

$$+b_3\sum_{\vartheta=0}^{t-1}12^{-c_\vartheta^2}\cdot k_3^\vartheta T^{-\vartheta}\left(\left(\int\limits_{|x-\xi|\leqslant 12^t_T}\|Pu(x)\|^p\,dx\right)^{1/p}+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 10^t_T,\\ |y-\xi|\leqslant 10^t_T}}\frac{\|Pu(x)-Pu(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\right)^{1/p}\right), \tag{23}$$

$k_3=\max(b_2k_1+a_2,\ k_1a_1)$, $\quad b_3=\max\left(c_4T^{-\{s\}}+k_1,\ c_3k_1\right)$.

Рассмотрим куб $K\left(\xi_j,2\cdot 12^tT\right)\supset B\left(\xi,12^t\cdot T\right)$ и разобьем его на $\mu=$ $=\left(2\cdot 10^tT\right)^n$ кубов $k(\xi_j)$ $(j=1,\ldots,\mu)$. Очевидно,

$$\int\limits_{|x-\xi|\leqslant 12^t\cdot T}\|D^\alpha u(x)\|^p\,dx\leqslant \mu\,\|D^\alpha u\|^p_{M^p}\quad(|\alpha|\leqslant m), \tag{24}$$

$$\iint\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 12^t\cdot T,\\ |y-\eta|\leqslant 12^t\cdot T}}\frac{\|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\leqslant \mu^2\,\langle u\rangle_2^p\,, \tag{25}$$

$$\int\limits_{|x-\xi|\leqslant 12^t\cdot T}\|Pu(x)\|^p\,dx\leqslant \mu\,\|Pu\|^p_{M^p}\,, \tag{26}$$

$$\iint\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant 12^t\cdot T,\\ |y-\eta|\leqslant 12^t\cdot T}}\frac{\|Pu(x)-Pu(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\leqslant \mu^2\,\langle Pu\rangle_2^p\,. \tag{27}$$

Неравенства (23)—(27) приводят к оценке

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left(\int\limits_{|x-\xi|\leqslant\frac{T}{2}}\|D^\alpha u(x)\|^p\,dx\right)^{1/p}+$$

$$+\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left(\iint\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant\frac{T}{2},\\ |y-\eta|\leqslant\frac{T}{2}}}\frac{\|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\right)^{1/p}\leqslant \tag{28}$$

$$\leqslant 12^{-C_1^2}k_3^tT^{-1}\mu^{\frac{2}{p}}\,\|u\|_{W^m(M^p)}+b_3\sum_{\vartheta=0}^{t-1}12^{-c_\vartheta^2}\cdot k_3^\vartheta T^{-\vartheta}\mu^{\frac{2}{p}}\cdot\|Pu\|\,\{s\}\,.$$

Выберем точку $\xi_1 \in R^n$ таким образом, что

$$\|D^\alpha u\|_{M^p} \leqslant 4 \left( \int\limits_{K(\xi_1)} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Затем возьмем такую точку $(\xi_2, \eta_2)$, что

$$\langle u \rangle_2^1 = \sup_{x,y \in R^n} \left( \int\limits_{K(x)\times K(y)_T^t} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \left( \int\limits_{K(\xi_2)\times K(\xi_2)_T^t} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \left( \int\limits_{\substack{|x-\xi_2| \leqslant \frac{T}{2}, \\ |y-\eta_2| \leqslant \frac{T}{2}}} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p}.$$

Тогда из (28) получаем

$$\|D^\alpha u\|_{M^p} + \langle u \rangle_2^1 \leqslant 4 \left( \int\limits_{|x-\xi_1| \leqslant \frac{T}{2}} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} +$$

$$+4 \left( \int\limits_{\substack{|x-\xi_1| \leqslant \frac{T}{2}, \\ |y-\eta_1| \leqslant \frac{T}{2}}} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} +$$

$$+4 \left( \int\limits_{|x-\xi_2| \leqslant \frac{T}{2}} \|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p \, dx \right)^{1/p} +$$

$$+4 \left( \int\limits_{\substack{|x-\xi_2| \leqslant \frac{T}{2}, \\ |y-\eta_2| \leqslant \frac{T}{2}}} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 8\cdot 12^{-c_t^2}k_3^t\mu^{\frac{2}{p}}\left\|u\right\|_{W^m(M^p)}+8b_3\sum_{\vartheta=0}^{t-1}12^{-c_\vartheta^2}\cdot k_3^\vartheta T^{-\vartheta}\mu^{\frac{2}{p}}\cdot\left\|Pu\right\|_{\{s\}}.$$

Отсюда

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\left\|D^\alpha u\right\|_{M^p}+\langle u\rangle_{2[s]}\leqslant$$

$$\leqslant 8N12^{-c_t^2}\cdot k_3^tT^{-t}\mu^{\frac{2}{p}}\left\|u\right\|_{W^m(M^p)}+8Nb_3\sum_{\vartheta=0}^{t-1}12^{-c_\vartheta^2}\cdot k_3^\vartheta T^{-\vartheta}\mu^{\frac{2}{p}}\cdot\left\|Pu\right\|_{\{s\}}. \quad (29)$$

Число $t$ возьмем достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство

$$8N12^{-c_t^2}\cdot k_3^tT^{-t}\mu^{\frac{2}{p}}<\frac{1}{2}.$$

Согласно (29) получим

$$\left\|u\right\|_{W^m(M^p)}\leqslant 16b_3\sum_{\vartheta=0}^{t-1}12^{-c_\vartheta^2}\cdot k_3^\vartheta T^{-\vartheta}\mu^{\frac{2}{p}}\cdot\left\|Pu\right\|_{\{s\}},$$

т. е. оператор $P:\ W^s(M^p)\to M^p_{\{s\}}$ корректен и теорема доказана.

2. Пусть $0<d_1<d_2<\ldots d_n<\ldots$ — последовательность чисел такая, что для некоторой постоянной $M>0$ $d_j/M\leqslant d_{j+1}\leqslant Md_j,\ j=1,2,\ldots$ Рассмотрим расходящуюся последовательность $0<e_1<e_2<\ldots<e_n\ldots$ чисел. Положим $X_1=\{x:\ \|x\|\leqslant e_1\},\ X_j=\{x:e_{j-1}\ \|x\|\leqslant e_j\},\ j=2,3,\ldots$. Определим пространство $V^p$, состоящее из всех функций $u\in L_{lok}(R^n)$ таких, что

$$\left\|u\right\|_{V^p}=\sum_{j=1}^{\infty}d_j\left(\int\limits_{X_j}\left\|u(x)\right\|^p dx\right)^{1/p}<\infty.$$

Пространство $V^p$ является банаховым пространством [6, с.264].
Введем пространство $W^s(V^p)$ типа Степанова — Бесова, которое состоит из таких функций $u\in L_{lok}(R^n)$, что

$$\left\|u\right\|_{W^s}(V^p)=\sum_{|\alpha|\leqslant[s]}\sum_{j=1}^{\infty}d_j\left(\int\limits_{X_j}\left\|D^\alpha u(x)\right\|^p dx\right)^{1/p}+\langle u\rangle_{3\{s\}}<\infty,$$

где

$$\langle u\rangle_{3\{s\}}=\sum_{|\alpha|\leqslant[s]}\sum_{j=1}^{\infty}d_j\left(\int\limits_{\substack{e_{j-1}<|x\|\leqslant e_j,\\ e_{j-1}<|y\|\leqslant e_j}}\frac{\left\|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)\right\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}}dxdy\right)^{1/p}.$$

Пространство $W^s(V^p)$ также является банаховым пространством. Далее норма

$$\|u\|_{V^p_{\{s\}}} = \|u\|_{V^p} + \langle u\rangle_{30}$$

определяет банахово пространство $V^p_{\{s\}}$. По аналогии с теоремой 1 доказывается следующая

**Теорема 2.** Корректность оператора $P : H^s \to L^p_{\{s\}}$ эквивалентна корректности оператора $P:\ W^s(V^p) \to V^p_{\{s\}}$.

В доказательстве теоремы 2 существенную роль играет оценка

$$\langle \varphi_1 u\rangle_{30} \leqslant b_3 \langle u\rangle_{30} + b_4 T^{-\{s\}} \|u\|_{W^s(V^p)},$$

где $b_3, b_4$ — некоторые постоянные, не зависящие от $u(x)$ и $D^\alpha u(x)$.

**Теорема 3.** При сделанных предположениях относительно коэффициентов $A_\alpha$, $p$ и $n$ корректность операторов $P : H^s \to L^p_{\{s\}}$, $P:\ W^s(M^p) \to M^p_{\{s\}}$ и $P:\ W^s(V^p) \to V^p_{\{s\}}$ эквивалентна.

**Теорема 4.** Пусть выполнены предположения теоремы 3. Тогда обратимость одного из операторов $P : H^s \to L^p_{\{s\}}$, $P:\ W^s(M^p) \to M^p_{\{s\}}$ и $P:\ W^s(V^p) \to V^p_{\{s\}}$ влечет обратимость двух остальных операторов.

**Доказательство.** Пусть оператор $P : H^s \to L^p_{\{s\}}$ обратим и $f \in V^p_{\{s\}}$. Тогда уравнение $Pu = f$ имеет единственное решение $u \in H^s$, ибо $V^p_{\{s\}} \subset L^p_{\{s\}}$. Покажем, что $u \in W^s(V^p)$. Обратимый оператор $P : H^s \to L^p_{\{s\}}$ корректен, так как $H^s$ и $L^p_{\{s\}}$ — банаховы пространства. По теореме 2 оператор $P:\ W^s(V^p) \to V^p_{\{s\}}$ корректен. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{|\alpha|\leqslant[s]} \sum_{v=1}^{j} d_v \left( \int\limits_{R_v} \|D^\alpha u(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant[s]} \sum_{v=1}^{j} d_v \left( \int\limits_{\substack{e_{v-1}<|x|\leqslant e_v,\\ e_{v-1}<|y|\leqslant e_v}} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant N_1 \|Pu\|_{V^p_{\{s\}}} + N_2^j \|Pu\|_{H^s},$$

где постоянные $N_1$, $N_2(j)$ ограничены относительно $j$. Отсюда следует, что $u \in W^s(V^p)$, т. е. оператор $P:\ W^s(V^p) \to V^p_{\{s\}}$ обратим.

Если оператор $P:\ W^s(V^p) \to V^p_{\{s\}}$ обратим, то возьмем произвольный элемент $f$ и положим $f_j = \varphi(x, 0d_j)f$. Очевидно, $f_j \in V^p_{\{s\}}$, и уравнение $Pu = f_j$ имеет единственное решение $u_j \in W^s(V^p)$. По теореме Банаха оператор $P:\ W^s(V^p) \to V^p_{\{s\}}$ непрерывно обратим и, следовательно, корректен.

Тогда согласно теореме 2 оператор $P : H^s \to L^p_{\{s\}}$ корректен, и справедливо по формуле (22) неравенство ($[s] = m$)

$$\sum_{|\alpha|\leqslant[s]} \left( \int\limits_{|x|\leqslant\frac{d_j}{2}} \|D^\alpha u_j(x) - D^\alpha u_i(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant[s]} \left( \int\limits_{\substack{|x|\leqslant\frac{d_j}{2}, \\ |y|\leqslant\frac{d_j}{2}}} \frac{\|D^\alpha (u_j(x) - u_i(x)) - D^\alpha (u_j(y) - u_i(y))\|^p}{|x-y|^{n+p\{s\}}} dxdy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant a_5 \left( \int\limits_{|x|\leqslant 6d_j} \|f_j - f_i\|^p \, dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \int\limits_{\substack{|x|\leqslant 6d_j, \\ |y|\leqslant 6d_j}} \left( \frac{\|f_j(x) - f_i(x) - f_j(y) - f_i(y)\|^p}{|x-y|^{n+py}} dxdy \right) + \frac{a_6}{a_j} \|f_i - f_j\|_{L^p_{\{s\}}} .$$

При этом постоянные $a_6$, $a_5$ не зависят от $j$, $u(x)$ $(i > j.)$ Так как $u_j$ ограничена в $H^s(L^p)$, то отсюда следует, что последовательность $u_j$ локально фундаментальна в $H^s(L^p)$. Так как оператор $P : H^s \to L^p_{\{s\}}$ локально непрерывен, то $Pu = f$. Поскольку $f$ — произвольный элемент из $L^p_{\{s\}}$, то $P : H^s \to L^p_{\{s\}}$ обратим (непрерывен). Согласно теореме 2 операторы $P : H^s \to L^p_{\{s\}}$ и $P :\ W^s(V^p) \to V^p_{\{s\}}$ обратимы одновременно. Теорема доказана.

## Литература

[1] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.

[2] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.

[3] Жиков В.В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер.: Матем. 1976. Т. 40. № 6. С. 1380—1408.

[4] Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985. 472 с.

[5] Тюрин В.М. К обратимости линейных дифференциальных операторов с частными производными в некоторых пространствах функций на $\mathbb{R}^n$ // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 1419—1425.

[6] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4 т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1986. 456 с.

Поступила в редакцию 9/*II*/2009;
в окончательном варианте — 22/*VI*/2009.

## ABOUT THE REVERSIBILITY OF LINEAR DIFFERENTIATION OPERATORS OF THE ELLIPTICAL TYPE IN SOME FUNCTION SPACES

© 2009 T.B. Kuznetsova, V.M. Tyurin[2]

In the spaces of Sobolev — Slobodetzky $H^s(R)$, Sobolev — Stepanov $W^s(R^p)$ and Stepanov — Besov $W^s(V^p)$ $(0 < s < \infty)$, the equivalence of invertibility properties for the linear differentiation operator with limited coefficients is proved.

**Key words and phrases:** differentiation operator, invertibility, correctness, coercitivity, functional spaces.

Paper received 9/*II*/2009.
Paper accepted 22/*VI*/2009.

[2]Kuznetsova Tatyana Borisovna (`sviat@lipetsk.ru`), Tyurin Vasiliy Michailovich (`tuvm@lipetsk.ru`), Department of Higher Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, 398600, Russia.