УДК 512.5 + 511.334

СЕМЕЙСТВА МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ГРУППУ[1]

© 2009 Г.В. Воскресенская[2]

В статье рассматривается проблема нахождения множеств модулярных форм, которые однозначно определяют группу. Соответствие между модулярными формами и элементами групп основывается на рассмотрении характеристических многочленов точных представлений. Эта задача решается для групп порядка 24.

Ключевые слова: представления групп, модулярные формы, генетический код, эта-функция Дедекинда.

Введение

В статье рассматривается соответствие между элементами конечных групп и модулярными формами, основанное на рассмотрении характеристических многочленов операторов $\Phi(g)$, где $\Phi-$ точное представление (принцип фрейм-соответствия).

Мы изучаем возможность однозначного определения группы наборами модулярных форм, ассоциированных с его элементами. Такое задание группы можно назвать модулярным аналогом генетического кода.

Мы находим такие определяющие множества для групп порядка 24. Нахождение таких наборов требует тонкого анализа структуры группы даже для небольших порядков.

Замечательно, что для неабелевых групп порядка 24 модулярные формы, определяющие группу, можно выбрать с мультипликативными коэффициентами. Мы используем методы из статей [1–8].

1. Соответствие с помощью фрейм-форм

В современных математических исследованиях существует несколько различных способов сопоставлять элементам конечных групп модулярные

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00151а.

[2]Воскресенская Галина Валентиновна (vosk@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

формы. Здесь мы опишем принцип, который называется соответствием с помощью фрейм-формы (Frame-shape correspondence).

Первые современные исследования этого соответствия проводил в пятидесятые годы Морис Ньюман, затем активный интерес проявился в исследованиях Джеффри Мейсона и его учеников [9–13].

Суть его заключается в следующем.

Для построения соответствия между элементами конечных групп и модулярными формами мы используем эта-функцию Дедекинда, которая определяется формулой:

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \qquad q = e^{2\pi i z},$$

z принадлежит верхней комплексной полуплоскости.

Пусть Φ — такое линейное представление G в пространстве V, $24 \,|\, dimV$, что для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен $P_g(x)$ имеет вид

$$\prod_{j=1}^{s} (x^{a_j} - 1)^{t_j}, \quad a_j,\ t_j \in \mathbf{N},\ 24| \sum_{j=1}^{s} a_j t_j.$$

Тогда каждому элементу g можно сопоставить функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{j=1}^{s} \eta(a_j z)^{t_j}.$$

Функция $\eta_g(z)$является параболической формой из пространства $S_k(N, \chi)$, где $k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} t_j$, минимальный уровень N определяется из условия $24 \,|\, \sum_{j=1}^{s} \frac{N t_j}{a_j}$, характер χ — характер Дирихле по модулю N, $\chi(d) = \left(\frac{\prod_{j=1}^{s} a_j^{t_j}}{d} \right)$. Если d четно, то $\chi(d)$ определяется как $\chi(d+N) = \chi(d)$, $(d, N) = 1$ [14]. Символ $\prod_{j=1}^{s} a_j^{t_j}$ называется фрейм-формой (Frame-shape).

2. (G, Φ)-множества

Определение

(G, Φ)-множеством называется множество параболических форм $\eta_g(z)$, ассоциированных с элементами группы G по правилу, описанному выше, с помощью некоторого представления.

(G, Φ)-множества образуют категорию, если фиксировать G и менять Φ. Пусть $A - (G, \Phi)$-множество, $B - (G, \Psi)$-множество. Морфизм определяется следующим образом: $f_1(z) = \eta_{g,\Phi}(z) \in A$ переходит в $f_2(z) = \eta_{g,\Psi}(z) \in B$ для любого элемента $g \in G$.

Тождественный морфизм:

$$\eta_{g,\Phi}(z) \to \eta_{g,\Phi}(z).$$

Эту категорию можно обозначить $G - MF - SET$.

Категория GR-MF-SET определится, если не фиксировать конечную группу G и рассматривать морфизм (G,Φ)-множества A в (H,Ψ)-множество B следующим образом: пусть ϕ-гомоморфизм группы G в группу H, тогда

$$\eta_{g,\Phi}(z) \;\to\; \eta_{\phi(g),\Psi}(z).$$

При определении композиции морфизмов учитывается область определения (так же, как и при определении гомоморфизмов групп).

3. Редуцированные (G,Φ)-множества

Во многих задачах удобно рассматривать множества, получающиеся из (G,Φ)-множеств удалением повторяющихся параболических форм. Мы будем называть такие множества редуцированными.

Например, редуцированное (S_3, T_{reg})-множество: $\{\eta^{24}(z), \eta^{8}(3z), \eta^{12}(2z)\}$.

Интересной проблемой является определение соответствующих групп по заданным редуцированным (G,Φ)-множествам. Возникает проблема нахождения множеств модулярных форм, однозначно определяющих группу.

4. Модулярный генетический код для групп порядков 24

Существует 15 групп порядка 24. Выпишем их.

$G_1 \cong S_4$;
$G_2 \cong < a, b : a^6 = b^4 = e, b^{-1}ab = a^5 >$;
$G_3 \cong < a, b : a^4 = b^6 = (ab)^2 = (a^{-1}b)^2 = e >$;
$G_4 \cong < a, b : a^6 = b^6 = (ab)^4 = e, a^3 = b^3 = (ab)^2 >$;
$G_5 \cong D_6 \times Z_2$;
$G_6 \cong A_4 \times Z_2$;
$G_7 \cong D_4 \times Z_3$;
$G_8 \cong S_3 \times Z_4$;
$G_9 \cong Q_8 \times Z_3$;
$G_{10} \cong D_{12}$;
$G_{11} \cong < a,\ \ b : a^6 = b^2 = (ab)^2 >$;
$G_{12} \cong < a, b : a^3 = b^8 = e, b^{-1}ab = a^2 >$;
$G_{13} \cong Z_6 \times Z_2 \times Z_2$;
$G_{14} \cong Z_{12} \times Z_2$;
$G_{15} \cong Z_{24}$.

Таблица

Группа	Модулярный генетический код
G_1	$\{\eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_2	$\{\eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z)$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_3	$\{\eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_4	$\{\eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^3(6z)\eta^3(2z),\ \eta^6(4z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_5	$\{\eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),$ $\eta^6(3z)\eta^6(z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_6	$\{\eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^6(3z)\eta^6(3z),$ $\eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_7	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_8	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^6(4z), \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_9	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{10}	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{11}	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z),\ \ \eta^6(3z)\eta^6(z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{12}	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z), \eta^3(8z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{13}	$\{\eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(6z)\eta^4(3z),\ \eta^3(6z)\eta^2(3z),\ \eta^4(6z),$ $\eta^8(3z),\ \eta^6(2z)\eta^{12}(z),\ \eta^9(2z)\eta^6(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{14}	$\{\eta^2(12z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}\bigwedge$ $\{\eta^2(12z),\ \eta^2(6z)\eta^4(3z),\ \eta^4(6z),\ \eta^6(4z),$ $\eta^8(3z),\ \eta^6(2z)\eta^{12}(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$
G_{15}	$\{\eta(24z),\ \eta^2(12z),\ \eta^4(6z), \eta^3(8z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$

Теорема 1. Множества параболических форм, указанные в таблице, однозначно определяют соответствующие группы порядка 24.

Доказательство.

Первое из множеств мы обозначим S_1, второе — S_2. Мы не будем вводить индекс, указывающий группу, из контекста будет понятно, к какой группе они относятся при конкретном рассмотрении.

Первое множество показывает, что |G| делит 24. Каждая из групп $G_1,\ G_{12},\ G_{15}$ обладает уникальным набором порядков своих элементов среди групп порядка 24, групп меньших порядков с такими порядками элементов не существует. Множество S_1 реализуется для регулярного представления.

Далее по порядкам элементов мы можем разделить группы на три семейства.

Во всех случаях множеству S_1 соответствует регулярное представление. Представление, соответствующее множеству S_2, мы будем обозначать Φ; если $T-$ неприводимое представление рассматриваемой группы, то кратность его вхождения в представление Φ обозначается m_T, число m_1 обозначает кратность единичного представления.

Изучим семейство $\{G_7,\ G_8,\ G_9,\ G_{10},\ G_{11},\ G_{14}\}$.

Группа $G_7 \cong D_4 \times Z_3$.

Генетический код группы:
$< a, b, c : a^4 = b^2 = c^3 = e, b^{-1}ab = a^3, ca = ac, cb = bc >$.
Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
e	a, a^3	a^2	ab, a^3b	b, a^2b	c	ac, a^3c	a^2c	abc, a^3bc	bc, a^2bc

C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
abc^2, a^3bc^2	c^2	ac^2, a^3c^2	a^2c^2	bc^2, a^2bc^2

Одномерные представления:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
a	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
b	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
c	1	1	1	1	ζ_3	ζ_3	ζ_3	ζ_3	ζ_3^2	ζ_3^2	ζ_3^2	ζ_3^2

Двумерные неприводимые представления:

$$T_{13}(a) = T_{14}(a) = T_{15}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_4 & 0 \\ 0 & \zeta_4^3 \end{pmatrix}, \quad T_{13}(b) = T_{14}(b) = T_{15}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_{13}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{14}(c) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3 \end{pmatrix}, \quad T_{15}(c) = \begin{pmatrix} \zeta_3^2 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}.$$

Множество

$$S_2 = \{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),$$
$$\eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую все неприводимые представления, переводящие элемент c в 1 или в единичную матрицу, входят с кратностью 2, а остальные неприводимые представления входят с кратностью 1.

Элементы	Модулярные формы
ac, a^3c^2, ac^2, a^3c^2	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
a^2c^2, a^2c	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$bc, bc^2, abc, abc^2, a^2bc, a^2bc^2, a^3bc, a^3bc^2$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$
a, a^3	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
c, c^2	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
a^2	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
b, ab, a^2b, a^3b	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

Для групп G_8, G_9, G_{10} множество S_2 как (G,Φ)-множество не реализуется, так как в них третьи степени элементов порядков 6 соответствуют одной и той же параболической форме.

Допустим, что S_2 реализуется для $Z_{12} \times Z_2$. Пусть Φ — соответствующее представление. Число $m_1 =< \chi_\Phi, \chi_1 >$ будет целым, только если два элемента группы g, g^2 соответствуют форме $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$, один элемент — $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Пусть $T(g) = \zeta_6$, тогда $m_T =< \chi_\Phi, \chi_T >= \frac{1}{2}$, а оно должно быть целым. Значит, реализация невозможна.

Группа $G_8 \cong S_3 \times Z_4$.

Генетический код группы:
$< a, b, c : a^3 = b^2 = c^4 = e, b^{-1}ab = a^2, ca = ac, cb = bc > .$
Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
e	a, a^2	b, ab, a^2b	c	ac, a^2c	bc, abc, a^2bc	c^2	ac^2, a^2c^2	bc^2, abc^2, a^2bc^2

C_{10}	C_{11}	C_{12}
c^3	ac^3, a^2c^3	bc^3, abc^3, a^2bc^3

Одномерные представления:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
a	1	1	1	1	1	1	1	1
b	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
c	1	1	-1	-1	ζ_4	ζ_4	ζ_4^2	ζ_4^2

Двумерные неприводимые представления:

$$T_9(a) = T_{10}(a) = T_{11}(a) = T_{12}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix};$$

$$T_9(b) = T_{10}(b) = T_{11}(b) = T_{12}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_9(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{10}(c) = \begin{pmatrix} \zeta_4 & 0 \\ 0 & \zeta_4 \end{pmatrix},$$

$$T_{11}(c) = \begin{pmatrix} \zeta_4^3 & 0 \\ 0 & \zeta_4^3 \end{pmatrix}, \ T_{12}(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую одномерные представления, переводящие элемент b в -1, не входят, остальные неприводимые представления входят с кратностью 2.

Множество

$$S_2 = \{\eta(12z)^2,\ \eta^4(6z),\ \eta^8(3z),\ \eta^6(4z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}.$$

Элементы $b,\ ab,\ a^2b$ соответствуют форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Остальные элементы группы соответствуют другим формам из множества S_2 в соответствии с порядками.

Для оставшихся групп этого семейства это множество не реализуется: в группах $D_{12},\ D_4 \times Z_3,\ Q_8 \times Z_3$ имеется только один элемент порядка 2, в группе порядка $Z_{12} \times Z_2$ любой элемент порядка 2 является кубом элемента порядка 6. Следовательно, две формы $\eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z)$ одновременно не могут появиться.

Группа $G_9 \cong Q_8 \times Z_3$.

Генетический код группы:
$< a, b, c : a^4 = b^4 = c^3 = e, b^{-1}ab = a^3, b^2 = a^2, ac = ca, bc = cb. >$
Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
e	a, a^3	a^2	b, a^2b	ab, a^3b	c	ac, a^3c	a^2c	bc, a^2bc

C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
abc, a^3bc	c^2	ac^2, a^3c^2	a^2c^2	bc^2, a^2bc^2	abc^2, a^3bc^2

У группы 12 одномерных представлений: числа 1 и -1 чередуются на элементах a и b; значения одномерных представлений на элементе c равны $1,\ \zeta_3,\ \zeta_3^2$.

Неприводимые двумерные представления:

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} \zeta_4 & 0 \\ 0 & \zeta_4^3 \end{pmatrix}; \quad T_k(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ k = 1, 2, 3,$$

$$T_1(c) = E,\ T_2(c) = \zeta_3 E,\ T_3(c) = \zeta_3^2 E.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую T_1 и одномерные представления, переводящие элемент c в 1, входят с кратностью 2, а остальные неприводимые представления входят с кратностью 1.

Классы	Модулярные формы
$C_7,\ C_9,\ C_{10},\ C_{12},\ C_{14},\ C_{15}$	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
$C_8,\ C_{13}$	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$C_2,\ C_4,\ C_5$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
$C_6,\ C_{11}$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
C_3	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
C_1	$\eta^{24}(z)$

Множество

$$S_2 = \{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \ \eta^3(6z)\eta^3(6z),$$
$$\eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \ \eta^{24}(z)\}.$$

Покажем, что для других групп из этого семейства множество S_2 не реализуется. Предположим противное и получим противоречие.

Для группы $S_3 \times Z_4$ число m_1 будет равно $\frac{11}{3}$, а должно быть целым.

Для группы D_{12} число m_1 будет равно 6, но в этом случае среди собственных значений оператора $\Phi(g), ord(g) = 12$ имеется не менее 6 единиц, значит, элемент g не может соответствовать форме $\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$.

Для группы $D_4 \times Z_3$ рассмотрим представление $T: T(a) = 1,\ T(b) = -1,$ $T(c) = 1$. Число m_T будет равно $\frac{1}{4}$, а должно быть целым.

Для группы $Z_{12} \times Z_2 \cong < a > \times < b >$ рассмотрим представление T : $T(a) = \zeta_{12},\ T(b) = 1$. Число m_T будет равно $\frac{3}{2}$, а должно быть целым.

Группа $G_{10} \cong D_{12}$.

Генетический код группы: $< a, b : a^{12} = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1}. >$

В группе 9 классов сопряженных элементов. Их представители: степени элемента a, элементы $b,\ ab$. У этой группы 4 неприводимых одномерных представления (1 и -1 чередуются на элементах a и b). Двумерные неприводимые представления:

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{12}^k & 0 \\ 0 & \zeta_{12}^{-k} \end{pmatrix}; \quad T_k(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Множество

$$S_2 = \{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),\ \ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \ \eta^6(3z)\eta^6(z),$$
$$\eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \ \eta^{12}(2z),\ \ \eta^{24}(z)\}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую все точные представления входят с кратностью 1, остальные представления — с кратностью 2.

Элементы	Модулярные формы
a, a^5, a^7, a^{11}	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
a^2, a^{10}	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
a^3, a^9	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
a^4, a^8	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
a^6	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$a^k b, \;\; k = \overline{0, 11}$	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

Для остальных групп этого семейства множество S_2 не реализуется, так как в них любой элемент второго порядка является кубом элемента порядка 6, и форма $\eta^{12}(2z)$ не может появиться.

Группа $G_{11} \cong < a, \;\; b : a^6 = b^2 = (ab)^2 >$.

Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
e	a^6	$a, \;\; a^{11}$	$a^5, \;\; a^7$	$a^2, \;\; a^{10}$	$a^4, \;\; a^8$	$a^3, \;\; a^9$

C_8	C_9
$ab, a^3b, a^5b, a^7b, a^9b, a^{11}b$	$b, a^2b, a^4b, a^6b, a^8b, a^{10}b$

Одномерные представления:

	T_1	T_2	T_3	T_4
a	1	1	- 1	- 1
b	1	-1	1	-1

Двумерные неприводимые представления:

$$T_5(a) = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^5 \end{pmatrix}; \quad T_6(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}; \quad T_7(a) = \begin{pmatrix} \zeta_4 & 0 \\ 0 & \zeta_4^3 \end{pmatrix};$$

$$T_8(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{12} & 0 \\ 0 & \zeta_{12}^{11} \end{pmatrix}; \quad T_9(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{12}^5 & 0 \\ 0 & \zeta_{12}^7 \end{pmatrix};$$

$$T_5(b) = T_6(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_7(b) = T_8(b) = T_9(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Допустимое представление:

$$\Phi = 4T_1 \oplus 2T_3 \oplus 2T_4 \oplus 2T_5 \oplus 2T_6 \oplus 2T_7 \oplus T_8 \oplus T_9.$$

Множество

$$S_2 = \{\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z), \;\; \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \;\; \eta^6(3z)\eta^6(z),$$

$$\eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \;\; \eta^{24}(z)\}.$$

Элементы из классов C_8, C_9 соответствуют форме $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$, остальные элементы — другим формам из S_2 в соответствии и порядками.

Для остальных групп этого семейства, кроме $Z_{12}\times Z_2$, это множество не реализуется, так как в них все элементы четвертого порядка являются кубами элементов порядка 12, а значит, соответствуют одной и той же форме.

Для группы $Z_{12}\times Z_2$ множество S_2 также не реализуется, так как в этом случае $m_1=\frac{10}{3}$, а должно быть целым.

Группа $G_{14}\cong Z_{12}\times Z_2\cong <a>\times<b>$.

Множество

$$S_2=\{\eta(12z)^2,\eta^4(6z),\eta^3(6z)\eta^4(3z),\eta^8(3z),\eta^6(4z),\eta^6(2z)\eta^{12}(z),\eta^{12}(2z),\eta^{24}(z)\}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую неприводимые представления $T:T(a^6b)=T(b)=1$ входят с кратностью 2, неприводимые представления $T:T(a^6b)=T(b)=-1$ не входят, остальные неприводимые входят с кратностью 1.

Для других групп этого семейства множество S_2 не реализуется: для $D_4\times Z_3$ это верно, так как легко показать, что с группой D_4 множество $\{\eta^6(4z),\ \eta^6(2z)\eta^{12}(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}$ нельзя ассоциировать с помощью некоторого точного представления; для других групп реализация невозможна, так как в них кубы всех элементов второго порядка соответствуют одной и той же форме.

Изучим семейство $\{G_2,\ G_3,\ G_4\}$.

Множество S_1 не может реализоваться для абелевых групп порядка 24 и для любых групп порядка 12. Значит, $|G|=24$.

Группа G_2.

Генетический код группы:
$<a,b:a^6=b^4=e,b^{-1}ab=a^5>$.
Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
e	a,a^5	a^2,a^4	a^3	b,a^2b,a^4b	b^2	b^3,a^2b^3,a^4b^3	ab,a^3b,a^5b	ab^2,a^5b^2

C_{10}	C_{11}	C_{12}
ab^3,a^3b^3,a^5b^3	a^2b^2,a^4b^2	a^3b^2

Одномерные представления:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
a	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
b	i	-i	1	-1	i	-i	1	-1

Неприводимые двумерные представления:

$$T_9(a) = T_{10}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^5 \end{pmatrix}; \quad T_{11}(a) = T_{12}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}.$$

$$T_9(b) = T_{11}(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad T_{10}(b) = T_{12}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество

$$S_2 = \{\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \eta^3(6z)\eta^3(2z),\ \eta^6(3z)\eta^6(z),$$

$$\eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}.$$

Соответствующее представление

$$\Phi = T_1 \oplus T_2 \oplus 3T_3 \oplus T_4 \oplus 2T_7 \oplus 2T_{10} \oplus 2T_{11} \oplus 3T_{12}.$$

Соответствие между классами сопряженных элементов и модулярными формами укажем в следующей таблице.

Классы	Модулярные формы
$C_2,\ C_9$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$
C_{11}	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$C_8,\ C_{10}$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
$C_5,\ C_7$	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$
C_3	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
C_6	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$C_4,\ C_{12}$	$\eta^{12}(2z)$
C_1	$\eta^{24}(z)$

Для $G_3,\ G_4$ множество S_2 не реализуется, так как в них имеется только один класс сопряженных элементов порядка 4.

Группа G_3.

Генетический код группы:
$< a, b : a^4 = b^6 = (ab)^2 = (a^{-1}b)^2 = e >$.

Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
e	$a, a^3, b^4a^3, b^2a, b^4a, b^2a^3$	b, b^5a^2	b^2, b^4	b^5, ba^2

C_6	C_7	C_8	C_9
b^3, b^3a^2	$ba, b^5a^3, b^3a, ba^3, b^5a, b^3a, b^3a^3$	a^2	b^2a^2, b^4a^2

Неприводимые двумерные представления:

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ k = 1,2; \ T_k(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ k = 3,4;$$

$$T_5(a) = \begin{pmatrix} \zeta_4 & 0 \\ 0 & \zeta_4^3 \end{pmatrix}.$$

$$T_1(b) = \begin{pmatrix} \zeta_6^2 & 0 \\ 0 & \zeta_6 \end{pmatrix}, \quad T_2(b) = \begin{pmatrix} \zeta_6^5 & 0 \\ 0 & \zeta_6^2 \end{pmatrix}, \quad T_3(b) = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^5 \end{pmatrix},$$

$$T_4(b) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}, \quad T_5(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У этой группы 4 одномерных представления: значения 1 и -1 чередуются на элементах a и b.

Множество

$$S_2 = \{\eta^4(6z),\ \eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \eta^8(3z),\ \eta^8(2z)\eta^8(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}.$$

Соответствующее представление Φ является прямой суммой, в которую все двумерные представления входят с кратностью 2, одномерные представления, значения которых совпадают на элементах a и b, входят с кратностью 1, оставшиеся два одномерных представления не входят в Φ.

Элементы из класса C_6 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$. Остальные элементы соответствуют другим формам в соответствии с порядками.

Для G_2, G_4 множество S_2 не реализуется, так как в них любой элемент порядка 2 является кубом элемента порядка 6, и форма $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ не могла бы появиться.

Группа G_4.

Генетический код группы:
$< a, b : a^6 = b^6 = (ab)^4 = e, a^3 = b^3 = (ab)^2 > .$
Это бинарная группа тетраэдра.
Приведем таблицу ее неприводимых характеров.

	1A	2A	3A	3B	4A	6A	6B
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ζ_3	ζ_3^2	1	ζ_3	ζ_3^2
χ_3	1	1	ζ_3^2	ζ_3	1	ζ_3^2	ζ_3
χ_4	2	- 2	- 1	- 1	0	1	1
χ_5	2	- 2	$-\zeta_3$	$-\zeta_3^2$	0	ζ_3	ζ_3^2
χ_6	2	- 2	$-\zeta_3^2$	$-\zeta_3$	0	ζ_3^2	ζ_3
χ_7	3	3	0	0	- 1	0	0

Множество

$$S_2 = \{\eta^3(6z)\eta^3(2z),\ \eta^6(4z),\quad \eta^6(3z)\eta^6(z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(z)\}.$$

Соответствующее представление

$$\Phi = 3T_1 \oplus 3T_5 \oplus 3T_6 \oplus 3T_7.$$

Элементы группы ассоциируются с модулярными формами в соответствии с порядками.

Для G_2, G_3 множество S_2 не реализуется, так как в них только два элемента порядка 3, и число $m_1 = \frac{3}{2}$, а должно быть целым.

Семейство $\{G_5,\ G_6,\ G_{13}\}$ изучается аналогичными методами.

Теорема 1 доказана.

Литература

[1] Белоногов В.А. Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990.

[2] Воскресенская Г.В. Метациклические группы и модулярные формы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 163–173.

[3] Воскресенская Г.В. Мультипликативные произведения эта-функций Дедекинда и представления групп // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 4. С. 282–295.

[4] Воскресенская Г.В. О проблеме классификации конечных групп, ассоциированных с мультипликативными эта-произведениями // Фунд. и приклад. математика. 2004. Т. 10. № 4. С. 43–64.

[5] Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

[6] Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж.М. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.

[7] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.

[8] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[9] Mason G. Frame shapes and rational characters of finite groups // J. Algebra. 1984. V. 89. P. 236–246.

[10] Mason G. M_{24} and certain automorphic forms // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 223–244.

[11] Mason G. Finite groups and Hecke operators // Math. Ann. 1989. V. 283. P. 381–409.

[12] Newman M. Construction and application of a certain class of modular forms // Proc. L.M.S. 1956. V. 7. P. 334–350.

[13] Newman M. Construction and application of a certain class of modular forms, II // Proc. L.M.S. 1959. V. 9. P. 373–387.

[14] Ono K. The web of modularity: arithmetics of the coefficients of modular forms and q-series. Prinston, 2004. 216 p.

[15] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // JTNB. 1999. V. 11. P. 247–262.

[16] Voskresenskaya G.V. Multiplicative Dedekind η-functions and representations of finite groups // JTNB. 2005. V. 17. P. 359–380.

[17] Воскресенская Г.В. О теории соответствия между конечными группами и модулярными формами // Вестник СамГУ. 2008. № 5(67). С. 71–82.

Поступила в редакцию II/*VI*/2009;
в окончательном варианте — II/*VI*/2009.

SETS OF MODULAR FORMS WHICH DEFINE GROUPS[3]

 G.V. Voskresenskaya[4]

In the article we consider the problem of finding sets of modular forms which explicitly define groups. The correspondence between modular forms and elements of groups is based on the consideration of characteristic polynomials of faithful representations. We solve this problem for the groups of order 24.

Key words: group representations, modular forms, genetic code, Dedekind eta-function.

Paper received II/*VI*/2009.
Paper accepted II/*VI*/2009.

[3]The work is written under the financial support of grant of the Russian Foundation for Basic Research 08-01-00151a.

[4]Voskresenskaya Galina Valentinovna (galvosk@mail.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.