УДК 517.18

РЕДУКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИХ АЛГЕБРУ ЛИ

© 2009 Ю.О. Яковлева[1]

В публикуемой работе рассматривается редукция дифференциальных уравнений, допускающих алгебру Ли. Исследовано дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее разрешимую алгебру Ли и редуцированные группы, задаваемые локальным точечным оператором и экспоненциальным нелокальным оператором. В случае дифференциального уравнения третьего порядка, допускающего неразрешимую алгебру Ли, также рассмотрены редуцированные группы, допускаемые как локальными точечными, так и нелокальными операторами.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение второго порядка, дифференциальное уравнение третьего порядка, алгебра Ли, локальный оператор, экспоненциальный нелокальный оператор.

Групповой анализ дифференциальных уравнений возник, как направление, в конце XIX века в трудах норвежского математика Софуса Ли. Теория групп локальных точечных преобразований систематизирует классические методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и дает им обоснование. Найденные точечные группы позволили проинтегрировать много обыкновенных дифференциальных уравнений, которые до этого момента считались неинтегрируемыми. Но потребность в увеличении количества уравнений, имеющих точное решение, по-прежнему вызывает интерес, и задача поиска таких уравнений и их решений чрезвычайно востребована.

Известно, что уравнение n-го порядка, допускающее n-мерную алгебру Ли, интегрируется лишь в том случае, если эта алгебра разрешима. Редукция уравнений, допускающих неразрешимую алгебру Ли, приводит к понижению порядка уравнений, но оптимальная форма, к которой можно привести исходное уравнение, неизвестна. Разработка такого рода матема-

[1]Яковлева Юлия Олеговна (julia.yakovleva@mail.ru), кафедра математики, информатики и математических методов в экономике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

тических преобразований также является актуальной проблемой современной теории дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^2y'' = xy' - y \tag{1}$$

допускает двумерную алгебру Ли. Рассмотрим преобразования этого уравнения, образующие группу Ли и соответствующие допускаемым локальным операторам, то есть операторам вида

$$X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y.$$

Такую форму представления оператора будем называть геометрической.

Наряду с геометрической формой рассматривают эквивалентную ей каноническую форму

$$\widehat{X} = (\eta - \xi y')\partial_y.$$

Операторами алгебры, допускаемой уравнением (1), являются

$$X_1 = x\partial_y, \quad X_2 = x\partial_x,$$

имеющие в канонической форме вид

$$\widehat{X_1} = x\partial_y, \quad \widehat{X_2} = -xy'\partial_y.$$

Данная алгебра, как и всякая двумерная алгебра Ли, является разрешимой.

В различной литературе [3, 4] рассматривалось так называемое "правильное" понижение порядка, то есть понижение порядка уравнения с помощью оператора, являющегося идеалом алгебры.

Так как $[X_1, X_2] = X_1$, то X_1 — идеал рассматриваемой двумерной алгебры. Понизим порядок уравнения (1) с помощью X_1.

Инвариантами $\widehat{X_1}$ являются $t = x$, $w = xy' - y$, через которые (1) выражается в виде уравнения первого порядка

$$tw' = w.$$

Это уравнение остается инвариантным относительно редуцированной группы, задаваемой оператором

$$\widehat{X_2} = -tw'\partial_w.$$

Уравнение $tw' = w$ легко интегрируется. И уравнение (1) в старых переменных имеет следующее общее решение:

$$\frac{y}{x} + C\ln x + C_1 = 0.$$

При понижении порядка уравнения (1) с помощью оператора X_2 ("неправильное" понижение порядка) получаем следующее уравнение первого порядка:

$$(z' - 1)z = z - p, \quad p = y, \quad z = xy'.$$

При этом оператор $\widehat{X_1}$ преобразуется к форме

$$\widehat{X_1} = -\frac{1}{z}\exp\,(\int\frac{dp}{z})\partial_z.$$

Очевидно, что получен экспоненциальный нелокальный оператор (ЭНО). Для редукции уравнения, допускающего ЭНО, можно построить факторизацию уравнения [1]. В данном случае это позволит найти общее решение уравнения (1).

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = y^{-2}, \tag{2}$$

допускающее неразрешимую трехмерную алгебру. Операторы этой алгебры в канонической форме имеют вид [2]:

$$\widehat{X}_1 = -y'\partial_y, \quad \widehat{X}_2 = (y - xy')\partial_y, \quad \widehat{X}_3 = (2xy - x^2y')\partial_y.$$

Легко проверить, что данная алгебра является неразрешимой. Для этого найдем $[X_1,\, X_2]$, $[X_1,\, X_3]$, $[X_2,\, X_3]$.

$$[X_1,\, X_2] = X_1,\;\; [X_1,\, X_3] = 2X_2,\;\; [X_2,\, X_3] = X_3.$$

Алгебра действительно неразрешима, так как у производной алгебры $\{[X_1,\, X_2],\, [X_1,\, X_3],\, [X_2,\, X_3]\}$ размерность не уменьшилась.

Понизим порядок исходного уравнения с помощью первого оператора. Получим уравнение второго порядка:

$$p''p^2 + (p')^2p = y^{-2},\;\; p = y'.$$

При этом операторы примут вид

$$\widehat{X}_2 = yp'\partial_p, \quad \widehat{X}_3 = y(1 - p'\int\frac{dy}{p})\partial_p.$$

Повторное понижение порядка полученного уравнения приводит к уравнению вида:

$$sr((s'-1)r + s) = 1,$$

где $r = p$, $s = yp'$, а оставшийся оператор преобразуется к форме

$$\widehat{X}_3 = -(\frac{s}{r} + s' - 1)\exp\,(\int\frac{dr}{s})\partial_s.$$

При понижении порядка уравнения (2) с помощью третьего оператора получаем:

$$w''w^2 + (w')^2w = z^{-2},\;\; z = \frac{y}{x^2}, \quad w = y' - 2\frac{y}{x}.$$

Операторы примут вид:

$$\widehat{X}_1 = z(1 - w'\int\frac{dz}{w})\partial_w, \quad \widehat{X}_2 = zw'\partial_w.$$

При понижении порядка уравнения $w''w^2 + (w')^2w = z^{-2}$ с помощью $\widehat{X}_2 = zw'\partial_w$ получаем уравнение первого порядка:

$$sr((s'-1)r + s) = 1,$$

где $r = w,\ s = zw'$, а оставшийся оператор преобразуется к форме

$$\widehat{X}_1 = -(\frac{s}{r} + s' - 1)\exp\,(\int \frac{dr}{s})\partial_s.$$

Очевидно, в этих двух случаях получены одинаковые уравнения первого порядка, а операторы, допускаемые этими уравнениями – ЭНО, что, впрочем, не обеспечивает интегрируемость исходного уравнения (2).

При понижения порядка уравнения (2) с помощью второго оператора получаем:

$$q''(q-t)^2 - 2q'(q-t) + (q')^2(q-t) = t^{-2}, \quad t = \frac{y}{x}, \quad q = y'. \tag{3}$$

Операторы примут вид:

$$X_1 = tq'\exp(-\int \frac{dt}{q-t})\partial_q, \quad X_3 = (q'-2)t\exp(\int \frac{dt}{q-t})\partial_q.$$

В этом случае получены два ЭНО. Так как ЭНО в общем случае приводит к факторизации уравнения второго порядка [1], мы можем построить две различные факторизации уравнения (3). Полученный результат вполне объясним — оператор X_2, используемый для понижения порядка в данном случае, содержится в двух подалгебрах исходной трехмерной алгебры, имеющих идеалы $\{X_1,\ X_2\}$ (идеал X_1) и $\{X_2,\ X_3\}$ (идеал X_3).

Отсюда следует вывод: при исследовании уравнений порядков $\geqslant 3$, допускающих неразрешимую алгебру Ли, следует так выбирать базис допускаемой алгебры, чтобы максимальное число двумерных подалгебр имело идеал, так как в этом случае редукция оператора приводит к ЭНО, допускаемому преобразованным уравнением.

Литература

[1] Зайцев В.Ф. Формальные операторы и теоремы о факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений // Симметрии и дифференциальные уравнения: труды Международной конференции. Красноярск, 2002. С. 101–105.

[2] Зайцев В.Ф. Трехмерная неразрешимая алгебра Ли, допускаемая дифференциальным уравнением третьего порядка и ее подалгебры // Герценовские чтения — 2008: материалы научной конференции. СПб., 2008. С. 56–58.

[3] Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа. М.: Знание, 1991. 48 с.

[4] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 640 с.

Поступила в редакцию 22/ V/2009;
в окончательном варианте — 22/ V/2009.

THE REDUCTION OF THE SECOND AND THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WHICH ADMIT LIE ALGEBRA

© 2009 J.O. Yakovleva[2]

In the published work, the reduction of differential equations which admit Lie algebra is presented. The differential equation of the second order which admits Lie algebra and reducted groups which are set by local point operator and exponential nonlocal operator are researched. In case of the differential equation of the third order which admits unsolvable Lie algebra, the reducted groups which are admitted by local points operators as well as non-local operators are viewed.

Key words: differential equation, differential equation of the second order, differential equation of the third order, Lie algebra, local operator, exponential nonlocal operator.

Paper received 22/ V/2009.
Paper accepted 22/ V/2009.

[2]Yakovleva Julia Olegovna (julia.yakovleva@mail.ru), Dept. of Mathematics, Computer Science and Mathematical Methods in the Economy, Samara State University, Samara, 443011, Russia.